En esta guía estudiamos la evolución de sistemas cuánticos abiertos. Introducimos el formalismo de operaciones cuánticas y la ecuación maestra, enfocándonos en la forma de Lindblad bajo la aproximación markoviana. Aplicamos estas herramientas para describir la dinámica de qubits y resonadores acoplados a entornos bosónicos.

---

1 Operaciones cuánticas

La evolución de un sistema cuántico cerrado es unitaria. Esto se expresa diciendo que dado un estado $\hat{\rho}$, su evolución temporal está dada por $\varepsilon(\hat{\rho}) = \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger$, siendo $\hat{U}$ un operador unitario. Cuando el sistema no es cerrado, su matriz densidad evoluciona a través de una *operación cuántica*, es decir un mapa ε tal que

$$\hat{\rho} \to \varepsilon(\hat{\rho}) \, ,$$

y que cumple:

1. $\mathrm{tr}\left[\varepsilon(\hat{\rho})\right] = 1$.
2. ε es lineal sobre combinaciones convexas de estados.
3. $\varepsilon(\hat{\rho})$ es hermítico, positivo y completamente positivo.

Si ε es una operación cuántica (es decir, cumple las propiedades anteriores) se puede demostrar que su acción sobre un estado se puede escribir como:

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \sum_k E_k \, \hat{\rho} \, E_k^\dagger \, , \tag{1}$$

donde los E_k, $E_k^\dagger$ se conocen como *operadores de Kraus* y cumplen $\sum_k E_k^\dagger E_k = \mathbb{1}$.

(a) Probar que si la acción de ε sobre estados está dada por la forma (1), entonces se cumplen las propiedades 1, 2 y 3.

(b) Estudiar la acción del *canal de depolarización*:

$$\varepsilon(\hat{\rho}) = \frac{p}{2}\mathbb{1} + (1-p)\,\hat{\rho} \, ,$$

con $p \in (0,1)$, sobre un estado de qubit y hallar los operadores de Kraus de la operación cuántica.

2 Bit flip y phase flip

Considerar las operaciones sobre un qubit dadas por los siguientes operadores de Kraus:

Bit flip: $E_0 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Phase flip: $E_0 = \sqrt{1-p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \sqrt{p}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

(a) Mostrar que son operaciones cuánticas.

(b) Interpretar *bit flip* como descripción de un "ruido" que induce un error con probabilidad p de obtener $|1\rangle$ por $|0\rangle$ y $|0\rangle$ como $|1\rangle$. Lo mismo para *phase flip*, pero donde el error de transcripción es en el signo relativo entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$.

(c) ¿Qué le hacen geométricamente estas transformaciones a la esfera de Bloch?

3 Ecuación maestra

La evolución temporal de un sistema cuántico cerrado está dada por

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = -i\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] .$$

En este caso, decimos que la evolución es local, porque para hallar $\frac{d}{dt}\hat{\rho}$ a tiempo t sólo es necesario conocer $\hat{\rho}\,(t)$. En cambio, para un sistema cuántico abierto, la evolución es no local y suele depender de la historia del sistema. En general, se tiene:

$$\frac{d}{dt}\hat{\rho} = \mathcal{L}\left(\hat{\rho}\right) , \tag{2}$$

donde $\mathcal{L}$ es un superoperador que describe la dinámica, incluyendo efectos del entorno. Esta es la denominada *ecuación maestra*.

Trabajando en la *aproximación Markoviana*, en la que suponemos que $\hat{\rho}\,(t+dt)$ depende sólo de $\hat{\rho}\,(t)$, mostrar que resulta:

$$\mathcal{L}\left(\hat{\rho}\right) = -i\left[\hat{H}, \hat{\rho}\right] + \sum_k \left(L_k\,\hat{\rho}\,L_k^\dagger - \frac{1}{2}\left\{L_k^\dagger L_k, \hat{\rho}\right\}\right) , \tag{3}$$

donde los $L_k^\dagger$ y L_k se conocen como *operadores de Lindblad*, y hallar la relación entre los operadores de Kraus y los de Lindblad. La ecuación maestra (2) con $\mathcal{L}$ dado por (3) se conoce como *ecuación de Lindblad*.

4 Entrelazamiento qubit-fotón

Retomando el ejercicio 4 de la guía 6 donde se encontró el operador densidad reducido del qubit, ρ_{qb}, en interacción con una línea de transmisión, estudiaremos el entrelazamiento entre el qubit y el entorno fotónico. La entropía de Von Neumann de la matriz densidad reducida

$$S = -\mathrm{tr}(\rho_{qb}\log(\rho_{qb})) = -\sum \lambda_i \log(\lambda_i), \tag{4}$$

siendo λ_i los autovalores de ρ_{qb}, es una medida del entrelazamiento entre los dos subsistemas. Considere un átomo originalmente excitado $c_e(t_0) = 1$ en interacción con una línea de transmisión originalmente en estado de vacío $c_m(t_0) = 0,\ \forall m$.

(a) Calcular los autovalores $\lambda_\pm$ de la matriz densidad del qubit.

(b) Mostrar que el entrelazamiento es nulo a $t = 0$ y a $t = +\infty$. Hallar el tiempo de máximo entrelazamiento.

5 Qubit en un entorno a temperatura nula

En este ejercicio derivaremos la ecuación de Lindblad para un qubit interactuando con un baño de bosones a temperatura nula. El Hamiltoniano que describe el conjunto sistema (qubit) + entorno (bosones) completo está dado por

$$H = H_q + H_e + H_{int} = \frac{\omega_q}{2}\,\sigma_z + \sum_m \omega_m\, a_m^\dagger a_m + \sum_m \sigma_x\,(g_m^* a_m^\dagger + g_m a_m), \tag{5}$$

donde se distingue un término de evolución *libre* del qubit, un término de evolución libre para el entorno y un término de interacción qubit-entorno respectivamente.

(a) Dinámica del conjunto completo

I- ¿Qué nombre recibe este modelo? ¿Qué arquitectura de circuitos superconductores se describe mediante este Hamiltoniano y bajo qué condiciones para los parámetros involucrados?

II- Muestre que el Hamiltoniano de interacción toma, en representación de interacción, la forma

$$H_{int,I} = \sum_m \left(e^{i\omega_q\, t}\,\sigma_+ + e^{-i\omega_q\, t}\,\sigma_-\right)\left(g_m^* e^{i\omega_m\, t}\, a_m^\dagger + g_m e^{-i\omega_q\, t}\, a_m\right) \tag{6}$$

III- Escriba la ecuación que satisface el operador densidad del conjunto completo en representación de interacción.

(b) A continuación, trazamos sobre los grados de libertad del entorno e incorporamos las aproximaciones de Born y Markov. Consideramos un estado inicial producto $\rho_{s+e} = \rho_s(0) \otimes \rho_e$

I- Integrando la ecuación de evolución para la matriz densidad $\rho_{s+e}(t)$ en representación de interacción (el enunciado evita escribir explícitamente el subíndice Ï.$^{\text{en}}$ el operador densidad para aligerar la notación), muestre que

$$\dot{\rho}_{s+e}(t) = -i\left[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)\right] - \int_0^t dt' \left[H_{int,I}(t), \left[H_{int,I}(t'), \rho_{s+e}(t')\right]\right] \tag{7}$$

II- Tome la traza parcial bajo la suposición de que $\mathrm{Tr}_e[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)] = 0$ y de que la aproximación de Born es válida. Esta aproximación supone que, como el acoplamiento entre el entorno y el sistema es débil, el entorno se verá despreciablemente afectado por el sistema y en consecuencia $\rho_{s+e}(t) \sim \rho_s(t) \otimes \rho_e$. El resultado obtenido debe ser

$$\dot{\rho}_s(t) = -\int_0^t dt'\ \mathrm{Tr}\left[H_{int,I}(t), \left[H_{int,I}(t'), \rho_s(t') \otimes \rho_e\right]\right] \tag{8}$$

Expanda el doble conmutador y escriba $H_{int,I}(t) = H^{(s)}_{int,I}(t) \otimes H^{(e)}_{int,I}(t)$ para obtener una expresión donde la información del entorno se condensa en las funciones de correlación $\mathrm{Tr}_e(\rho_e H^{(e)}_{int,I}(t_i) H^{(e)}_{int,I}(t_j))$ con $t_{i,j} = t, t'$.

III- Ahora realizamos la aproximación de Markov y reemplazamos $\rho_s(t')$ por $\rho_s(t)$. Adicionalmente, hacemos el cambio de variables $t' \to t - t'$. Introducimos dos escalas temporales T_R es la escala temporal en la que el qubit cambia producto de su interacción con el entorno y T_e es la escala temporal en la que las funciones de correlación del entorno decaen. Suponiendo que $T_R \gg T_e$ el límite superior de la integral puede tomarse infinito.

(c) Vamos a introducir la información sobre el modelo específico que queremos estudiar. Utilizando que un estado térmico puede escribirse como

$$\rho_e(T) = \frac{e^{-H_e/(k_B\, T)}}{\mathrm{Tr}\, e^{-H_e/(k_B\, T)}}, \tag{9}$$

con T la temperatura y k_B la constante de Boltzman.

I- Encuentre el estado del entorno, que bajo las aproximaciones realizadas será el mismo a todo tiempo, y corrobore que la suposición $\mathrm{Tr}_e[H_{int,I}(t), \rho_{s+e}(0)] = 0$ fue correcta.

II- Usando la expresión explícita para $H^{(s)}_{int,I}(t)$ muestre que la ecuación de evolución se reduce a

$$\dot{\rho}_s(t) = -\{(\sigma_+\sigma_-\rho_s - \sigma_-\rho_s\sigma_+)\Gamma(\omega_q) + (\sigma_-\sigma_+\rho_s - \sigma_+\rho_s\sigma_-)\Gamma(-\omega_q) + \text{h.c.}\} \quad (10)$$

con

$$\Gamma(\omega_q) = \int_0^\infty dt'\, e^{i\,\omega_q,t'}\, \mathrm{Tr}_e(\rho_e H^{(e)}_{int,I}(t) H^{(e)}_{int,I}(t-t')). \quad (11)$$

Usando el estado del entorno y la forma específica de $H^{(e)}_{int,I}(t)$, desarrolle la expresión para $\Gamma(\omega_q)$

III- Separando $\Gamma(\omega_q)$ en parte real e imaginaria según

$$\Gamma(\omega_q) = \frac{1}{2}\gamma(\omega_a) + i\, S(\omega_q), \quad (12)$$

puede verse que $\gamma(-\omega_q) = 0$. Llamando además $\gamma(-\omega_q) = \kappa$ encuentre la forma

$$\dot{\rho}_s(t) = -i\frac{S(\omega_q) - S(-\omega_q)}{2}[\sigma_z, \rho_s] + \frac{\kappa}{2}\big(2\sigma_-\rho_s\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma_-, \rho_s\}\big) \quad (13)$$

IV- Escriba la ecuación de evolución para el estado del sistema en representación de Schrodinger

6 Resonador con pérdidas

Se considera un resonador con un forzado clásico, cuya evolución en condiciones de perfecto aislamiento está generada por el Hamiltoniano

$$H_\Omega = \omega a^\dagger a + (\Omega_o^*\, e^{-i\omega_d t}\, a + \Omega_o\, e^{i\omega_d t}\, a^\dagger). \quad (14)$$

El resonador se halla acoplado a una línea de transmisión que funciona como un entorno bosónico, de forma que el estado del resonador satisface, en representación de interacción, la ecuación

$$\dot{\rho}(t) = -i[(\omega_d - \omega)a^\dagger a + \Omega_o^* a + \Omega_o a^\dagger, \rho_s(t)] + \frac{\kappa}{2}\big(2a\,\rho_s\, a^\dagger - \{a^\dagger a, \rho_s\}\big) \quad (15)$$

(a) Escriba y resuelva la ecuación de evolución para el valor medio $\langle a\rangle = \mathrm{tr}(\rho_s\, a)$ y para el número de fotones en el resonador $\langle a^\dagger a\rangle$

(b) Observemos el *ancho a altura media*. Tome el límite $\lim_{t\to\infty}\langle a^\dagger a\rangle$ para conocer el número de fotones del estado asintótico. ¿Para qué frecuencia del resonador ω es máximo y cuál es este número máximo de fotones?. El ancho a altura media es la distancia entre los dos valores de frecuencia para los cuales $\langle a^\dagger a\rangle_{t\to\infty}$ cayó al 50 % de su valor máximo. Encuentre el ancho a altura media.

7 Qubit en un entorno a temperatura finita

Resolvemos la dinámica de un sistema de dos niveles acoplado a un entorno bosónico como en el ejercicio 5, pero esta vez el entorno se halla en un estado térmico con temperatura

$T \geq 0$. La ecuación maestra que describe la evolución del qubit es en este caso es (en unidades de $\hbar = 1$)

$$\dot{\rho}(t) = -i[H, \rho] + (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}(2\sigma_-\rho\sigma_+ - \{\sigma_+\sigma-, \rho\}) + n_\omega\frac{\gamma}{2}(2\sigma_+\rho\sigma_- - \{\sigma_-\sigma_+, \rho\}), \tag{16}$$

con $H = \omega/2\,\sigma_z$ el Hamiltoniano libre del qubit y $n_\omega = (e^{\omega/(k_B T)} - 1)^{-1}$ el número de ocupación bosónico.

(a) Muestre que un observable que actúa sobre el qubit evoluciona según

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle O\rangle = &- i\,\langle [O, H]\rangle + \\ &+ (n_\omega + 1)\frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_+\,[O, \sigma_-] + [\sigma_+, O]\,\sigma_-\rangle + n_\omega\,\frac{\gamma}{2}\,\langle \sigma_-\,[O, \sigma_+] + [\sigma_-, O]\,\sigma_+\rangle\,.\end{aligned} \tag{17}$$

(b) Derive las *ecuaciones de Bloch* para $\langle\sigma_z\rangle$ y $\langle\sigma_\pm\rangle$ y resuelva.

(c) Usando los valores obtenidos en el inciso (ii), reconstruya el *vector de Bloch*. Calcule su norma y muestre que la misma se contrae hacia el interior de la esfera.

(d) Usando el vector de Bloch $\mathbf{s}(t)$ pruebe que la matriz densidad evoluciona según

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} P_1 + e^{-t/T_1}(\rho_{11}(0) - P_1) & \rho_{10}\,e^{-i\omega\,t - t/(2\,T_1)} \\ \rho_{01}\,e^{i\omega\,t - t/(2\,T_1)} & 1 - P_1 - e^{-t/T_1}(\rho_{11}(0) - P_1) \end{pmatrix} \tag{18}$$

con $P_1 = n_\omega/(1 + 2n_\omega) = \lim_{n\to\infty}\rho_{11}(t)$ es la probabilidad de excitación asintótica y $T_1 = (1 - 2\,P_1)/\gamma$ da la escala en la que $\rho(t)$ converge a la solución asintótica. Relacione esta solución con el límite de temperatura nula.

Puede resultar útil

Recordar que el vector de Bloch es un vector de norma unidad que satisface

$$\rho(t) = \frac{1}{2}\mathbb{I} + \frac{1}{2}\,\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\sigma} \tag{19}$$

con $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\hat{x} + \sigma_y\hat{y} + \sigma_z\hat{z}$