En esta guía estudiaremos cómo describir fotones en resonadores y líneas de transmisión, y explorar estados coherentes y su dinámica. Nos enfocaremos en el régimen de microondas, relevante para tecnologías de cQED.

---

1. Considere el Hamiltoniano para un resonador LC cuántico

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{c+c_g}(\hat{q}-q_g(t))^2 + \frac{1}{2L}\hat{\phi}^2 \tag{1}$$

(a) Haciendo uso de la similitud entre el caso $q_g = 0$ y el Hamiltoniano para el oscilador armónico, defina operadores $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$ como combinación lineal de los operadores de carga y flujo, que le permitan llevar el Hamiltoniano de la Eq. (1) a la forma

$$H|_{q_g=0} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2). \tag{2}$$

Exprese la frecuencia ω en términos de los parámetros del circuito.

(b) Para los operadores hallados en (i), encuentre la expresión del Hamiltoniano de la Eq. (1) en el caso más general de $q_g(t) \neq 0$.

2. Muestre que el número de fotones en un estado coherente $|\alpha\rangle$ es $\langle\hat{n}\rangle = |\alpha|^2$. Calcule la incerteza en las cuadraturas $\{\hat{q},\hat{\phi}\}$ para este estado.

3. Muestre que el estado fundamental del Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega\hat{a}^\dagger\hat{a} + i\hbar\Omega_0(\hat{a}^\dagger - \hat{a}) \tag{3}$$

es un estado coherente con $\alpha \propto \Omega_0$. [1]

4. Considere un resonador de frecuencia ω_r, que se encuentra inicialmente en el estado de vacío $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$. El resonador se acopla con una fuente de ondas electromagnéticas clásicas, que oscilan con frecuencia ω_d. El acoplamiento puede modelarse, bajo la aproximación de onda rotante con un término:

$$H_d \approx \hbar\Omega_0\left(\hat{a}\,e^{i\omega_d t} + \hat{a}^\dagger\,e^{-i\omega_d t}\right)$$

(a) Encuentre y resuelva la ecuación de Heisenberg para el operador de destrucción $\hat{a}$. Muestre con este resultado, que el estado a tiempo t es un estado coherente. ¿Cuál es el $\alpha(t)$ correspondiente?

(b) Calcule el valor medio de excitaciones y la probabilidad de tener cero excitaciones en función del tiempo. En particular, analice los valores que toman estas expresiones en el caso resonante.

5. Se desea ubicar una molécula magnética dentro de una guía de transmisión tipo (a) $\lambda/2$ y (b) $\lambda/4$.

(a) ¿Qué posición optimiza el acoplamiento entre la molécula y el modo fundamental?

(b) ¿Qué posición optimiza el acoplamiento entre la molécula y el primer armónico?

---

[1] Puede ser útil usar la definición de estado coherente en términos del operador de desplazamiento $D(\alpha)$, y las relaciones de conmutación entre $D(\alpha)$, $\hat{a}$ y $\hat{a}^\dagger$, como por ejemplo $\hat{a}D(\alpha) = D(\alpha)(\hat{a}+\alpha)$.

(c) ¿Dónde debe ubicarse la molécula para que se acople con igual intensidad al modo fundamental y al primer armónico?

$\boxed{6}$ Aplicando las ecuaciones de Hamilton al Hamiltoniano para una línea de transmisión se encuentra, en el límite continuo, la ecuación dinámica

$$\partial_t^2\, \phi(x,t) - \frac{1}{c\,l}\partial_x^2 \phi(x,t) \tag{4}$$

cuyas soluciones aceptan una expansión en modos

$$\phi(x,t) = \sum_n u_n(x)\, b_n(t) \tag{5}$$

(a) Encuentre y resuelva la ecuación para cada modo $u_n(x)$.

(b) Para el caso de una línea de transmisión de longitud d no-acoplada, ¿qué condición debe satisfacerse en los extremos? Encuentre las soluciones en este caso, conocido como *línea de transmisión* $\lambda/2$.

(c) Si se modifica la situación anterior conectando uno de los dos extremos a tierra, ¿ cómo debe expresarse la nueva condición de contorno? Encuentre las soluciones en este caso, conocido como *linea de transmisión* $\lambda/4$.