Flujos planos potenciales: solución general

Pablo Cobelli

1 Lo que vimos en clase

En clase vimos que tanto el potencial de velocidades ϕ como la función corriente ψ satisfacen la ecuación de Laplace en el plano $x-y$. En la sección que sigue vamos a calcular la solución general a dicha ecuación en el plano.

2 Solución general a la ecuación de Laplace en el plano en coordenadas cilíndricas

Consideramos entonces la ecuación de Laplace en el plano para la función $\phi(r,\theta)$, dada por

$$\nabla^2\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0. \tag{1}$$

Vamos a buscar soluciones no triviales de esta ecuación, representadas por el producto $\phi(r,\theta) = R(r)T(\theta)$. Esta estrategia de solución de ecuaciones en derivadas parciales se conoce comúnmente como método de separación de variables. Sustituyendo esa prescripción en la ecuación de Laplace, obtenemos

$$R''(r)\,T(\theta) + \frac{1}{r}R'(r)\,T(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\,T''(\theta) = 0, \tag{2}$$

y multiplicando por $r^2R(r)^{-1}T(\theta)^{-1}$ llegamos a

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} + \frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = 0. \tag{3}$$

Separando los términos con dependencia en cada variable independiente individual (r y θ) a ambos lados de la igualdad, tenemos

$$\frac{r^2R''(r)}{R(r)} + \frac{rR'(r)}{R(r)} = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \lambda, \tag{4}$$

donde λ debe ser una constante.

Obtenemos entonces dos ecuaciones parciales ordinarias para cada una de las funciones incógnitas $R(r)$ y $T(\theta)$:

$$r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0, \tag{5}$$

$$T''(\theta) + \lambda T(\theta) = 0. \tag{6}$$

Queremos soluciones que sean periódicas en θ, por lo cual $T(\theta) = T(\theta+2\pi)$, que lleva al llamado problema de Sturm-Liouville para la función $T(\theta)$. Dado que la ecuación diferencial tiene solución periódica sólo cuando la constante λ es no negativa, resulta

$$T(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta, \qquad \text{si } \lambda > 0, \tag{7}$$

$$T(\theta) = A + B\theta, \qquad \text{si } \lambda = 0. \tag{8}$$

La condición $\lambda > 0$ y la de periodicidad de la función $T(\theta)$ implican entonces que λ es un entero. Entonces obtenemos una secuencia de autovalores $\lambda = n^2$, con $n = 0, 1, 2, \ldots$; y las autofunciones asociadas:

$$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

$$T_n(\theta) = A_0, \qquad \text{para } n = 0, \tag{10}$$

con A_n y B_n constantes arbitrarias a determinarse a partir de condiciones de contorno específicas a la situación que estemos considerando. Notemos que las últimas dos ecuaciones se pueden combinar en una sola de la forma

$$T_n(\theta) = A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta, \qquad \text{para } n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{11}$$

Sustituyendo el valor de λ en la ecuación diferencial para la función radial, obtenemos

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - n^2 R(r) = 0. \tag{12}$$

A esta última expresión se la conoce como ecuación de Cauchy-Euler. Se trata de una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes variables. Buscamos su solución en la forma de una potencia genérica de r, es decir $R(r) = r^\alpha$. Al sustituir este nuevo ansatz en la ecuación para $R(r)$, se obtiene

$$\alpha(\alpha - 1) + \alpha - n^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - n^2 = 0. \tag{13}$$

Tenemos entonces dos soluciones distintas, correspondientes a $\alpha = \pm n$ con n positivo, y una raíz doble para $\alpha = 0$ cuando n se anula. En estas condiciones, obtenemos la solución general para la ecuación de Cauchy-Euler radial dada por las formas

$$R_0(r) = C_0 + D_0 \log r, \qquad \text{para } n = 0, \tag{14}$$

$$R_n(r) = C_n r^n + D_n r^{-n}, \qquad \text{para } n = 1, 2, \ldots. \tag{15}$$

Concluimos entonces que la solución más general a la ecuación de Laplace en el plano será la suma de las soluciones que encontramos para todas las constantes de separación λ, es decir:

$$\phi(r, \theta) = C_0 + D_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right] \left(C_n r^n + D_n r^{-n}\right). \tag{16}$$

Por practicidad, reescribamos esta solución en la forma

$$\phi(r, \theta) = A_0 + B_0 \log r + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta\right) + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} \left(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta\right), \tag{17}$$

donde hemos redefinido adecuadamente los coeficientes A_0, B_0, y A_n, B_n, C_n y D_n para $n \geq 1$.

3 Respecto de esta solución general

En la sección anterior obtuvimos soluciones a la ecuación de Laplace en el plano mediante la técnica de separación de variables. Las soluciones así obtenidas son una base para las soluciones posibles en dicho dominio; de forma que es posible generar cualquier solucion general (siempre que se adecúe a las condiciones de contorno) combinando estas soluciones individuales. Más aún, dado que la ecuación de Laplace es lineal, cualquier combinación lineal de las soluciones obtenidas por separación de variables es también solución.

4 Interpretación física de esta solución general

4.1 Campo de velocidades a partir del potencial de velocidades

Recordemos que el campo de velocidades $\mathbf{u}$ se calcula a partir del gradiente del potencial de velocidades ϕ. De acuerdo a esto, la componente radial del campo resulta:

$$u_r(r,\theta) = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{B_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} n \left[r^{n-1} \left(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right) - \frac{1}{r^{n+1}} \left(C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \right) \right]. \tag{18}$$

4.2 Generalidades sobre los términos de la solución general

En la solución general dada por (17) para el potencial, tenemos términos de diferente tipo. Por un lado, tenemos términos que divergen en el origen (proporcionales a $\log r$ o a r^{-n}, con $n \geq 1$) y son suaves o se anulan en el infinito. Representan entonces singularidades localizadas, vistas desde lejos. Este tipo de descripciones se conocen como *de campo lejano*. Por el otro, tenemos términos que divergen en el infinito pero que son regulares en el origen, con dependencia del tipo r^n, para $n \geq 1$. Estos se interpretan como efectos que provienen de condiciones en el infinito, en una frontera lejana (o en regiones suficientemente alejadas) y que se observan en proximidad.

En las subsecciones siguientes vamos a analizar algunos términos de esta solución general, separándolos por su dependencia espacial con la coordenada radial, a fin de atribuirles una interpretación física tangible.

4.3 Término con $\phi \propto \log r$, es decir $u_r \propto r^{-1}$

El término que en el potencial de velocidades tiene una dependencia logarítmica con el radio resulta en un término de tipo $1/r$ en la componente radial de campo de velocidades. Corresponde entonces a un flujo radial dirigido hacia afuera (fuente) o hacia adentro (sumidero) de acuerdo al signo de B_0, y cuya magnitud decrece con la distancia al origen (que pensamos como la ubicación de la singularidad que lo genera). Incluso podemos vincular B_0 con el flujo total Q que atraviesa un círculo de radio r alrededor del origen:

$$Q = \int_0^{2\pi} u_r(r,\theta)\ r d\theta = 2\pi B_0. \tag{19}$$

Una pregunta interesante que cabría hacerse en este punto es: por qué razón el campo vectorial de velocidades de una fuente (o sumidero) tiene, en este caso, una dependencia con el radio de tipo r^{-1}, mientras que en el caso electrostático una carga puntual tiene un campo $\mathbf{E}$ que decae como r^{-2}? A qué se debe la diferencia (de un orden) entre ambos exponentes?

4.4 Términos con $\phi \propto r^{-1}$, es decir $u_r \propto r^{-2}$

En el potencial de velocidades, estos términos aparecen como

$$\phi_{\text{dip}}(r,\theta) = \frac{1}{r} \left(C_1 \cos\theta + D_1 \sin\theta \right), \tag{20}$$

y en la componente radial del campo de velocidades se manifiestan con una dependencia radial tipo r^{-2} de la forma

$$u_r(r,\theta) = \frac{\partial \phi_{\text{dip}}}{\partial r} = -\frac{1}{r^2} \left(C_1 \cos\theta + D_1 \sin\theta \right). \tag{21}$$

Cada uno de estos dos términos corresponde a la componente radial del campo de velocidades de un dipolo con momento dipolar orientado en $\hat{x}$ (el primero) y en $\hat{y}$ (el segundo). Dicho de otra forma, podemos reescribir el potencial de velocidades en coordenadas cartesianas como

$$\phi_{\text{dip}}(x,y) = \frac{1}{r^2} \left(C_1 r \cos\theta + D_1 r \sin\theta \right) = \frac{\mathbf{d} \cdot \mathbf{x}}{r^2}, \tag{22}$$

siendo $r^2 = x^2 + y^2$ el cuadrado de la distancia a la singularidad (supuesta en el origen), $\mathbf{d} = (C_1, D_1)$ el momento dipolar de la singularidad y $\mathbf{x} = (x,y)$ el vector posición cartesiano en el plano.

4.4.1 Términos con $\phi \propto r^{-2}$, es decir $u_r \propto r^{-3}$

Estos términos representan el cuadrupolo de la expansión multipolar. Observemos que en coordenadas cartesianas podemos reescribir el coseno y el seno del ángulo doble mediante las relaciones

$$\cos 2\theta = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \sin 2\theta = \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

de forma que el término en cuestión resulta

$$\phi_{\text{cuad}}(x, y) = \frac{1}{r^4}\left[C_2\left(x^2 - y^2\right) + 2D_2 xy\right]. \tag{23}$$

Observemos que el término $x^2 - y^2$ distingue la orientación en $\hat{x}$ o $\hat{y}$ según el signo, mientras que xy tiene simetría diagonal (es positivo en cuadrantes I y III, y negativo en los cuadrantes II y IV).

En 2D, el momento cuadrupolar se puede representar como un tensor simétrico de traza nula, que simbolizaremos en este apartado Q (no confundir con un caudal),

$$Q = \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{xy} & -Q_{xx} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

cuyo número de componentes independientes es 2; en coincidencia con la cantidad de coeficientes libres de la solución general a este orden: C_2 y D_2. En este caso, resulta sencillo identificar las componentes del tensor como $Q_{xx} = C_2$ y $Q_{xy} = D_2$. En notación vectorial, este potencial se escribe como

$$\phi_{\text{cuad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{|\mathbf{r}|^4}\mathbf{r}^T Q\,\mathbf{r}, \tag{25}$$

equivalente a

$$\phi_{\text{cuad}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^4} Q_{ij} r_i r_j \tag{26}$$

en notación indicial.

4.5 Términos con $\phi \propto r^1$, es decir $u_r \propto r^0$

Estudiamos ahora la contribución de los términos que en el potencial de velocidades son lineales en r. Estos corresponden a términos sin dependencia radial en la componente u_r del campo de velocidades. En el potencial vienen dados por

$$\phi_{\text{lin}}(r, \theta) = A_1 r \cos\theta + B_1 r \sin\theta, \tag{27}$$

pero puesto que $r\cos\theta = x$ y $r\sin\theta = y$, esta contribución corresponde a

$$\phi_{\text{lin}}(x, y) = A_1 x + B_1 y, \tag{28}$$

cuyo gradiente resulta en

$$\mathbf{u} = \nabla\phi_{\text{lin}} = A_1\,\hat{x} + B_1\,\hat{y}, \tag{29}$$

que representa un flujo uniforme al infinito con velocidad y dirección constantes, determinadas ambas por los coeficientes A_1 y B_1 (no respectivamente).

4.6 Términos con $\phi \propto r^n$, es decir $u_r \propto r^{n-1}$ con $n \geq 2$

Observemos que los términos de la forma r^n con $n \geq 2$ en (17) corresponden a términos con r a potencias enteras superiores o iguales a 1 en la componente radial del campo de velocidades. Son, por lo tanto, términos regulares en el origen, que crecen con r y, por lo tanto, divergen en el infinito. No representan fuentes puntuales sino los efectos de fuentes extensas vistas *en campo cercano*. En particular, todos los términos con $n \geq 2$ presentan un punto de estancamiento en el origen y una estructura angular no trivial.

4.7 Términos proporcionales a θ en los potenciales ϕ y ψ

Notemos que la solución general para la ecuación de Laplace no posee términos proporcionales a θ, con lo cuál *a priori* no podemos construir el término asociado al vórtice en ϕ, ni el correspondiente a la fuente en ψ. Esto sucede porque al restringirnos a funciones $T(\theta)$ periódicas, estamos dejando fuera la función multivaluada $T(\theta) \propto \theta$, que sí es solución a la ecuación de Laplace.

Esos términos aparecen naturalmente cuando imponemos las condiciones de Cauchy-Riemann sobre nuestro potencial de trabajo. Supongamos entonces que trabajamos con el término

$$\phi(r, \theta) = B_0 \log r. \tag{30}$$

Una de las condiciones de Cauchy-Riemann establece que

$$\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} \Rightarrow \psi = B_0 \theta + f(r), \tag{31}$$

donde $f(r)$ es una función sólo de la variable r. La segunda condición de Cauchy-Riemann determina que

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \Rightarrow f'(r) = 0. \tag{32}$$

El potencial complejo completo $W(z)$ para este término resulta entonces

$$W(z) = \phi + i\psi = B_0 (\log r + i\theta) = B_0 \log z, \tag{33}$$

y corresponde, como dijimos, a una fuente de caudal $Q = 2\pi B_0$ ubicada en el origen.

Para ψ, la función corriente, podemos repetir este argumento *mutatis mutandis* y obtendremos así, a partir de su ecuación de Laplace, el potencial complejo para el vórtice:

$$W(z) = -iB_0 \log z, \tag{34}$$

donde la circulación del vórtice (por definición positiva en sentido antihorario en el plano) es $\Gamma = 2\pi B_0$.

Por último, observemos que incorporar una solución multivaluada al potencial (como hemos hecho en los párrafos precedentes con ϕ y ψ) no representa un inconveniente porque, recordemos, el único requisito físico que tenemos es que el campo de velocidades sea univaluado.

5 Construcción de los potenciales complejos a partir de los potenciales ϕ o ψ

Desde el punto de vista matemático, los potenciales ϕ y ψ son funciones de variables reales (x, y). Decimos que ϕ tiene una función conjugada ψ si y sólo si ambas son respectivamente las partes real e imaginaria de una función holomorfa de variable compleja. Una consecuencia de este hecho es que ambas funciones resultan armónicas en el dominio; lo que ya hemos explotado para encontrar una solución general para ϕ. Hablamos entonces de conjugadas armónicas. Además, cuando la conjugada existe, la misma es única a menos de una constante aditiva.

Para hallar la función holomorfa $W(z)$ cuya parte real (o imaginaria) es dato, como es el caso en este apunte, existe una técnica denominada método de Milne-Thompson. A quienes tengan interés en conocerlo, les recomendamos leer el apunte que publicamos en el sitio web de la materia.