Los efectos cuánticos a nivel macroscópico fueron explorados inicialmente en circuitos superconductores con uniones de Josephson en la década de 1980. Desde entonces, diversos avances en la teoría de la información cuántica impulsaron su uso como qubits en procesadores cuánticos. La capacidad de estos qubits para interactuar de manera controlada con fotones en microondas (los campos electromagnéticos cuánticos almacenados en los circuitos superconductores) originó el campo de la electrodinámica cuántica de circuitos (circuit QED). Esta guía tiene como objetivo repasar algunos fundamentos de mecánica cuántica necesarios para abordar estos temas avanzados.

---

1 **Teorema de no-clonado.** El teorema de no-clonado establece que no es posible crear una copia idéntica de un estado cuántico desconocido arbitrario. Este teorema se expresa diciendo que no existe un operador unitario U actuando sobre $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ tal que resulte

$$U\left(|\phi\rangle \otimes |\psi\rangle\right) = |\phi\rangle \otimes |\phi\rangle \,,$$

para todos los $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ en $\mathcal{H}$. Demostrar este teorema (ver por ejemplo Ballentine, p. 209).

2 **Efecto Zeno-Cuántico (Paradoja de Turing)**
Una de las clásicas paradojas de Zeno (450 a.c.), llamada paradoja del arquero, plantea la situación de una flecha en movimiento que es observada en cada instante de tiempo. Si en cada instante la flecha se encuentra en una posición determinada, entonces no puede moverse en dicho instante. Si el tiempo está formado por instantes entonces la flecha nunca puede moverse. Esta idea es contraria a nuestra concepción de movimiento en mecánica clásica. Sin embargo, el siguiente ejercicio muestra que, en mecánica cuántica, la descripción de Zeno sobre el movimiento de la flecha tiene una gran dosis de verdad: *el estado de un sistema cuántico no puede evolucionar si estamos "mirando" al sistema continuamente.* [1]

(a) Considere un sistema cuántico que a tiempo $t = 0$ se encuentra en un autoestado $|\phi\rangle$ de autovalor λ de cierto observable O y evoluciona de acuerdo a un hamiltoniano H. Si a tiempo $t > 0$ se mide el observable O, muestre que la probabilidad de obtener autovalores distintos a λ es proporcional a t^2 para tiempos suficientemente chicos.

(b) Ahora medimos N veces O, a intervalos de tiempo equiespaciados $\Delta t = 1/N$ entre $t = 0$ y $t = 1s$. Muestre que en el límite en que se observa al sistema permanentemente, $N \to \infty$, la probabilidad de obtener cualquier estado ortogonal a $|\phi\rangle$ a $t = 1s$ tiende a cero.

3 **Matriz densidad**
El estado más general de un sistema se describe por un operador autoadjunto, semidefinido positivo y de traza 1 denominado *operador/matriz densidad*. La motivación de esta definición consiste en poder describir ensambles de estados puros (no necesariamente ortogonales entre sí), por ejemplo un ensamble de estados $|\psi_i\rangle$ cada uno con probabilidad p_i (con $\sum_i p_i = 1$) tiene asociada una matriz densidad dada por

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \,. \tag{1}$$

[1] Este efecto ha sido comprobado experimentalmente - ver, por ejemplo: Leibfried, D.; Blatt, R.; Monroe, C.; Wineland, D. (2003). *"Quantum dynamics of single trapped ions"*. Reviews of Modern Physics. **75**: 281.

(a) Si A es un observable del sistema, mostrar que para el ensamble anterior resulta

$$\langle A \rangle = \operatorname{Tr} \rho A \,. \tag{2}$$

(b) Demostrar que un estado genérico ρ es puro si y sólo si $\operatorname{Tr} \rho^2 = 1$.

4 **Teorema de Luders**

Sea $A = \sum_i a_i P_i^A$ un operador hermítico, siendo a_i sus autovalores y P_i^A los proyectores sobre el subespacio de autovectores asociado a cada autovalor. Suponer que el sistema se encuentra en un estado ρ arbitrario. Una medición *no selectiva* es una medición que se realiza pero no se lee; luego de una medición no selectiva de A el estado del sistema es $\rho^A = \sum_i P_i^A \rho P_i^A$. Mostrar que la medición de otro observable B no permite distinguir ρ de ρ^A si $[A, B] = 0$.

5 **Esfera de Bloch**

Un estado genérico de qubit se puede escribir como

$$\rho = \frac{1}{2} \left(\mathbb{1} + \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right) \,, \tag{3}$$

siendo $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ y $|\mathbf{r}| \leq 1$. De este modo, los estados de qubit pueden visualizarse geométricamente como el conjunto de puntos de una esfera, denominada *Esfera de Bloch*.

(a) Probar que un estado genérico de qubit es puro si y sólo si $|\mathbf{r}| = 1$.

(b) Verificar que el estado se hace más impuro a medida que nos acercamos al centro de la esfera de Bloch. El estado del centro se conoce como *maximalmente mixto*. Más en general, para cualquier sistema, el estado maximalmente mixto es el único estado proporcional a la matriz identidad.

(c) Una forma alternativa de probar el inciso anterior es calculando la *entropía de von Neumann* del estado,

$$S(\rho) = - \operatorname{Tr} \rho \log \rho \,, \tag{4}$$

una cantidad que mide qué tan mixto es dicho estado. Graficar la entropía de un estado genérico de qubit en función de $|\mathbf{r}|$.

6 Discutir las diferencias entre los estados $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle)$ y $\rho = \frac{1}{2} (|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|)$.

7 Para un haz de partículas de espín 1/2 se conocen los valores de $P_\alpha = \langle S_\alpha \rangle$, con $\alpha = x, y, z$. Escriba la matriz densidad que describe el estado de espín del haz.

8 **Estado térmico**

El denominado *estado térmico* a temperatura $1/\beta$ de un sistema con Hamiltoniano H es aquel descripto por la matriz densidad

$$\rho_\beta = \frac{e^{-\beta H}}{\operatorname{Tr} e^{-\beta H}} \tag{5}$$

(a) Verificar que cuando $\beta \to 0$ el estado térmico es maximalmente mixto.

(b) Construir el estado térmico de un oscilador armónico unidimensional y hallar el valor medio de la energía.

(c) Las fluctuaciones térmicas se suprimen fuertemente cuando la temperatura es suficientemente baja. Dar más precisión a esta afirmación.

9 **Matriz densidad reducida**

Considere un sistema compuesto por dos subsistemas A y B en un estado global ρ_{AB}. En este caso, se define la *matriz densidad reducida* a A como

$$\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho_{AB}\,. \tag{6}$$

Esta matriz densidad es un estado (¡probarlo!) que describe al subsistema A cuando no tenemos conocimiento sobre B. Para un sistema compuesto por dos espines $1/2$, en el estado global puro de espín total nulo, hallar la matriz densidad reducida que describe el estado de cada uno de los espines.

10 **Entropía de entrelazamiento**

Cuando la matriz densidad reducida a un subsistema es mixta se dice que el estado global tiene *entrelazamiento*. Una forma de cuantificar el entrelazamiento es a través de la denominada *entropía de entrelazamiento*,

$$S_A = -\,\mathrm{Tr}\,\rho_A \log \rho_A = S(\rho_A)\,, \tag{7}$$

que no es otra cosa que la entropía de von Neumann asociada a la matriz densidad reducida de uno de los subsistemas.

(a) Probar que si el estado global es puro, $S_A = S_B$.

(b) Demostrar que el estado del problema anterior tiene la máxima entropía de entrelazamiento posible (se dice que es un estado *maximalmente entrelazado*).

11 * **Lógica Cuántica** (fuera de programa, sólo por diversión!)

Este ejercicio muestra diferencias entre la mecánica cuántica y la clásica desde un punto de vista lógico. Una proposición A para un dado x puede tener valor "falso" o "verdadero" (0 o 1). La negación $-A$ es otra proposición que se cumple si no se cumple A y no se cumple si se cumple A. La proposición compuesta $A \wedge B$ se cumple si y sólo si se cumplen A y B. La proposición $A \vee B$, que se cumple si y sólo si se cumple A o se cumple B (o ambos) puede definirse a partir de las proposiciones anteriores utilizando la ley de De Morgan

$$A \vee B \doteq -(-A \wedge -B)\,.$$

Verifique que esta ley tiene sentido y que en la lógica usual se cumple la ley distributiva (lógica Booleana)

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)\,.$$

En mecánica cuántica, las proposiciones V corresponden naturalmente a subespacios del espacio de Hilbert. Un vector $|\psi\rangle$ satisface la proposición V si $|\psi\rangle \in V$ y no la satisface si $|\psi\rangle \perp V$, es decir, si $|\psi\rangle$ pertenece a la proposición opuesta $-V$ (que en el caso cuántico debe entenderse como el subespacio ortogonal $-V \equiv V^\perp$. En forma equivalente, las proposiciones se pueden asimilar a los proyectores ortogonales sobre estos subespacios, que tienen autovalor 1 o 0 para $|\psi\rangle \in V$ o $|\psi\rangle \in -V$, respectivamente. $V \wedge W$ es naturalmente el subespacio intersección $V \cap W$.

(a) Utilizando la ley de Morgan para definir $V \vee W$ (proposición “V o W”) mostrar que $V \vee W$ es el espacio $V \oplus W$.

(b) Verificar que la lógica cuántica no es distributiva.