$\boxed{1}$ Considerar el Hamiltoniano de espín-bosón

$$H_{SB} = \sum_m \hbar\,\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\,\frac{\omega_a}{2}\,\hat{\sigma}_z + \sum_m \hbar\,\hat{\sigma}_x\,(g_m^* \hat{a}_m^\dagger + g_m \hat{a}_m), \tag{1}$$

con $g_m = 2ie\frac{c_g}{c_\Sigma}\sqrt{\hbar\omega_m/(2cd)}$ y d la longitud de la guía de ondas. En el límite $|g_m| \ll 1$ despreciando los términos contra-rotantes, se considera el estado más general de una o cero excitaciones

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)\,|g,0\rangle + c_e(t)\,|e,0\rangle + \sum_m c_m(t)\,|g,1_m\rangle \tag{2}$$

(a) Encontrar las ecuaciones de movimiento para $c_e(t)$, $c_g(t)$ y $c_m(t)$

(b) En clases demostramos que

$$c_m(t) = e^{-i\,(\omega_m - \omega_a/2)(t-t_o)} c_m(t_o) - i g_m^* \int_{t_o}^{t} dt'\, e^{-i\,(\omega_m - \omega_a/2)(t-t')} c_e(t') \tag{3}$$

es la solución (formal) para ecuación para las amplitudes $c_m(t)$ asociadas a los modos del oscilador. Usando ese resultado, escribir la ecuación para la amplitud del estado excitado del qubit como

$$\partial_t\, c_e(t) = -i\,\omega c_e(t) - i\xi(t,t_0) - \int_{t_0}^{t} dt'\, K(t-t')\, c_e(t') \tag{4}$$

(c) Mostrar que el caso $\xi(t,t_0) = 0$, $K(t-t') = 1/(2\pi)\int d\omega\, J(\omega) e^{-i\omega(t-t')}$ con $J(\omega) = 2\pi\alpha$ constante sobre toda la recta real $\omega \in \mathbb{R}$ conduce a una ecuación diferencial Markoviana que depende únicamente del valor $c_e(t)$ a tiempo t.

(d) Escribir el operador densidad $\rho(t)$ del sistema compuesto y trazar sobre los grados de libertad de la línea de transmisión para obtener el operador densidad del qubit ρ_{qb}.

(e) La entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida

$$S = -\mathrm{tr}(\rho_{qb}\log(\rho_{qb})) = -\sum \lambda_i \log(\lambda_i), \tag{5}$$

siendo λ_i los autovalores de ρ_{qb}, es una medida del entrelazamiento entre los dos subsistemas.

Considerar un átomo originalmente excitado $c_e(t_0) = 1$ en interacción con una línea de transmisión originalmente en estado de vacío $c_m(t_0) = 0,\ \forall m$.

I- Calcular los autovalores $\lambda_\pm$ de la matriz densidad del qubit.

II- Mostrar que el entrelazamiento es nulo a $t = 0$ y a $t = +\infty$. Hallar el tiempo de máximo entrelazamiento.