Índice

1. Vectores y tensores **2**

2. Convención de Einstein de supresión del símbolo de suma **3**

3. Notación vectorial y notación indicial **4**
3.1. Índices libres 4
3.2. Índices mudos 5

4. Tensores particulares **6**
4.1. Tensor Delta de Kronecker 6
4.2. Tensor de Levi-Civita 6
4.3. Cuál es la relevancia particular de estos dos tensores? 6
III.. Tensores isótropos 6
III.. δ_{ij} y ϵ_{ijk} son isótropos 6
4.4. Vínculo entre los tensores de Kronecker y de Levi-Civita 6

5. Conmutatividad y asociatividad en notación vectorial y tensorial **7**

6. Operaciones vectoriales empleando notación indicial **7**
6.1. Multiplicación de un vector por un escalar 7
6.2. Producto escalar de dos vectores 7
6.3. Producto escalar entre dos tensores 8
6.4. Contracción de un par de tensores 8
6.5. Producto vectorial de un tensor y un vector 8
6.6. Producto vectorial de dos vectores 8
6.7. Contracción total o Traza de un tensor 8

7. Operaciones de cálculo vectorial usando notación indicial **8**
7.1. Derivada temporal de un campo 9
7.2. Gradiente de un campo escalar 9
7.3. Gradiente de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$ 9
7.4. Divergencia de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$ 10
7.5. Rotor de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$ 10
7.6. Laplaciano de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$ 10

8. Acerca del orden de los términos en expresiones que involucran operadores diferenciales **10**

Estructura de Materia 1
1er cuat. 2025

Apunte teórico de
Tensores

1. Vectores y tensores

Consideremos el espacio de $n = 3$ dimensiones. Sabemos que la posición de un punto P en dicho espacio respecto de un sistema de referencia S cartesiano puede expresarse por medio de 3 cantidades escalares (P_x, P_y, P_z) que llamamos componentes del vector posición $\vec{P}$ que identifica dicho punto. Ahora bien, si bien el vector posición es, físicamente hablando, único, su representación en componentes no lo es. Esto se debe a que, respecto de otro sistema de referencia S' (para fijar ideas, podemos pensar que entre los sistemas S y S' hay una rotación), el vector posición tendrá componentes de valores distintos. Sin embargo, notemos, la orientación espacial y la longitud (magnitud) del vector deben ser la misma en cualquier sistema de coordenadas.
Esto nos conduce a pensar que no cualesquiera tres números dispuestos en un arreglo columna constituye un vector. La característica que define a un vector es cómo se transforman sus componentes ante un cambio de coordenadas. En particular, si tenemos una transformación lineal ortogonal general (una rotación, por ejemplo) cuya representación matricial está dada por

$$\mathbb{A} = \underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

las componentes del vector transformado $\vec{x}'$ deben satisfacer

$$\vec{x}' = \mathbb{A}\vec{x} = \underline{\underline{A}}\vec{x}.$$

Esta es la regla que define como tales a los vectores, y que puede escribirse, para la componente i-ésima de la ecuación anterior (siendo i=x, y, z) como:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j.$$

Ahora bien, los coeficientes a_{ij} de la matriz de transformación $\mathbb{A}$ deben cumplir ciertas condiciones para que la misma represente una transformación afín que conserve, por ejemplo, la magnitud de los vectores que transforma. En particular, debe tratarse de una matriz ortogonal. Recordemos que llamamos ortogonal a una matriz cuando el producto de ella por su traspuesta es igual a la matriz identidad, es decir que $\mathbb{A}$ debe satisfacer:

$$\mathbb{A}^{\mathrm{T}}\mathbb{A} = \mathbb{I},$$

lo que resulta equivalente a decir que la matriz traspuesta es igual a su inversa:

$$\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{A}^{-1}.$$

Por lo tanto, las últimas dos ecuaciones nos habilitan a escribir también

$$\mathbb{A}\mathbb{A}^{\mathrm{T}} = \mathbb{I},$$

Finalmente, recordemos que según vimos en nuestra primer clase teórica, un tensor de segundo rango α_{ij} se transforma, ante un cambio de sistema de coordenadas ortogonales de acuerdo a la expresión

$$\alpha'_{ij} = a_{ih} a_{jk} \alpha_{hk},$$

que constituye la definición de tensor cartesiano. La extensión de esta definición a tensores de rango arbitrario (rango 3, 4, etc.) resulta inmediata.

2. Convención de Einstein de supresión del símbolo de suma

Introduciremos en este punto la convención de Einstein, para evitar escribir cada vez el símbolo de suma en las expresiones indiciales. Esta convención consiste en lo siguiente. **Cuando en un monomio figuren dos índices repetidos, se entenderá que se trata de una suma en la que los índices repetidos van sumados de 1 a n, siendo n la dimensión del espacio considerado**.
De esta forma, una expresión como

$$\sum_{i=1}^{3} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

puede escribirse, usando la convención de Einstein, como

$$a_i b_i.$$

En lo que sigue utilizaremos todo el tiempo esta convención. Como un último ejemplo, podemos considerar como se reescribe, en la convención de Einstein, una componente cualquiera de un vector transformado por una rotación del sistema de coordenadas. Si la matriz de rotación es $\underline{\underline{A}} = \mathbb{A}$, y su representación indicial es a_{ij}, entonces el vector $\vec{x}'$, transformado a través de la transformación que $\mathbb{A}$ representa se escribe como

$$\vec{x}' = \mathbb{A}\vec{x}$$

en notación vectorial, mientras que en notación indicial tenemos

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j,$$

y, empleando la convención de Einsten, tenemos la forma simple

$$x'_i = a_{ij} x_j,$$

que expresa en notación indicial la definición de un vector (tensor de rango 1) a partir de su regla de transformación entre dos sistemas de coordenadas cartesianas (vinculadas por una rotación).

3. Notación vectorial y notación indicial

La notación indicial es una herramienta poderosa para manipular ecuaciones multidimensionales. Sin embargo, en determinadas ocasiones la notación vectorial usual puede resultar más útil o práctica. Por lo tanto, resulta importante ser capaces de convertir fácilmente cualquier expresión de una notación a la otra. La primera parte de este apunte tiene como objetivo exponer los rudimentos necesarios para facilitar dicha conversión.
Comencemos por declarar la forma en la que vamos a notar (en este apunte) las diferentes cantidades. Las mismas pueden sumarizarse en la siguiente tabla: La notación detallada en

Cuadro 1: Notación que emplearemos en este apunte.

Magnitud	Notación vectorial	Notación indicial
escalar	a	a
vector	$\underline{a}, \vec{a}, \boldsymbol{a}$	a_i
tensor (de rango 2)	$\underline{\underline{A}}, \mathbb{A}$	a_{ij}

el Cuadro anterior para los tensores de rango 2 se extrapola de forma directa a tensores de mayor rango, simplemente mediante la incorporación de índices adicionales (en la notación tensorial) y mediante el uso de un mayor número de líneas debajo del símbolo correspondiente (en el caso de la notación vectorial usual).

3.1. Índices libres

Un índice libre es aquel que aparece una sóla vez en cada término aditivo de una expresión. En esta ecuación

$$a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k + D_{ij} e_j,$$

i es el índice libre.
Un índice libre implica la existencia de tres ecuaciones independientes (si estamos en el espacio tridimensional). Esto es, se asume siempre que el índice libre toma *todos* los valores asociados a las dimensiones del espacio; en el caso de 3 dimensiones, el índice libre asume los valores 1, 2 y 3; cada uno de ellos en una ecuación independiente. De esta forma, la ecuación

$$a_j = b_j + c_j$$

implica o representa las siguientes tres ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 &= b_1 + c_1, \\ a_2 &= b_2 + c_2, \\ a_3 &= b_3 + c_3. \end{aligned}$$

Debe emplearse el mismo símbolo (usualmente una letra) para el índice libre en cada uno de los términos aditivos de una expresión dada. El índice libre puede renombrarse si y sólo si esta operación se realiza consistentemente en cada uno de los términos de la expresión.
Los diferentes términos que integran una expresión pueden tener más de un índice libre, siempre que dichos índices sean distintos. Por ejemplo, la expresión (en notación vectorial)

$$\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{B}}^T,$$

se escribe como

$$a_{ij} = (b_{ij})^T = b_{ji}$$

en notación indicial. En este caso, esta última expresión implica un total de 9 ecuaciones independientes (si trabajamos en el espacio de 3 dimensiones), dado que i y j son *ambos dos*, índices libres.
El número de índices libres de cualquier término dado en una expresión denota el *rango* del término:

Cuadro 2: Rango tensorial según la cantidad de índices libres.

Magnitud	Notación indicial	Rango tensorial
escalar	a	0
vector	a_i	1
tensor	a_{ij}	2
tensor	a_{ijk}	3

Técnicamente, un escalar es un tensor de rango 0 y un vector es un tensor de rango 1. De esta forma, los tensores puede adoptar cualquier rango entero mayor o igual a cero. Conviene notar que sólo es posible sumar entre sítérminos tensoriales de igual rango. Esta última afirmación es una simple generalización del hecho de que no es posible considerar, por ejemplo, la suma entre un escalar y un vector.
Si pensamos en una representación matricial de los tensores, debemos tener en cuenta que, en la notación indicial, el primero de los índices libres de un término corresponde a la **fila**, y el segundo a la **columna**, en el marco de dicha representación. De acuerdo a esta convención, un vector (que sólo posee un índice libre) se escribe *en representación matricial* como un arreglo en columna (un vector columna) de sus componentes:

$$\vec{a} = a_i = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},$$

y un tensor de segundo rango (o rango 2) se escribe, en representación matricial, como

$$\underline{\underline{A}} = \mathbb{A} = a_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

3.2. Índices mudos

Un índice mudo es uno que aparece dos veces dentro de un término aditivo de una expresión. En la siguiente ecuacion:

$$a_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k + D_{ij} e_j,$$

tanto j como k son índices mudos.
Un índice mudo, de acuerdo a la convencion de suma de Einstein que describimos anteriormente, implica una suma sobre dicho índice, sobre todos sus valores posibles (1 a 3, en el caso tridimensional). Es decir que la expresión a_{ii} denota

$$a_{ii} \equiv \sum_i a_{ii} = a_{11} + a_{22} + a_{33}.$$

Un índice mudo puede renombrarse empleando cualquier otro símbolo, siempre y cuando la nueva letra empleada para nombrarlo no esté siendo empleada para denotar un índice libre en la expresión considerada. Decimos que el índice mudo es *local* a cada término individual aditivo. Puede cambiarse su nombre en un término cualquiera (siempre que este cambio no presente conflicto con otros índices), sin necesidad de ser renombrado también en otros términos.

4. Tensores particulares

4.1. Tensor Delta de Kronecker

La delta de Kronecker es un tensor de rango 2, simétrico, definido operativamente como

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

o bien mediante su representación matricial explícita en el espacio tridimensional:

$$\delta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2. Tensor de Levi-Civita

El tensor de Levi-Civita es un tensor de rango 3, antisimétrico, definido mediante:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{si } ijk \text{ constituyen una permutación par de 123}, \\ -1, & \text{si } ijk \text{ constituyen una permutación impar de 123}, \\ 0, & \text{si dos (o más) índices asumen un mismo valor.} \end{cases}$$

Una permutación par de 123 se define como toda permutación a la que se llega mediante un número par (o nulo) de intercambios de dos cifras de dicho arreglo. Por ejemplo, 231 es una permutación par de 123, ya que para obtener 231 hemos arrancado de 123 y hemos cambiado el 3 por el 1 (primera permutación) y el 2 por el 3 (segunda permutación). Son permutaciones pares de 123: 231 y 312. En contraste; 321, 132 y 213 son permutaciones impares de 123.

4.3. Cuál es la relevancia particular de estos dos tensores?

III.. Tensores isótropos

III.. δ_{ij} y ϵ_{ijk} son isótropos

Son los únicos tensores isótropos en su rango correspondiente. Esto es: la delta de Kronecker es el único tensor isótropo de rango 2, mientras que el tensor de Levi-Civita es el único tensor isótropo de rango 3.

4.4. Vínculo entre los tensores de Kronecker y de Levi-Civita

La siguiente identidad, que vincula los tensores delta de Kronecker y de Levi-Civita, es extremadamente útil:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}.$$

5. Conmutatividad y asociatividad en notación vectorial y tensorial

En general, las operaciones en notación vectorial no presentan propiedades de conmutatividad y/o asociatividad. Por ejemplo, sabemos que

$$\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}.$$

En notación indicial, en contraste, todos los términos representan escalares (a pesar de que el término considerado pueda representar a múltiples escalares en múltiples ecuaciones). Por ello, la notación indicial tiene la ventaja de ser conmutativa y asociativa. Luego vale, por ejemplo:

$$a_i b_j = b_j a_i.$$

En efecto, como en la última expresión tanto i como j son índices libres, la última expresión representa 9 ecuaciones en 3D, o bien 4 ecuaciones en 2D. Si consideramos el caso 2D (por brevedad) tenemos:

$$\begin{aligned} a_1 b_1 &= b_1 a_1, \\ a_1 b_2 &= b_2 a_1, \\ a_2 b_1 &= b_1 a_2, \\ a_2 b_2 &= b_2 a_2, \end{aligned}$$

todas ellas válidas (es decir, satisfacen conmutatividad) dado que se trata de productos de escalares.
De forma similar, puede mostrarse que la notación indicial satisface asociatividad:

$$(a_i b_j) c_k = a_i (b_j c_k)$$

Cabe destacar, sin embargo, que la propiedad de conmutatividad anteriormente mencionada no aplica a los *operadores diferenciales* que son, en general, no conmutativos.

6. Operaciones vectoriales empleando notación indicial

6.1. Multiplicación de un vector por un escalar

La multiplicación de un vector por un escalar adopta la forma

$$a\vec{b} = \vec{c} \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a b_i = c_i \qquad \text{notación de índices,}$$

donde i constituye el índice libre en este caso.

6.2. Producto escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores (también llamado producto interno), se escribe como

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = c \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a_i b_i = c \qquad \text{notación de índices,}$$

siendo i un índice mudo en este caso. El resultado de esta operación entre dos vectores (es decir, su producto) resulta una magnitud escalar, de allí el origen de su denominación.

6.3. Producto escalar entre dos tensores

El *producto escalar entre dos tensores* de rango 2 viene dado por

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = c \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a_{ij} b_{ji} = c \qquad \text{notación de índices.}$$

En este caso, el símbolo ':' indica que *ambos índices* deben sumarse, dando como resultado un escalar. Se dice que el escalar resultante es el producto de haber contraído los dos índices de los tensores a_{ij} y b_{kl}.

6.4. Contracción de un par de tensores

Podemos definir además la contracción de un par de tensores como

$$\underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{B}} = \underline{\underline{C}} \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a_{ij} b_{jk} = c_{ik} \qquad \text{notación de índices.}$$

El símbolo '·' refiere al hecho de que solo el índice interno se suma.

6.5. Producto vectorial de un tensor y un vector

El producto vectorial de un tensor y un vector se expresa mediante

$$\vec{a} \cdot \underline{\underline{B}} = \vec{c} \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a_i B_{ij} = c_j \qquad \text{notación de índices.}$$

Dado un versor $\hat{n}$, podemos formar el producto vectorial $\hat{n} \cdot \underline{\underline{B}} = \vec{c}$. En el lenguaje de la definición de un tensor, decimos que el tensor $\underline{\underline{B}}$ asocia al vector $\vec{c}$ con la dirección dada por el versor $\hat{n}$. Notemos que $\vec{a} \cdot \underline{\underline{B}} \neq \underline{\underline{B}} \cdot \vec{a}$.

6.6. Producto vectorial de dos vectores

El producto vectorial (también llamado producto externo) entre dos vectores tiene la forma:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \qquad \text{notación vectorial}$$
$$\epsilon_{ijk} a_j b_k = c_i \qquad \text{notación de índices.}$$

6.7. Contracción total o Traza de un tensor

La traza de un tensor (también llamada su contracción total) es la suma de sus términos diagonales, la cuál se escribe como

$$\mathrm{tr}\left(\underline{\underline{A}}\right) = b \qquad \text{notación vectorial}$$
$$a_{ii} = b \qquad \text{notación de índices.}$$

7. Operaciones de cálculo vectorial usando notación indicial

En esta sección comentaremos cómo utilizar la notación indicial en operaciones de cálculo diferencial. Para ello, recordemos que las coordenadas cartesianas (x, y, z) se renombran, por comodidad, a (x_1, x_2, x_3).

7.1. Derivada temporal de un campo

La derivada temporal de un campo $\phi(x_1, x_2, x_3, t)$ se escribe simplemente como

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \equiv \partial_t \phi.$$

Algunos autores asignan también el subídice '0' a la variable temporal, con lo cual $\partial_t \phi = \partial_0 \phi$, aunque esta notación es menos común.

7.2. Gradiente de un campo escalar

Las derivadas espaciales que componen el gradiente de un campo escalar $\phi(\vec{x}, t)$ se expresan mediante

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \partial_1 \phi,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_2} = \partial_2 \phi,$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_3} = \partial_3 \phi.$$

En notación indicial, estas tres ecuaciones se sintetizan usando

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \equiv \partial_i \phi,$$

expresión que es el equivalente de la notación vectorial $\vec{\nabla}\phi$.

7.3. Gradiente de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$

El gradiente de un campo vectorial, $\vec{\nabla}\vec{a}$, se escribe, en notación indicial, como

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_j} \equiv \partial_j a_i.$$

El gradiente de un campo vectorial es un tensor de rango 2; su representación matricial viene dada por

$$\vec{\nabla}\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \equiv \partial_j a_i = \begin{pmatrix} \partial_1 a_1 & \partial_1 a_2 & \partial_1 a_3 \\ \partial_2 a_1 & \partial_2 a_2 & \partial_2 a_3 \\ \partial_3 a_1 & \partial_3 a_2 & \partial_3 a_3 \end{pmatrix}.$$

Notar que el índice de la variable espacial respecto de la que se deriva corresponde al índice de filas en la representación matricial. Asimismo, conviene observar también que la operación gradiente incrementa (en una unidad) el rango de la expresión sobre la que opera, es decir: el gradiente de un campo escalar es un vector; y el gradiente de un vector (campo vectorial) es un tensor de rango 2.

7.4. Divergencia de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$

La divergencia de un campo vectorial se escribe como

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \partial_i a_i = b,$$

teniendo en cuenta que el resultado de esta operación vectorial es un escalar (tensor de rango 0) dado, por b.
En este caso, en oposición al caso del gradiente, vemos que la operación divergencia tiene el efecto de reducir (en una unidad) el rango de la expresión sobre la que opera. Consistentemente, considerar la divergencia de un escalar carece de significado.

7.5. Rotor de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$

El rotor de un campo vectorial se escribe como

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} = \epsilon_{ijk} \partial_j a_k = b_i,$$

siendo que la magnitud a la derecha de la igualdad es un vector (tiene rango igual a 1).
En contraposición a los dos casos considerados anteriormente, el rotor es una operación vectorial que no cambia el rango de la expresión sobre la cual opera.

7.6. Laplaciano de un campo vectorial $\vec{a}(\vec{x}, t)$

El laplaciano de un campo vectorial se calcula mediante:

$$\nabla^2 \vec{a} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \vec{a} \right) = \partial_i \partial_i a_j = b_j,$$

con lo cual el laplaciano de un campo vectorial es también un campo vectorial.

8. Acerca del orden de los términos en expresiones que involucran operadores diferenciales

En general, la notación indicial presentada en este apunte se emplea para representar cantidades vectoriales (y tensoriales) en términos de sus componentes escalares. Por ejemplo, a_i es la i-ésima componente del vector $\vec{a}$; por lo que a_i constituye una colección de tres cantidades escalares que, colectivamente, representan un vector.
Dado que la notación indicial representa cantidades de todo rango en término de sus componentes escalares individuales, el orden en el que esos términos se escriben dentro de las expresiones resulta usualmente irrelevante. En este sentido, la notación indicial difiere de la vectorial, en la cual el orden de los términos en una expresión resulta importante. Una excepción a esta característica, y que resulta extremadamente importante, está vinculada con el rol particular que tienen los operadores diferenciales (tales como la divergencia, el rotor, etc.). En particular, conviene recordar que las reglas del cálculo (la regla de la cadena, del producto, etc.) siguen siendo válidas en el contexto de la notación indicial.
Esto significa, por ejemplo, que sigue valiendo la regla del producto:

$$\partial_k (a_i b_j) = a_i \partial_k b_j + b_j \partial_k a_i.$$

Asimismo, las expresiones $\vec{\nabla} \cdot \vec{a}$ y $\vec{a} \cdot \vec{\nabla}$, si bien ambas son correctas, representan objetos matemáticos distintos (es decir, no vale la igualdad entre ellos). Es decir, en el caso de operadores diferenciales, el orden resulta importante incluso en la notación indicial. Observemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \partial_i a_i = \frac{\partial a_1}{\partial_1} + \frac{\partial a_2}{\partial_2} + \frac{\partial a_3}{\partial_3}$$

representa a un escalar. Por otro lado,

$$\vec{a} \cdot \vec{\nabla} = a_i \partial_i = a_1 \frac{\partial}{\partial_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial_3},$$

que es un **operador**. Por lo tanto

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} = \partial_i a_i \neq a_i \partial_i = \vec{a} \cdot \vec{\nabla}.$$