Los qubits superconductores representan una de las realizaciones más avanzadas de sistemas cuánticos controlables. Construidos a partir de circuitos eléctricos no lineales que operan a temperaturas del orden de milikelvin, permiten definir estados cuánticos bien definidos usando variables como la carga o el flujo. En esta guía nos centraremos en el análisis de distintos tipos de qubits superconductores y en cómo controlar su dinámica.

---

1 Energías del qubit de carga

En la representación de número, el Hamiltoniano de un qubit de carga está dado por:

$$\hat{H} = \sum_n \left[4E_C \left(n - n_g\right)^2 |n\rangle \langle n| - \frac{E_J}{2} \left(|n\rangle \langle n+1| + |n+1\rangle \langle n|\right) \right] ,$$

donde $E_C = \frac{e^2}{2(C+C_g)}$, $E_J = \frac{\hbar}{2e} I_c$ y $n_g = \frac{C_g V}{2e}$.

(a) Si $E_J = 0$ los autoestados de H son los autoestados del operador de número. Graficar $E_n/4E_C$ en función de n_g, siendo E_n la energía del estado con n pares de Cooper, para los casos $n = 0$ y $n = 1$. Notar que cuando $n_g = 1/2$, los estados con $n = 0$ y $n = 1$ están degenerados (por este motivo, a veces decimos llamamos punto de simetría al valor $n_g = 1/2$).

(b) Si ahora suponemos que $E_J \neq 0$ pero suficientemente más chico que E_C, el término proporcional a E_J puede tratarse como una perturbación. Hallar cómo se corrigen las energías y los estados $n = 0$ y $n = 1$ para $n_g = 1/2$. Probar que las energías corregidas difieren en exactamente E_J (solemos decir que hay un *gap de energía* de valor E_J).

(c) Considerando el sistema en el punto de simetría, mostrar que incluso en el régimen perturbativo ($E_J \ll E_C$), la inclusión del término Josephson introduce una separación desigual entre niveles de energía (volver a resolver el inciso anterior agregando el nivel $n = 2$). Concluir que el sistema se vuelve anarmónico, es decir, que la diferencia de energía entre niveles consecutivos no es constante. Esta anarmonicidad es esencial para poder definir un qubit a partir de los dos niveles más bajos.

2 Dinámica de un qubit de carga

Siguiendo el experimento realizado por Nakamura y colaboradores[1] se prepara un qubit de carga con $n_g \sim 0$ y se lo enfría hasta alcanzar la neutralidad de carga, es decir, el estado $|0\rangle$. Luego se lleva el sistema hasta el punto de simetría $n_g = 1/2$ de manera abrupta (esto se controla con la fuente de tensión), dejándolo evolucionar en esas condiciones durante un tiempo t luego del cual se retorna bruscamente al punto $n_g \sim 0$ y se mide la carga en la isla superconductora.

(a) Escriba el Hamiltoniano del qubit alrededor del punto de simetría.

(b) Encuentre el estado del sistema a tiempo t.

(c) ¿Cuál es la probabilidad de encontrar un par de Cooper de exceso al final del experimento?

[1] Nakamura, Yu., Pashkin, Y. A., & Tsai, J. S. (1999). Coherent control of macroscopic quantum states in a single-Cooper-pair box. nature, 398(6730), 786-788.

3 Excitaciones del transmón

Considere el Hamiltoniano (en unidades $\hbar = 1$) del transmón para los tres niveles de menor energía y una perturbación externa dependiente del tiempo

$$H = (\omega_{12} + \omega_{01})|2\rangle\langle 2| + \omega_{01}|1\rangle\langle 1| + (\varepsilon_{12}(t)|2\rangle\langle 1| + \varepsilon_{01}(t)|1\rangle\langle 0| + \text{h.c.})\,, \tag{1}$$

donde $\omega_{12} = \Delta + \alpha$ y $\omega_{01} = \Delta$ están relacionadas por una anarmonicidad α, y las perturbaciones satisfacen $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{01} = \varepsilon_0 \cos(\omega\, t)$. El objetivo de este ejercicio es estudiar la dinámica para caracterizar la probabilidad de pérdidas fuera del espacio del qubit.

(a) Aplique al Hamiltoniano una transformación unitaria $U = e^{-iKt}$, con $K = 2\omega|2\rangle\langle 2| + \omega|1\rangle\langle 1|$. Muestre que, despreciando los términos que oscilan rápidamente, se obtiene un Hamiltoniano de la forma

$$H_{eff} = (2\delta + \alpha)|2\rangle\langle 2| + \delta|1\rangle\langle 1| + \frac{\varepsilon_0}{2}\left(|2\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0| + \text{h.c.}\right) \tag{2}$$

(b) Asuma una anarmonicidad grande $|\delta + \alpha| \gg |\delta|$ e ignore el tercer estado. Resuelva la dinámica de un estado inicial $|\psi(0)\rangle = |0\rangle$ como función del tiempo. ¿Qué condiciones se deben satisfacer para alcanzar un estado $|1\rangle$ perfecto? ¿ Cómo depende el tiempo τ_{flip} de inversión de poblaciones de la perturbación ϵ_0?

(c) Restringiéndose al caso resonante $\delta = 0$ consideraremos las pérdidas al tercer nivel de forma perturbativa. Para eso, puede ser útil reescribir el Hamiltoniano en la base $|\pm\rangle = 1/\sqrt{2}(|0\rangle \pm |1\rangle)$ y pasar a la representación de interacción, expandiendo al orden más bajo en ε_0/α. Muestre que la probabilidad de excitación es proporcional a $|\varepsilon_0|^2/|\alpha|^2$

4 Qubit de tres junturas

Observaremos el qubit de flujo de tres junturas, o *de corriente persistente*. El Hamiltoniano para este circuito puede escribirse como

$$H = \frac{1}{2}\frac{1}{c_J(1/2+\alpha)}\,q_+^2 + \frac{1}{c_J}q_-^2 - E_J\alpha\cos\left(\frac{\Phi+\phi_+}{\varphi_0}\right) - E_J 2\cos\left(\frac{\phi_+}{2\varphi_0}\right)\cos\left(\frac{\phi_-}{2\varphi_0}\right). \tag{3}$$

En el experimento de Wal y colaboradores[2], las dos junturas más grandes tenían una corriente crítica $I_J = 570nA$ y capacitancia $C_J = 2{,}5fF$, mientras que la juntura más pequeña, lo era por un factor $\alpha = 0{,}82$. El qubit entero tenía un área de unos $10\mu m^2$.

(a) Grafique el potencial. ¿Cuán grande es la barrera de energía entre los dos mínimos a lo largo de $\phi_- = 0$? ¿Qué relación guarda con la profundidad total del pozo?

(b) Estime la fase invariante de gauge a través de las junturas mayores, y relaciónela con la corriente que circula por el circuito.

[2] Van Der Wal, C. H., Ter Haar, A. C. J., Wilhelm, F. K., Schouten, R. N., Harmans, C. J. P. M., Orlando, T. P., and Mooij, J. E. (2000). Quantum superposition of macroscopic persistent-current states. Science, 290(5492), 773-777.

5 Operador corriente en un qubit de flujo

Considere el circuito conocido como rf-SQUID.

$$H = \frac{1}{2c_J} q^2 + \frac{1}{2L}\phi^2 - E_J \cos\left(\frac{\Phi + \phi}{\varphi_0}\right). \tag{4}$$

En el experimento de Wal y colaboradores, las dos junturas más grandes tenían una corriente crítica $I_J = 570nA$ y capacitancia $C_J = 2{,}5fF$, mientras que la juntura más pequeña, lo era por un factor $\alpha = 0{,}82$. El qubit entero tenía un área de unos $10\mu m^2$.

(a) Muestre que en el límite $L_J/L \ll 1$ y operado en el punto de frustración $\Phi = \Phi_0/2$, la fase φ que minimiza el potencial puede escribirse como $\pm(\pi - \varepsilon)$, con ε una corrección pequeña $\varepsilon \propto L_J/L$. Con esto, resuelva aproximadamente la ecuación para los mínimos $\phi_{L,R}$ del potencial.

(b) Escriba el operador corriente para el rf-SQUID en términos del operador de flujo. Estime los elementos de matriz en la base $\{|L\rangle, |R\rangle\}$ y muestre que el operador es aproximadamente diagonal en esta base.
Observación: Si se consideran los dos mínimos locales de forma independiente, cuando éstos sean suficientemente profundos pueden aproximarse, cada uno, con un potencial armónico. Combinado con el término capacitivo el potencial inductivo da origen a dos estados fundamentales efectivos de resonador LC, uno centrado en torno a cada mínimo del potencial de la ecuación (4). Las funciones de onda aproximadas para estos estados son entonces Gaussianas $\psi_{L,R}(\varphi) = \langle\varphi\,|L,R\rangle \propto e^{-\frac{E_J}{16E_C}(\varphi-\varphi_{L,R})^2}$

(c) Pasando a una base rotada $1/\sqrt{2}(|L\rangle \pm |R\rangle)$, muestre que el operador corriente tiene la forma aproximada $\tilde{I}\sigma_x$, encuentre la expresión para $\tilde{I}$.

6 Interacción entre qubits

Considere el modelo de interacción entre dos qubits

$$H = \frac{\Delta_1}{2}\,\sigma_z^1 \otimes \mathbb{I}^2 + \frac{\Delta_2}{2}\,\mathbb{I}^1 \otimes \sigma_z^2 + J\,\sigma_x^1 \otimes \sigma_x^2, \tag{5}$$

en el límite resonante $\Delta_1 = \Delta_2$.

(a) Use la descomposición de la matriz de Pauli σ_x en matrices $\sigma_\pm$ y la representación de interacción para encontrar el Hamiltoniano H_{RWA} de este sistema en la aproximación de onda rotante.

(b) Muestre que H_{RWA} puede descomponerse en bloques de 2×2 que actúan sobre los subespacios par $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ e impar $\{|10\rangle, |01\rangle\}$. Encuentre los autovalores y autovectores de H_{RWA}.

(c) Muestre que H también puede descomponerse en bloques de 2×2 que actúan sobre los subespacios par $\{|00\rangle, |11\rangle\}$ e impar $\{|10\rangle, |01\rangle\}$. Encuentre los autovalores y autovectores de H.

(d) Analice los autovectores y muestre que en el límite de acoplamiento débil $|J|/|\Delta| \ll 1$ H tiene aproximadamente los mismo autoestados que el Hamiltoniano H_{RWA} que resulta de despreciar los términos rotantes. Estime la corrección que surge por no despreciar estos términos y muestre que la probabilidad de excitación asociada es proporcional a $|J/\Delta|^2$