Las interacciones entre qubits superconductores y modos electromagnéticos en circuitos son un aspecto central de circuit QED. Cuando un qubit se acopla a un resonador o a una guía de ondas, se pueden construir modelos efectivos que describen cómo evoluciona el sistema conjunto. En esta guía vamos a estudiar estos acoplamientos y cómo se relacionan con algunos modelos bien conocidos de interacción entre materia y radiación.

---

1 Acoplamiento de un qubit a un resonador LC

Considere un circuito formado por un resonador LC acoplado al circuito para un qubit de carga o trasmón, cuyo esquema se presenta en la figura

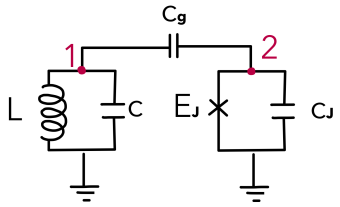

Figura 1: Acoplamiento a circuito LC

(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano y el Hamiltoniano para este sistema.

(b) Observe cómo se modifican las capacidades asociadas a cada término respecto de las que se encuentran en los Hamiltonianos libres. Tome el límite $C_g \ll C, C_\Sigma$, con $C_\Sigma = C + C_J$, sobre las constantes en cada término

(c) Muestre que en este límite, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = 4\,E_c(\hat{n} + \hat{n}_r)^2 - E_J\,\cos(\hat{\phi}/\varphi_0) + \hbar\,\omega_r\,\hat{a}^\dagger\hat{a} \tag{1}$$

con $\hat{n}_r = \frac{C_g}{C}\frac{\hat{q}_1}{2e}$ y $\hat{q}_1$ la variable de carga asociada al nodo 1.

Puede resultar de utilidad:

- Escribir primero el Hamiltoniano en términos de las variables de flujo y sus derivadas, haciendo el cambio a las variables de carga en un paso posterior.
- Escribir las relaciones entre capacidades usando $C_\Sigma = C_g + C_J$ como denominador. Por ejemplo:

$$\frac{C_g + C_J}{CC_g + CC_J + C_gC_J} = \left(C + \frac{C_gC_J}{C_g + C_J}\right)^{-1}$$

2 Acoplamiento de un qubit a una guía de ondas

Considere un circuito formado por una línea de transmisión acoplada, en una dada posición x_k al circuito que representa un qubit de carga o trasmón, cuyo esquema se presenta en la figura. La línea de transmisión tiene densidades capacitiva $c(x) = c$ e inductiva $l(x) = l$ uniformes, de modo que $c_i = c\,\Delta x$ y $l_i = l\,\Delta x$.

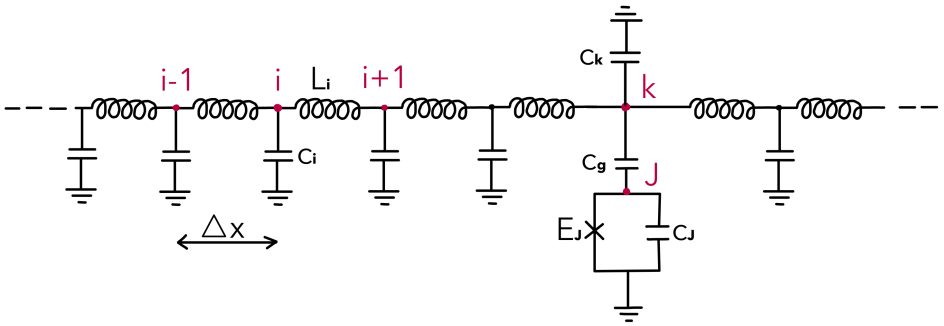

Figura 2: Acoplamiento a línea de transmisión

(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento, el Lagrangiano y el Hamiltoniano para este sistema.

(b) Observe cómo se modifican las capacidades asociadas a cada término respecto de las que se encuentran en los Hamiltonianos libres. Tome el límite $c_g \ll c, c_\Sigma$, con $c_\Sigma = c + c_J$, sobre las constantes en cada término

(c) Muestre que en este límite, el Hamiltoniano puede escribirse como

$$H = 4\,E_c(\hat{n} + \hat{n}_r)^2 - E_J\,\cos(\hat{\phi}/\varphi_0) + \sum_m \hbar\,\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \tag{2}$$

con $\hat{n}_r = \frac{c_g}{c}\frac{\hat{q}_k}{2e}$ y $\hat{q}_k$ la variable de carga asociada al nodo etiquetado con la letra k.

(d) ¿En qué difiere este Hamiltoniano del Hamiltoniano encontrado en el ejercicio anterior?

3 Hamiltonianos de interacción materia-radiación

Para formarnos una imagen más clara de los modelos que podemos reproducir a partir de los circuitos estudiados en los Ejercicios 1 y 2, analizamos distintas formas que toman los Hamiltonianos (1) y (2) de acuerdo a la relación entre parámetros y la base de estados en la que se expandan sus operadores. Para eso:

(a) Expanda explícitamente el cuadrado en el primer término de los Hamiltonianos y escriba el operador $\hat{n}_r$ en términos de los operadores de creación y destrucción de fotones $\hat{a}_m^\pm$

(b) Considerando que el circuito localizado se ubica en el régimen transmónico, realice las aproximaciones correspondientes y escriba el Hamiltoniano completo en términos de operadores de creación y destrucción de excitaciones de cada subsistema.

(c) Sobre el resultado del inciso anterior, realice la aproximación de dos niveles. ¿Qué modelo paradigmático de la electrodinámica cuántica recupera?

(d) Repita los incisos (ii) y (iii) para el caso de acoplamiento a una guía de ondas. ¿Reconoce algún modelo paradigmático en las expresiones halladas?

(e) Discuta el caso en que el circuito localizado se encuentra en el régimen de qubit de carga.

Observación:

Desprecie el término $\propto \hat{n}_r^2$, que induce únicamente una traslación en los niveles de energía del resonador.

4 Modelo de espín-bosón y límite Markoviano

Considere el Hamiltoniano de espín-bosón

$$H_{SB} = \sum_m \hbar\,\omega_m\,\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hbar\,\frac{\omega_a}{2}\,\hat{\sigma}_z + \sum_m \hbar\,\hat{\sigma}_x\,(g_m^* \hat{a}_m^\dagger + g_m \hat{a}_m), \tag{3}$$

con $g_m = i\,2e\,c_g/c_\Sigma\sqrt{\hbar\omega_m/(2cd)}$ y d la longitud de la guía de ondas. En el límite $|g_m| \ll 1$ tal que puedan despreciarse los términos contra-rotantes, se considera el estado más general de una o cero excitaciones

$$|\psi(t)\rangle = c_g(t)\,|g,0\rangle + c_e(t)\,|e,0\rangle + \sum_m c_m(t)\,|g,1_m\rangle \tag{4}$$

(a) Encuentre las ecuaciones de movimiento para $c_e(t)$, $c_g(t)$ y $c_m(t)$

(b) Muestre que

$$c_m(t) = e^{-i\,(\omega_m-\omega_a/2)(t-t_o)}c_m(t_o) - ig_m^*\int_{t_o}^{t} dt'\,e^{-i\,(\omega_m-\omega_a/2)(t-t')}c_e(t') \tag{5}$$

es la solución (formal) para ecuación para las amplitudes $c_m(t)$ asociadas a los modos del oscilador. Usando ese resultado, escriba la ecuación para la amplitud del estado excitado del qubit como

$$\partial_t\,c_e(t) = -i\,\omega c_e(t) - i\xi(t,t_0) - \int_{t_0}^{t} dt'\,K(t-t')\,c_e(t') \tag{6}$$

(c) Muestre que el caso $\xi(t,t_0)=0$, $K(t-t') = 1/(2\pi)\int d\omega\,J(\omega)e^{-i\omega(t-t')}$ con $J(\omega) = 2\pi\alpha$ constante sobre toda la recta real $\omega \in \mathbb{R}$ conduce a una ecuación diferencial Markoviana que depende únicamente del valor $c_e(t)$ a tiempo t.

(d) Escriba el operador densidad $\rho(t)$ del sistema compuesto.

(e) Trace sobre los grados de libertad de la línea de transmisión para obtener el operador densidad del qubit. ¿Cuáles son la tasa de decaimiento y el corrimiento de Lamb?

> Observación:
>
> El espacio de Hilbert es infinito-dimensional así que no podrá escribir una expresión matricial. Sugerencia, expanda $|\psi(t)\rangle\langle\psi(t)|$

5 Interacciones mediadas por la cavidad

Considere dos qubits que interactuan con la misma cavidad de forma que el Hamiltoniano del sistema total puede escribirse como $H = H_0 + V$ con

$$H_0 = \hbar\,\omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + \sum_{i=1}^{2}\hbar\,\frac{\omega_i}{2}\,\hat{\sigma}_z^i \quad ; \quad V = \sum_{i=1}^{2}\hbar\,g_i(\hat{\sigma}_+^i\hat{a} + \hat{\sigma}_-^i\hat{a}^\dagger). \tag{7}$$

(a) Usando teoría de perturbaciones a segundo orden en el límite no-resonante en el que $|\delta_i| = |\omega_r - \omega_i| \gg |g_i|$ obtenga el modelo de acoplamiento dispersivo. Muestre que este Hamiltoniano es equivalente a

$$H_{ef} = \sum_i\left(\frac{\omega_i}{2} - \frac{2\,g_i^2}{\delta_i}\right)\hat{\sigma}_z^i - \frac{g_1 g_2}{2}\left(\frac{1}{\delta_1}+\frac{1}{\delta_2}\right)\hat{\sigma}_x^1\hat{\sigma}_x^2 \tag{8}$$

en el subespacio sin fotones.

(b) Resuelva la dinámica generada por el Hamiltoniano efectivo H_{ef}. ¿En qué límite esta operación se convierte en una *compuerta iSWAP*?

Observaciones y sugerencias:

- Antes de aplicar la teoría de perturbaciones, pase a una representación de interacción en la que se *esconda* la evolución de escala ω_r. Debería obtener un Hamiltoniano con términos $\propto \delta_i$ o $\propto g_i$. La relación $|\delta_i| \gg |g_i|$ permite aplicar teoría de perturbaciones sobre este Hamiltoniano.
- En lugar de aplicar teoría de perturbaciones sobre los estados y niveles de energía, conviene utilizar una Transformación de Schrieffer-Wolff, que a segundo orden está dada, para un Hamiltoniano $H = H_o + H_1$ por

$$H_{ef} = H_o + \frac{1}{2}[S_o, H_1] \quad \text{con} \quad S_o = \sum_{m \neq n} \frac{\langle n|H_1|m\rangle}{E_n - E_m} |n\rangle\langle m|$$

- Puede ser útil escribir el Hamiltoniano efectivo en representación matricial. De esta forma se observa que H_{ef} es fácilmente diagonalizable, lo que permite hallar el operador de evolución generado por H_{ef} de manera relativamente directa recurriendo a la base de autoestados.