La interacción entre átomos y fotones atrapados en cavidades es un fenómeno central en la electrodinámica cuántica de circuitos. En estos sistemas, los átomos, modelados como sistemas de dos niveles, interactúan con el campo electromagnético cuantizado en una cavidad, dando lugar a efectos como el intercambio de excitaciones entre el átomo y el campo. Este tipo de interacción se puede describir mediante el modelo de Jaynes-Cummings, que captura la dinámica de un átomo interactuando con un único modo del campo electromagnético. En esta guía exploramos estas ideas.

---

1 Cuantización del campo electromagnético

Los fotones surgen cuando uno realiza la cuantización del campo electromagnético libre A^μ, cuya densidad lagrangiana es

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}\,, \tag{1}$$

donde $F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$. El proceso de cuantización canónica de este campo es análogo al que se realiza con cualquier sistema clásico, como por ejemplo el oscilador armónico (salvo por un par de complicaciones relacionadas con que al tratar con un campo tenemos un número continuo de grados de libertad y con el hecho de que el electromagnetismo tiene vínculos).

Para el modo fundamental de un campo electromagnético confinado a una cavidad de tamaño L y con vector de onda $\mathbf{k} = k\hat{z}$, se obtiene en la representación de Heisenberg,

$$\mathbf{A}(z,t) = \frac{E_0}{\omega}\hat{x}\left[e^{-i(\omega t - kz)}a + e^{i(\omega t - kz)}a^\dagger\right] \tag{2}$$

con $k = \frac{2\pi}{L}$ y $\omega = k$ $(c = 1)$, y donde a y $a^\dagger$ son operadores de subida y bajada (es decir, cumplen $\left[a, a^\dagger\right] = 1$). Los fotones son las excitaciones del campo, creadas por el operador $a^\dagger$.

(a) Usando (2), hallar la expresión cuántica de los campos eléctrico y magnético.

(b) Para un sólo modo, el hamiltoniano del campo electromagnético queda dado por

$$H = \hbar\omega\left(a^\dagger a + \frac{1}{2}\right)\,. \tag{3}$$

Verificar que (2) cumple la ecuación de Heisenberg.

2 Átomo de dos niveles en interacción con campo electromagnético externo

Consideremos un átomo en el caso en que resulte válido restringirse a un subespacio de dimensión 2 de su espacio de estados $\{|g\rangle, |e\rangle\}$. En este caso, el hamiltoniano del átomo está dado por

$$H_a = \frac{\hbar}{2}\omega_a\,\sigma_z, \tag{4}$$

con $\hbar\omega_a = E_e - E_g$, siendo E_g y E_e las energías del estado fundamental y el primer estado excitado. Si el átomo se acopla con un campo eléctrico clásico que oscila con frecuencia ω_r, la interacción entre el electrón de átomo y el campo, en la aproximación dipolar, está dada por

$$H_{int} = \hbar\Omega\cos(\omega_r t + \varphi)(\sigma_+ + \sigma_-), \tag{5}$$

con $\sigma_\pm = (\sigma_x \pm i\,\sigma_y)/2$

(a) Usando la representación de interacción, y suponiendo $\omega_a \sim \omega_r$ aplique la aproximación de onda rotante (RWA), en la cual se desprecian los términos de oscilación rápida (aquellos cuya frecuencia es $\omega_a + \omega_r$). Muestre que en este caso

$$H_{int,I} \approx \frac{\hbar}{2}\Omega(\sigma_+ \, e^{i\Delta t - i\varphi} + \sigma_- \, e^{-i\Delta t + i\varphi}), \tag{6}$$

donde $\Delta = \omega_a - \omega_r$ es el *detuning.*

(b) Suponga que inicialmente el sistema se encuentra en el estado excitado. Calcule el estado a tiempo $t > 0$ y la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado excitado en función del tiempo $P_e(t)$.

(c) Calcule el valor de expectación de los operadores $\sigma_{x,y,z}$ en función del tiempo.

3 Modelo Jaynes-Cummings

Consideremos un átomo de dos niveles $\{|g\rangle, |e\rangle\}$, cuyo hamiltoniano puede escribirse como

$$H_a = \frac{\hbar}{2}\omega_a \, \sigma_z, \tag{7}$$

con $\hbar\omega_a = E_e - E_g$. El átomo interactúa con un único modo del campo electromagnético cuantizado en el interior de una cavidad. El hamiltoniano del modo de campo electromagnético es

$$H_r = \hbar\omega_r \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \tag{8}$$

La interacción entre el átomo y el campo se puede escribir, en la aproximación dipolar, como

$$H_{int} = \hbar \, \frac{\Omega}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \otimes (a^\dagger + a), \tag{9}$$

de forma que el hamilltoniano del sistema átomo+cavidad resulta

$$H = H_a + H_r + H_{int}. \tag{10}$$

Este es el hamiltoniano del denominado *modelo de Rabi*. El objetivo del ejercicio es realizar la aproximación de onda rotante en (10) para obtener el hamiltoniano del *modelo de Jaynes-Cummings*, y resolverlo explícitamente.

I. Escriba el hamiltoniano H en la representación de interacción usando el hamiltoniano *libre* $H_0 = H_a + H_r$. Muestre que de los cuatro términos del hamiltoniano de interacción $H_{int,I}$, dos de ellos oscilan con una frecuencia $\omega_a + \omega_r$, mientras que los otros dos oscilan con frecuencia $\Delta = \omega_a - \omega_r$.

II. Considerando $\omega_a \sim \omega_r$, realice la aproximación de onda rotante (RWA). Reescriba el resultado (hamiltoniano de Jaynes-Cummings, H_{JC}) en la representación de Schrödinger.

III. Definimos el operador número de excitaciones $\hat{N} = |e\rangle\langle e| + a^\dagger a$. Muestre $[\hat{N}, H_{JC}] = 0$ y por lo tanto el hamiltoniano resulta diagonalizable en una base de autoestados de $\hat{N}$. ¿Es el espectro de $\hat{N}$ degenerado?

iv. A partir de (iii), muestre que el problema de diagonalizar H_{JC} se reduce, para el caso $n > 1$, al problema de diagonalizar las matrices de 2×2 correspondientes al subespacio de estados asociado a cada número de excitaciones n. ¿Qué se tiene en el caso de cero excitaciones?. Diagonalice el hamiltoniano de Jaynes–Cummings en cada subespacio invariante.

$\boxed{4}$ Consideremos un átomo de dos niveles $\{|g\rangle, |e\rangle\}$ y frecuencia natural ω_a que interactúa resonantemente con el único modo de radiación de una cavidad, de frecuencia $\omega_r = \omega_a$.
Si el átomo se encuentra inicialmente excitado, de forma que el estado inicial del sistema es $|\psi(t)\rangle = |e\rangle \otimes |\phi\rangle$, con

$$|\phi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \tag{11}$$

i. ¿Cuál es el estado $|\psi(t)\rangle$ del sistema a tiempo t?

ii. Si el estado inicial del campo es ahora un estado coherente $|\phi\rangle = |\alpha\rangle$. ¿Cuál es la probabilidad $P(|e\rangle, t)$ de encontrar el átomo en el estado excitado después de un tiempo de interacción t? ¿Para el caso de α grande podríamos decir que la evolución es análoga a la de un campo clásico? ¿Sería posible calcular el número n de fotones midiendo $P(|e\rangle, t)$?