

Arrastre sobre esfera via analisis dimensional

May 31, 2025

1 Arrastre sobre una esfera empleando análisis dimensional

Pablo Cobelli - Departamento de Física, FCEN-UBA, Argentina.
Estructura de la Materia 1 - *Última actualización: Mayo de 2025.*

1.1 Qué implica resolver el problema del arrastre

En este apunte vamos a discutir como es posible calcular la fuerza de arrastre (o *drag*) sobre una esfera que se mueve a velocidad constante en el seno de un fluido viscoso. Antes de comenzar, quería discutir brevemente qué significa *resolver* este problema, o bien, qué esfuerzo implicaría resolver este problema analíticamente sin recurrir a las herramientas del análisis dimensional.

En primer lugar, deberíamos plantear la ecuación de Navier-Stokes para el flujo (que asumiremos newtoniano e incompresible), es decir:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p + \nu \nabla^2 \vec{u},$$

junto con la ecuación de conservación de masa, que para este fluido incompresible implica simplemente

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0.$$

Recordemos entonces algo que ya mencionamos en clase acerca de la dificultad de obtener soluciones a estas ecuaciones. Ellas forman un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, en el cual tres de ellas (las tres componentes de Navier-Stokes) son no lineales. Más aún, las cuatro ecuaciones están acopladas; nuestras incógnicas (u_x, u_y, u_z, p) aparecen en más de una ecuación. En breve: tenemos un sistema de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales no lineales y acopladas.

Una solución cualquiera a este sistema debe además satisfacer las condiciones de borde (espaciales y temporales) impuestas por los contornos que el problema tenga. En el caso que nos ocupará en este apunte, será la superficie de contacto entre la esfera y el fluido. A medida que la esfera se mueve, las condiciones de borde cambian. Luego debemos saber como se mueve el objeto para determinar donde imponer las condiciones de contorno. Pero, hasta que no conozcamos las condiciones de borde, no podemos determinar el movimiento (ni del fluido ni del objeto). Este acoplamiento entre

la solución y las condiciones de borde del problema constituye la mayor dificultad del problema cuando buscamos un resultado analítico.

Por estas razones resulta aconsejable, cada vez que sea posible, abordar el problema mediante el análisis dimensional, lo que haremos en las próximas líneas.

1.2 Análisis dimensional

Comencemos entonces por deteminar las variables relevantes al problema. Por un lado, sabemos que la esfera de radio R se está moviendo en un fluido newtoniano de densidad ρ_{fl} y viscosidad dinámica μ , en línea recta y con una rapidez u . Esperamos que, debido a los efectos de las partículas de fluido, la esfera sienta a su paso una fuerza de arrastre F_D que tienda a impedir su movimiento. Es esta fuerza cuya dependencia funcional buscamos determinar, con lo cuál la incluimos entre los parámetros de nuestro análisis dimensional.

Por un lado, tenemos los parámetros que corresponden a propiedades del fluido: su densidad ρ_{fl} y su viscosidad dinámica μ . Por el otro, tenemos los asociados a la esfera: su radio R y su velocidad u . Finalmente, tenemos la fuerza de arrastre F_D que resulta de la interacción entre el fluido y el objeto.

Observemos que en esta lista podríamos considerar la viscosidad cinemática ν en lugar de la dinámica μ . Después de todo, la viscosidad dinámica contiene ya a la densidad másica del fluido. Además, según vimos al considerar el primer problema de Stokes, ν resulta físicamente un parámetro ligeramente más significativo, dado que corresponde a la constante de difusión (difusividad) del impulso lineal del fluido. Tomaremos entonces ν en lugar de μ en nuestra lista de parámetros.

El siguiente paso consiste entonces en encontrar los grupos adimensionales del problema. Según el teorema Pi, con 5 magnitudes (ρ_{fl}, ν, u, R y F_D) y 3 dimensiones independientes (L, M y T), podemos *armar* 2 grupos adimensionales, esto es, dos números Π .

Comencemos por construir el primero de ellos. Dado que el flujo es viscoso y tiene ya escalas de velocidad y de longitud características definidas, resulta natural que uno de estos grupos adimensionales sea el número de Reynolds, Re :

$$\Pi_1 = Re = \frac{uR}{\nu}.$$

Observemos que este primer número adimensional no incluye al parámetro F_D . Resulta entonces evidente que el segundo número adimensional, Π_2 , debe incorporarlo. Ahora bien, si Π_2 contiene a F_D , dicho número deberá también contener a ρ_{fl} , dado que F_D contiene dimensiones de masa [M] que no están presentes en ninguno de los demás parámetros de la lista.

Dado que buscamos determinar la dependencia funcional de F_D , proponemos (por comodidad) que F_D aparezca en el numerador de Π_2 y a la potencia unidad. Ahora bien, para anular las dimensiones de masa que incorpora F_D , debemos dividirlo por ρ_{fl} . Ese cociente tiene dimensiones de

$$\left[\frac{F_D}{\rho_{fl}} \right] = \left[\left(\frac{\text{M L}}{\text{T}^2} \right) \left(\frac{\text{L}^3}{\text{M}} \right) \right] = \left[\frac{\text{L}^4}{\text{T}^2} \right].$$

Con los parámetros que tenemos, podemos adimensionalizar este cociente dividiéndolo por ν^2 . Es decir que podemos definir

$$\Pi_2 = \frac{F_D}{\rho_{fl}\nu^2},$$

como nuestro segundo (y último) grupo adimensional. Sin embargo esta elección, **aunque es perfectamente válida, tiene un defecto**: ν ya aparece en el primer número adimensional. Si bien este hecho no representa *a priori* ningún inconveniente en el caso general, en este caso puede verse que sí. Vamos a continuar por un momento con esta línea de razonamiento para hacer evidente la naturaleza de este inconveniente.

El teorema Pi nos dice que estos dos números adimensionales se relacionan mediante

$$\Pi_2 = f(\Pi_1),$$

es decir,

$$\frac{F_D}{\rho_{fl}\nu^2} = f\left(\frac{uR}{\nu}\right),$$

o bien

$$F_D = \rho_{fl}\nu^2 f\left(\frac{uR}{\nu}\right),$$

siendo $f(\cdot)$ una función adimensional. Consideremos ahora, empleando el resultado de este análisis, el caso de flujo a alto número de Reynolds. Sabemos que el número de Reynolds surge de comparar el peso relativo de los términos convectivo y viscoso en la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u}}{\nu \vec{\nabla}^2 \vec{u}} \approx \frac{U^2 L^{-1}}{\nu U L^{-2}} = \frac{UL}{\nu} = Re,$$

con lo cual resulta esperable que en flujos viscosos a número de Reynolds elevados (también llamados, *flujos turbulentos*) la dinámica esté dominada por el término de inercia y no por el viscoso (que sí resulta dominante en el límite inverso). A su vez, esto implica que a elevado número de Reynolds, ν resulta un parámetro irrelevante para la dinámica.

Esto significa que, para determinar F_D en este límite podríamos basarnos en nuestro resultado para el caso general, pero descartando ν de nuestra lista, lo que corresponde a eliminar los grupos adimensionales en los que ese parámetro interviene. Ahora bien, con el resultado que tenemos en términos de los números adimensionales que construimos, descartar ν implica descartar ambos números adimensionales. Y nos fuerza a recomenzar de cero el análisis dimensional para este caso particular.

Sin embargo, lo que desearíamos es obtener, a partir del análisis dimensional del caso general, un resultado que nos sirva para ambos regímenes (alto y bajo número de Reynolds); que los contenga

como casos particulares. Como este no es el caso, renunciamos entonces a la forma de Π_2 que propusimos y que contiene a ν .

Observamos que la única forma alternativa de generar un segundo número adimensional partiendo del cociente F_D/ρ_{fl} es

$$\Pi_2 = \frac{F_D}{\rho_{fl}R^2u^2}.$$

Poder interpretar sencillamente el significado del número de Reynolds (como cociente de ciertos términos en la ecuación de Navier-Stokes) nos permite intuir físicamente su significado. Sin embargo, en este caso la interpretación de este número adimensional no parece *a primera vista* evidente. Tratemos de pensar cómo interpretarlo. Una buena pista para comenzar es observar que Π_2 es un cociente de fuerzas.

Imaginemos que en su movimiento la esfera cubre una distancia d . El trabajo que realiza la esfera en su movimiento viene dado por el producto $F_D d$. Notemos que si multiplicamos por d el denominador, obtenemos

$$\rho_{fl}R^2u^2d,$$

que también tiene unidades de energía, y la forma particular de una energía cinética (a menos de un coeficiente adimensional igual a 1/2). Luego Π_2 puede interpretarse como:

$$\Pi_2 = \frac{F_D d}{\rho_{fl}R^2u^2d} \propto \frac{\text{trabajo realizado por la esfera contra la fuerza de arrastre}}{\text{energía cinética entregada al fluido}}.$$

Más adelante volveremos sobre esta interpretación para chequear su consistencia en función de los resultados que obtengamos para la fuerza de arrastre.

Habiendo entonces obtenido los dos grupos (números) adimensionales, el teorema Pi nos permite afirmar que

$$\frac{F_D}{\rho_{fl}R^2u^2} = f\left(\frac{uR}{\nu}\right),$$

o bien que la fuerza de arrastre resulta

$$F_D = \rho_{fl}R^2u^2 f\left(\frac{uR}{\nu}\right),$$

siendo $f(\cdot)$ una función adimensional. Es una función que toma un número adimensional y nos dá como resultado otro número adimensional. Asimismo, y como vimos en las clases, f es una función universal, lo que significa que es la misma función para esferas de cualquier tamaño, y para fluidos de cualquier densidad y viscosidad. A pesar de que f depende de ρ_{fl} , R , ν y u , depende de ellos únicamente a través de una combinación particular de ellos: el número de Reynolds.

Ahora bien, el análisis dimensional nos dio la dependencia funcional, pero nada puede decirnos acerca de la forma funcional de f . Para ello, vamos a considerar los dos casos extremos (y mutuamente excluyentes) de flujos viscosos a bajo y alto número de Reynolds.

1.2.1 Límite de flujos viscosos a bajo número de Reynolds

Como ejemplo de este límite podemos imaginar el caso de una bolita cayendo por una columna de aceite vegetal, escenario físico que hasta hace poco se empleaba en los laboratorios de enseñanza del Departamento de Física para estudiar experimentalmente la naturaleza de la fuerza de arrastre viscoso. Sin embargo este escenario parece un poco artificial, y uno podría preguntarse legítimamente en qué situaciones *observables en la naturaleza* tienen lugar estos flujos. Lo interesante es que la misma física que determina el arrastre sobre la bolita que se mueve en el aceite es la que describe el comportamiento de las gotas de agua que conforman lo que conocemos como [niebla](#) en el aire, el movimiento de bacterias en el agua, las gotas de aceite en el [experimento de Millikan](#), entre otros.

En estos flujos, en los que el término viscoso domina la dinámica, es decir, $Re \rightarrow 0$, resulta esperable que la fuerza de arrastre provenga principalmente de las fuerzas viscosas. Sabemos que las fuerzas viscosas son proporcionales a la viscosidad, por lo que esperamos que en este límite la fuerza de arrastre resulte proporcional a ν , es decir

$$F_D \propto \nu.$$

En el resultado que obtuvimos a partir del análisis dimensional, la viscosidad (cinemática) aparece en el denominador del argumento de f :

$$F_D = \rho_{fl} R^2 u^2 f\left(\frac{uR}{\nu}\right),$$

por lo que si la fuerza de arrastre debe ser proporcional a ν , $f(Re)$ debe ser proporcional a $1/Re$. De acuerdo a esto, obtenemos:

$$F_D \propto \rho_{fl} R^2 u^2 \cdot \frac{\nu}{uR},$$

de lo que finalmente resulta que, en este límite, la fuerza de arrastre viene dada por

$$F_D = \Pi \rho_{fl} \nu u R,$$

siendo Π un factor adimensional (numérico) que no podemos calcular a partir del análisis dimensional.

[Stokes](#) fue el primero en calcular analíticamente la fuerza de arrastre sobre una esfera en este límite, y por ello la forma funcional que da dicha fuerza lleva el nombre de [ley de Stokes](#). El resultado de Stokes es:

$$F_D = 6\pi \rho_{fl} \nu u R,$$

determinación que incluye el valor para el factor numérico que el análisis dimensional no pudo darnos, y que resulta igual a 6π . Si lo desean, pueden seguir los detalles del cálculo analítico de esta fuerza en los apuntes teóricos de la materia.

1.2.2 Límite de flujos viscosos a alto número de Reynolds

Como ejemplo de este tipo de flujos en la naturaleza podemos mencionar el movimiento de las gotas de lluvia en su caída a través del aire. Esto es, siempre que asumamos que podemos aproximar la forma de dichas gotas mediante una esfera. La realidad es un poco más compleja, pero un modelo de gota de lluvia esférica resulta una buena aproximación a primer orden.

Según dijimos, la viscosidad ν que afecta a los flujos a baja velocidad, no tiene ningún influjo sobre los flujos turbulentos (a alto número de Reynolds) por lo que resulta un parámetro irrelevante para la dinámica.

Ahora bien, en el análisis dimensional que hicimos la viscosidad aparece únicamente en el primer número adimensional, el número de Reynolds. Al descartar el número de Reynolds de análisis por irrelevante para la dinámica, el único grupo adimensional que resta es Π_2 , luego el análisis dimensional nos dice que

$$\Pi_2 = \frac{F_D}{\rho_{fl} R^2 u^2},$$

es decir que la fuerza de arrastre en el límite de alto número de Reynolds resulta

$$F_D \propto \rho_{fl} R^2 u^2,$$

mediante una constante de proporcionalidad adimensional que no podemos determinar por análisis dimensional.

En este punto cabría preguntarse por qué el número de Reynolds desaparece del análisis en este caso. O, en otras palabras, por qué en el límite de altas velocidades (flujos turbulentos) el arrastre es independiente del número de Reynolds?

Para responder a esta pregunta, volvamos a la definición del número de Reynolds. Observamos que podríamos reinterpretarlo como un cociente de dos velocidades características del problema: u y ν/R . Dado que el problema tiene también definida una longitud característica, R , vamos a utilizarla para construir dos escalas temporales distintas.

La primera de ellas, surge de considerar

$$\tau_u = \frac{R}{u},$$

mientras que la segunda resulta de

$$\tau_\nu = \frac{R}{\nu/R} = \frac{R^2}{\nu}.$$

Notemos que, en estos términos, el número de Reynolds no es otra cosa que el cociente de estas escalas temporales:

$$Re = \frac{\tau_\nu}{\tau_u} = \frac{R^2/\nu}{R/u} = \frac{uR}{\nu}.$$

Interpretemos ahora físicamente estas dos escalas temporales.

La primera de ellas, τ_u representa el tiempo que le toma a un elemento de fluido en contacto con la esfera en transitar alrededor de ella. Esto resulta de observar que al rodear la esfera por un lado, una partícula de fluido hace un camino de longitud πR , que realiza a una velocidad u dado que es esa la velocidad de la esfera en movimiento. Recordemos que el análisis dimensional no puede darnos el valor de la constante adimensional π , con lo cual $\tau_u = R/u$ resulta una buena estimación de dicho tiempo de tránsito.

La segunda escala de tiempo que obtuvimos es también fácil de interpretar. Como sabemos, la viscosidad cinemática es el coeficiente de difusión del impulso lineal de los elementos de fluido. Si estimamos dimensionalmente el tiempo necesario para que el impulso lineal se difunda a una distancia R de la esfera, obtenemos que ese tiempo debe ser R^2/ν . Es decir que la segunda escala temporal que obtuvimos representa el tiempo que le toma al impulso del fluido en difundirse alrededor de la esfera que se mueve a través de él.

Y dijimos que el número de Reynolds compara estas dos escalas temporales.

Entonces vemos que si $\tau_\nu \ll \tau_u$, lo que correspondería al límite $Re \ll 1$, el impulso del fluido se difunde antes de que las partículas viajen alrededor de la esfera. La difusión del impulso tiende a equilibrar velocidades (a hacer desaparecer los gradientes de velocidad), y en el caso de bajo número de Reynolds dispone del tiempo suficiente para hacerlo mientras que la esfera se mueve a través de él. Esto implica que la difusión impide que el flujo por delante de la esfera sea muy distinto que por detrás de ella, inhibiendo la posibilidad de generar agitación en el flujo.

En el otro caso, en el cuál $\tau_\nu \gg \tau_u$, es decir, $Re \gg 1$, la difusión de impulso no tiene tiempo a ocurrir durante el pasaje de la esfera, y el fluido es libre de deformarse y presentar gradientes de velocidad importantes, dando lugar a un flujo que denominamos turbulento. Una vez que se alcanza este régimen en el que el flujo resulta turbulento, el valor de la viscosidad no afecta ya a la fuerza de arrastre, que tiene origen en otro mecanismo físico distinto de aquel que es responsable por el *drag* en el caso $Re \ll 1$.

Volvamos ahora al resultado que obtuvimos para la fuerza de arrastre en este caso. Tenemos

$$F_D = \Pi \rho_{fl} R^2 u^2,$$

siendo Π un número adimensional que no podemos determinar mediante análisis dimensional. Este es el arrastre que sufre una esfera. Cómo podríamos, empleando análisis dimensional y buen criterio físico, generalizar este resultado al caso de otros cuerpos de geometrías más complejas?

Lo primero consistiría en observar que, del cuerpo en movimiento en el seno del fluido, el parámetro que interviene en el arrastre (para $Re \gg 1$) es R^2 . A menos de una constante adimensional, R^2 es el área del cuerpo que enfrenta el flujo, por lo cuál podríamos reexpresar el *drag* como

$$F_D = \Pi' \rho_{fl} A u^2,$$

siendo A el área mencionada y Π' una constante adimensional.

A esta forma funcional es posible llegar mediante un razonamiento sencillo. Cuando un objeto se mueve una distancia d en el seno de un fluido, la masa de fluido m_{fl} que desplaza es proporcional a la sección transversal del objeto y a d , luego

$$m_{fl} = \rho_{fl} A d.$$

Si el objeto se desplazaba a una velocidad u , resulta razonable pensar que la energía cinética transferida al fluido es del orden de

$$E_{cin} \sim \frac{1}{2} m_{fl} u^2 \sim \frac{1}{2} \rho_{fl} A d u^2.$$

Si toda esta energía cinética es disipada por el arrastre, entonces la fuerza de arrastre resulta igual a E_{cin}/d , es decir

$$F_D \sim \frac{1}{2} \rho_{fl} A u^2.$$

1.2.3 Combinemos ambos límites

En las dos subsecciones precedentes logramos determinar la fuerza de arrastre en dos casos límites, correspondientes a bajo y alto número de Reynolds. Estos resultados nos permiten escribir al *drag* como una función partida:

$$F_D = \begin{cases} \alpha \rho_{fl} \nu R u, & \text{arrastre viscoso a } Re \ll 1, \\ \beta \rho_{fl} R^2 u^2, & \text{arrastre turbulento a } Re \gg 1, \end{cases} \quad (1)$$

siendo α y β dos constantes adimensionales distintas *a priori*.

Buscamos ahora escribir la fuerza de arrastre bajo una única expresión, si fuese posible. Observemos que el arrastre viscoso es proporcional al producto Ru , mientras que el arrastre turbulento es proporcional a su cuadrado. Con esto en cuenta, si multiplicamos y dividimos al arrastre viscoso por el número de Reynolds, tenemos:

$$\left(\alpha \rho_{fl} \nu R u \right) \left(\frac{uR/\nu}{Re} \right) = \alpha \frac{\rho_{fl} R^2 u^2}{Re} = \rho_{fl} R^2 u^2 \frac{\alpha}{Re}$$

Notemos entonces que α/Re es un número adimensional, por ser cociente de números adimensionales. Entonces resulta que podemos escribir

$$F_D = \rho_{fl} R^2 u^2 \times \begin{cases} \frac{\alpha}{Re}, & \text{arrastre viscoso a } Re \ll 1, \\ \beta, & \text{arrastre turbulento a } Re \gg 1, \end{cases} \quad (2)$$

con α y β constantes adimensionales. Si reescribimos esta expresión en términos del área transversal A del objeto en cuestión, e incorporamos el factor $1/2$, tenemos:

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_{fl} A^2 u^2 \times \begin{cases} \frac{\alpha'}{Re}, & \text{arrastre viscoso a } Re \ll 1, \\ \beta', & \text{arrastre turbulento a } Re \gg 1, \end{cases} \quad (3)$$

siendo, como ya sabemos, α' y β' dos constantes adimensionales. Es convencional en la comunidad de dinámica de fluidos reescribir entonces la fuerza de arrastre como

$$F_D = \frac{1}{2} C_D \rho_{fl} A^2 u^2,$$

definiendo entonces el denominador ‘coeficiente de arrastre’ (en inglés, drag coefficient) como una función adimensional del número de Reynolds y la geometría del objeto, en la forma:

$$C_D(Re) = \begin{cases} \frac{\alpha'}{Re}, & Re \ll 1, \\ \beta', & Re \gg 1. \end{cases} \quad (4)$$

La figura bajo estas líneas muestra los valores del coeficiente de arrastre para una esfera en función del número de Reynolds, obtenidos experimentalmente en un túnel de viento. *Noten que el gráfico está en escala logarítmica.*

```
[6]: from IPython.display import Image
      Image(filename='Figuras/Arrastre_Esfera_Mediciones.png', width=800)
```

[6]:

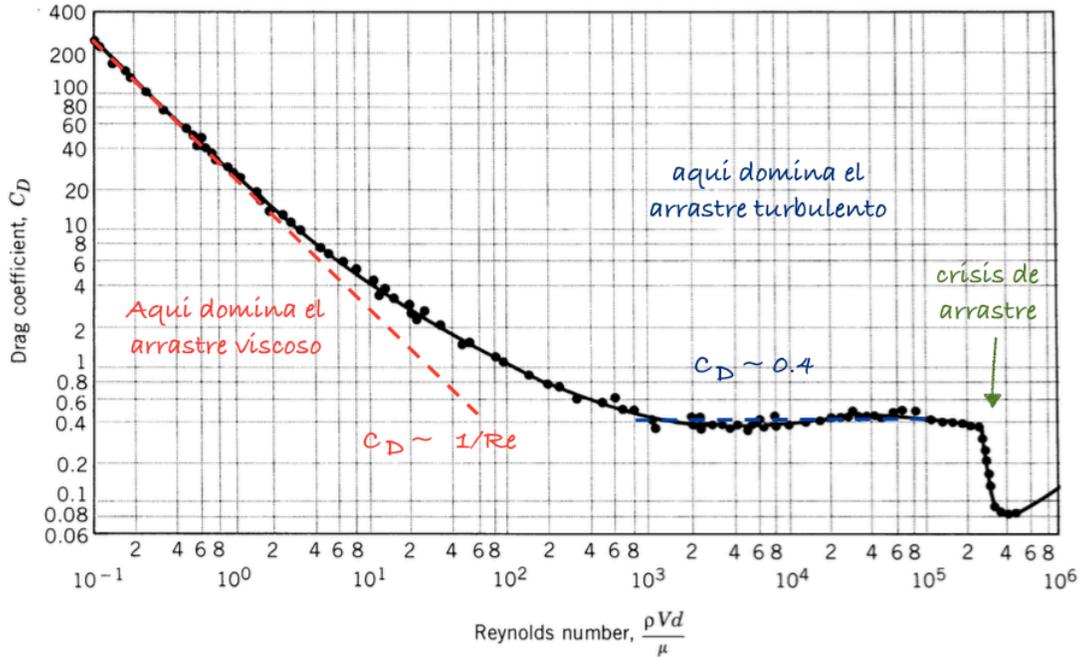


Figura 1. Coeficiente de arrastre C_D en función del número de Reynolds para una esfera lisa en representación log-log. Los puntos representan mediciones realizadas en túnel de viento; la línea continua denota un ajuste de los datos experimentales. [Figura tomada de Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley, NY, 1990.]

Como puede verse, el coeficiente de arrastre es relativamente plano en el rango de números de Reynolds entre 10^3 y 2×10^5 . En este rango, entonces, C_D puede efectivamente considerarse independiente del número de Reynolds. Superado este rango de valores, el coeficiente de arrastre cae repentinamente desde un valor de aproximadamente 0.4 a $Re \sim 2 \times 10^5$ a un valor ligeramente inferior a 0.1 a $Re \sim 4 \times 10^5$. Esta caída repentina, que se denomina ‘crisis de arrastre’ (en inglés, drag crisis), está asociada a la separación de la capa límite de la superficie de la esfera. En otras palabras, para $Re < 2 \times 10^5$ la capa límite en la parte delantera de la esfera es laminar. Esta capa límite se separa al alcanzar el ecuador de la esfera, dando lugar a una estela muy ancha y a un arrastre muy intenso. Para una esfera suave (i.e., sin rugosidad), cuando Re se incrementa más allá de 2×10^5 , la capa límite laminar sufre una transición hacia lo que se conoce como una capa límite turbulenta en la superficie frontal de la esfera. Dado que una capa límite turbulenta es más resistente a la separación de flujo, ella permanece confinada a la superficie de la esfera cubriendo más superficie que su análoga laminar. Esto resulta entonces en una estela más fina, que se corresponde con un menor arrastre.

1.2.4 Qué aprendimos de la física del drag

En esta última sección vamos a resumir e interpretar el resultado de nuestro análisis dimensional para la fuerza de arrastre sobre una esfera.

Un cuerpo que se mueve en el seno de un fluido experimenta una fuerza de arrastre, que puede

dividirse en general en dos componentes: **arrastre friccional** o **arrastre viscoso**, y **arrastre de presión** o **de forma**. El arrastre viscoso proviene de la fricción entre el fluido y las superficies sobre las cuales el fluido fluye. Esta fricción está asociada a la presencia de capas límite y, según obtuvimos, escala con la inversa del número de Reynolds. El arrastre de presión proviene de la generación de vórtices y en particular con la formación de una estela detrás del objeto. Según calculamos, este arrastre es menos sensible al número de Reynolds que el arrastre viscoso.

Notemos que, formalmente, ambos tipos de arrastre se deben a la presencia de una viscosidad no nula (si el fluido fuese invíscido, no habría arrastre alguno, es la [paradoja de d'Alembert](#) que vimos en la primera mitad del curso!). Sin embargo, la distinción entre **arrastre viscoso** y **arrastre de presión** es útil porque ambos tipos de arrastre se deben a fenómenos distintos en el flujo. El arrastre de presión resulta importante para flujos *separados* (donde se forma una estela que se separa del cuerpo), y está relacionado con la sección transversal del objeto. Por el contrario, el arrastre viscoso domina en el caso de flujos en donde no hay separación.

1.2.5 El arrastre turbulento en el deporte

El escenario físico que estudiamos en este apunte representa la situación típica en muchos deportes en los que se emplean pelotas. En la mayoría de los casos, resulta deseable que la pelota tenga un coeficiente de arrastre bajo para que pueda viajar más rápido en aire. Y lo más bajo a lo que se puede apuntar es el valor que C_D adquiere en la crisis de arrastre.

Sin embargo, y según vimos en la Fig. 1, puede suceder que la crisis de arrastre ocurra (para una pelota dada y en aire) a un número de Reynolds demasiado alto, que sea imposible de alcanzar con las velocidades a las que el hombre es capaz de lanzar la pelota. Qué se hace entonces en estos casos? En general, la solución consiste en agregar rugosidad a la superficie de la pelota en cuestión. El ejemplo paradigmático es el de las pelotas de golf, aunque los americanos también agregan rugosidad a las pelotas que emplean para baseball. La perturbación que esta rugosidad introduce en el flujo de aire alrededor de la pelota origina la transición de capa límite laminar a turbulenta, y la crisis de arrastre puede -al menos en principio- forzarse a Reynolds significativamente más bajos que 2×10^5 . Este hecho se ilustra en la Fig. 2, bajo este párrafo.

```
[5]: from IPython.display import Image
Image(filename='Figuras/Arrastre_Rugosidad.png', width=800)
```

[5]:

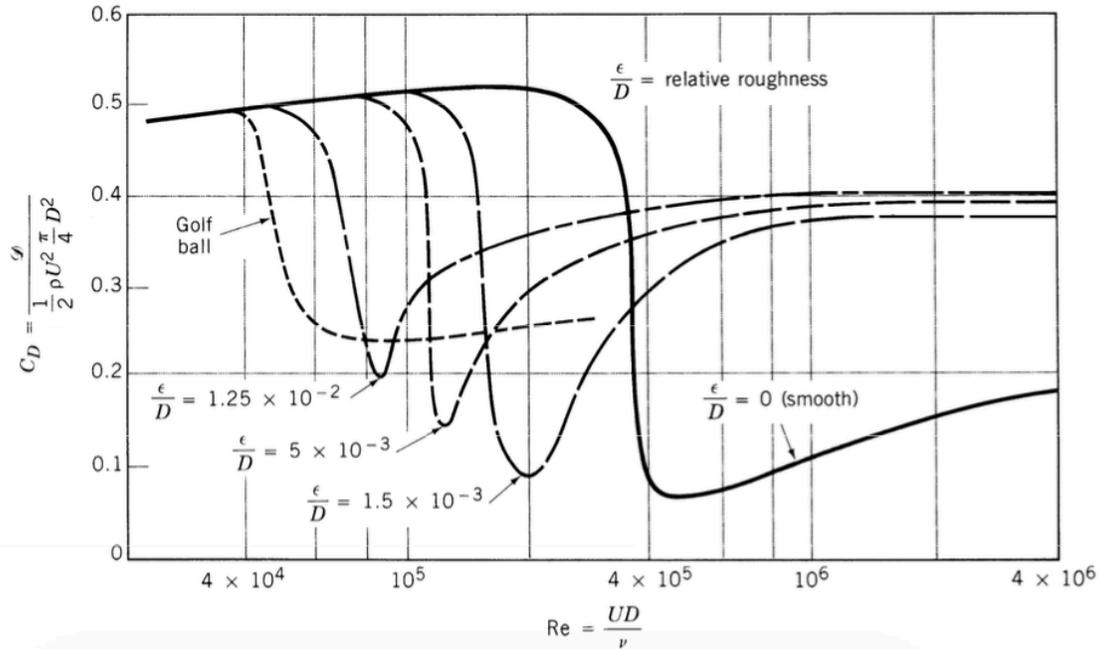


Figura 2. Coeficiente de arrastre C_D en función del número de Reynolds para esferas de diámetro D y diferentes rugosidades ϵ , en representación log-log. [Figura tomada de Munson, B. R., Young, D. F., & Okiishi, T. H., *Fundamentals of Fluid Mechanics*, Wiley, NY, 1990.]

En la Figura, las diferentes curvas corresponden a esferas con rugosidad ϵ , magnitud dimensional que se compara con el diámetro D de la esfera a fin de obtener un grupo adimensional, ϵ/D . En este caso la Figura muestra únicamente la región de valores de Re cercana a la crisis de arrastre, no el rango completo como en la Fig. 1. Se observa entonces que un leve agregado de rugosidad relativa, de valor aproximado 1×10^{-2} es capaz de reducir el valor del número de Reynolds al que tiene lugar la crisis de arrastre de 2×10^5 a 4×10^4 , casi un orden de magnitud.