Método de Milne-Thomson

Pablo Cobelli

1 Acerca del método

Este método, debido a Milne-Thomson, se emplea para construir una función holomorfa $f(z)$ de variable compleja z, cuando se conoce su parte real o su parte imaginaria (pero no ambas, claro).

Si representamos con i la unidad compleja y x e y son dos números reales, la función holomorfa $f(z)$ puede escribirse en la forma:

$$f(z) = f(x + iy) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = \phi + i\psi. \tag{1}$$

Observemos que podemos reescribir x e y en términos de z y de su complejo conjugado, z^*, mediante las expresiones usuales

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \tag{2}$$

$$y = \frac{z - z^*}{2i}, \tag{3}$$

por lo que

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) = \phi\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right) + i\psi\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right), \tag{4}$$

donde el lado izquierdo señala el hecho de que nuestra función es holomorfa y sólo depende de z. Ahora podemos elegir los valores particulares: $x = z$ e $y = 0$, que corresponden a considerar $z^* = z$. Reemplazando estos valores en la última expresión, obtenemos

$$f(z) = \phi(z, 0) + i\psi(z, 0). \tag{5}$$

Ahora bien, supongamos que conocemos la parte imaginaria de nuestra función $f(z)$; es decir, ψ resulta dato. Dado que $f(z)$ es holomorfa, sabemos que ϕ y ψ satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann, por lo que:

$$f'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial x} + i\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} + i\frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{6}$$

La última igualdad resulta particularmente apta para nuestros propósitos dado que hemos supuesto que ψ es dato y que ϕ es desconocida. Si identificamos con

$$Q_1 = Q_1(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial y} \tag{7}$$

$$Q_2 = Q_2(x, y) = \frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{8}$$

podemos reescribir

$$f'(z) = f'(x + iy) = Q_1(x, y) + iQ_2(x, y). \tag{9}$$

Pero entonces, como $f(z)$ es holomorfa también lo es su derivada (es, por definición, infinitamente diferenciable), por lo que podemos escribir,

$$f'(z) = Q_1(z, 0) + iQ_2(z, 0). \tag{10}$$

Ahora podemos integrar esta expresión para obtener $f(z)$:

$$f(z) = \int Q_1(z,0)\, dz + i \int Q_2(z,0)\, dz + \text{constante}. \tag{11}$$

Notar que hemos obtenido la función completa $f(z)$ con el único conocimiento de su parte imaginaria y del hecho de que sabemos que es holomorfa. También podríamos haberlo logrado (es un buen ejercicio intentar demostrar esto!) si hubieramos considerado que ϕ era dato y ψ es desconocida.

2 Un caso sencillo de aplicación a flujos potenciales bidimensionales planos

En flujos potenciales bidimensionales planos, la identificación es inmediata: $f(z)$ será el potencial complejo, que simbolizamos aquí mediante $w(z)$, mientras que ϕ y ψ serán la función potencial de velocidades y la función corriente, respectivamente.

A partir de considerar el campo de velocidades más general asociado a una fuente lineal de caudal constante Q, se obtiene que la función corriente asociada adopta la forma:

$$\psi(r,\theta) = \frac{Q}{2\pi}\theta - \frac{\Gamma}{2\pi}\log(r), \tag{12}$$

siendo r y θ las variables polares usuales y $\Gamma > 0$ una circulación arbitraria. Veamos entonces, a modo de aplicación, que a partir de esta expresión, y usando el método de Milne-Thomson que acabamos de describir, resulta muy fácil llegar a la forma completa del potencial complejo asociado.

En el caso de las coordenadas polares que tenemos, recordemos que podemos adaptar el argumento anterior usando:

$$r = \sqrt{zz^*}, \tag{13}$$

$$\theta = \frac{1}{2}\left(\arg z - \arg z^*\right). \tag{14}$$

Vale entonces que

$$w(z) = w\left(re^{i\theta}\right) = w(r,\theta) = \phi\left(\sqrt{zz^*}, \frac{1}{2}\left[\arg z - \arg z^*\right]\right) + i\psi\left(\sqrt{zz^*}, \frac{1}{2}\left[\arg z - \arg z^*\right]\right). \tag{15}$$

Nuevamente, eligiendo $z = z^*$, tenemos

$$w(z) = \phi(z,0) + i\psi(z,0). \tag{16}$$

Ahora bien, la derivada del potencial complejo puede escribirse como

$$w'(z) = \frac{\partial\phi}{\partial r} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + i\frac{\partial\psi}{\partial r} = Q_1(r,\theta) + iQ_2(r,\theta). \tag{17}$$

donde hemos usado ya una condición de Cauchy-Riemann para reexpresar la derivada parcial de ϕ –desconocida– en términos de una derivada parcial de ψ, e introdujimos implícitamente las definiciones de $Q_1(r,\theta)$ y $Q_2(r,\theta)$.

De forma completamente análoga a lo que mostramos en la sección precedente, tenemos ahora

$$w'(z) = Q_1(z,0) + iQ_2(z,0), \tag{18}$$

por lo que el potencial que buscamos debe escribirse según la ecuación (11). Notemos además que, a los efectos del cálculo del potencial complejo $w(z)$, la constante en dicha expresión resulta prescindible. Entonces tenemos:

$$Q_1 = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{1}{r}\frac{Q}{2\pi}, \tag{19}$$

$$Q_2 = -\frac{1}{r}\frac{\Gamma}{2\pi}. \tag{20}$$

Luego el potencial complejo de esta configuración de fuente de caudal lineal Q con circulación Γ resulta:

$$\begin{aligned} w(z) &= \int Q_1(z,0)\,dz + i\int Q_2(z,0)\,dz = \\ &= \int \frac{1}{z}\frac{Q}{2\pi}\,dz + i\int\left(-\frac{1}{z}\frac{\Gamma}{2\pi}\right)dz = \\ &= \left(\frac{Q}{2\pi} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\right)\int z^{-1}\,dz = \\ &= \left(\frac{Q}{2\pi} - i\frac{\Gamma}{2\pi}\right)\log z, \end{aligned}$$

definido a menos de una constante.