Estructura de la Materia 1 – 1$^{\text{er}}$ Parcial

1$^{\text{er}}$ Cuatrimestre 2025

Problema 1

La fuerza por unidad de masa debida a un cuerpo autogravitante con simetría esférica es

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}\psi(r) \quad ,$$

siendo $\psi(r)$ el correspondiente potencial gravitatorio que verifica la ecuación de Poisson

$$\nabla^2\psi(r) = 4\pi G\rho \quad .$$

a) Haciendo un planteo hidrostático muestre que la presión $p(r)$ y la densidad $\rho(r)$ cumplen la siguiente ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G r^2\rho \quad .$$

b) Si la distribución de densidades está dada por $\rho(r) = \rho_c(1-\beta r^2)$, siendo ρ_c la densidad central, encuentre la presión central p_c en función de los parámetros ρ_c y β sabiendo que la densidad superficial es un 10% de la central y que la presión superficial es nula.

Resolución 1

a) Tomamos la ecuación básica de la hidrostática en donde los términos tienen unidades de fuerza por unidad de masa

$$\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p = \vec{F} = -\vec{\nabla}\psi(r) \quad .$$

Tenemos como dato la ecuación de Poisson que verifica el potencial gravitatorio ψ, para hacer uso de esta ecuación deberíamos hacer aparecer en la ecuación hidrostática el laplaciano de ψ, lo cual se logra tomando divergencia a ambos lados de la ecuación

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\psi(r) = -\nabla^2\psi(r) = -4\pi G\rho \quad .$$

Desarrollemos el término izquierdo

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right) = \vec{\nabla}\left(\frac{1}{\rho}\right)\cdot\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\nabla^2 p = -\frac{1}{\rho^2}\vec{\nabla}\rho\cdot\vec{\nabla}p + \frac{1}{\rho}\nabla^2 p \quad ,$$

y ahora considerando las expresiones en coordenadas esféricas para el gradiente y el laplaciano

$$\vec{\nabla}\cdot\left(\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p\right) = -\frac{1}{\rho^2}\frac{d\rho}{dr}\frac{dp}{d\rho} + \frac{1}{r^2\rho}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dp}{dr}\right) = \frac{1}{r^2\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) \quad ,$$

por lo que en definitiva

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G\rho \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{Q.E.D.} \quad \frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G r^2 \rho} \quad .$$

b) Ahora nos dicen que se conoce la distribución de presiones, $\rho(r) = \rho_c(1-\beta r^2)$ y que a partir de ello y de condiciones de contorno dadas encontremos la presión en el centro del cuerpo. Para ello usamos la ecuación diferencial obtenida en el punto **a)**

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho_c(1-\beta r^2)}\frac{dp}{dr}\right) = -4\pi G r^2 \rho_c (1-\beta r^2) \quad ,$$

e integrando una vez esta ecuación de segundo orden

$$\frac{r^2}{\rho_c(1-\beta r^2)}\frac{dp}{dr} = -4\pi G r^3 \rho_c\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{5}r^2\right) + A \quad ,$$

donde A es una constante de integración a determinar. Si denominamos R al radio del cuerpo (no es dato), podemos plantear la igualdad entre las siguientes integrales definidas

$$\int_{p(0)}^{p(R)} dp = \int_0^R \left[-4\pi G r^3 \rho_c\left(\frac{1}{3} - \frac{\beta}{5}r^2\right)\rho_c(1-\beta r^2)r^{-2} + A\rho_c(1-\beta r^2)r^{-2}\right] dr$$

Integrando de ambos lados obtenemos

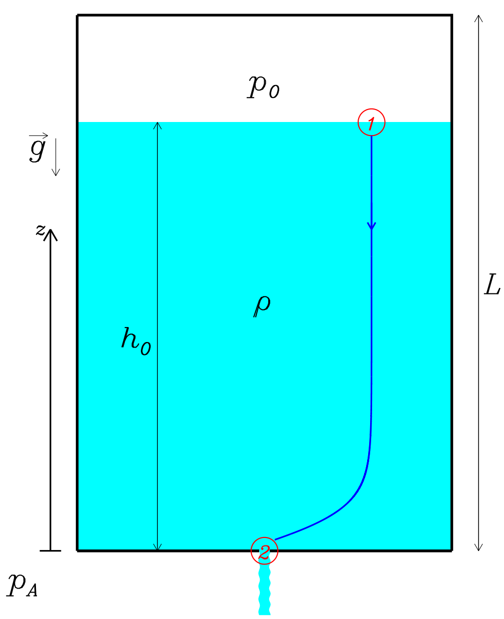
$$p(R) - p(0) = \left[-\frac{4}{3}r^2\pi G\rho_c^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2\beta}{5}r^2 + \frac{\beta^2}{10}r^4\right) - A\rho_c\left(\frac{1}{r} + \beta r\right)\right]\Bigg|_0^R \quad ,$$

de donde puede verse que por regularidad debe tenerse $A = 0$. Por otro lado recordemos las condiciones de contorno, $p(R) = 0$, $\rho(R) = \rho_c(1-\beta R^2) = 0.1\rho_c$, por lo tanto $R^2 = 0.9\rho_c/\beta$. Además, considerando que $p(0) = p_c$, se obtiene

$$-p_c = -\frac{4}{3}\pi R^2 G\rho_c^2\left(\frac{1}{2} - \frac{2\beta}{5}R^2 + \frac{\beta^2}{10}R^4\right) = -\frac{4}{3}\pi\frac{9}{10\beta}G\rho_c^2\left(\frac{1}{2} - \frac{18}{50} + \frac{81}{1000}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{Solución} \quad p_c = \frac{663\pi G\rho_c^2}{2500\beta}} \quad .$$

Problema 2



En la figura se tiene un tanque cilíndrico de sección S que se vacía por un orificio circular de área A, el proceso es cuasi-estacionario ($A \ll S$). La densidad del líquido es ρ y por encima del fluido se tiene aire **inicialmente** a presión p_0, el cual consideraremos un gas ideal que evoluciona en **forma isotérmica**. El nivel inicial del líquido es h_0 y la presión atmosférica externa es p_A.

a) Encuentre el caudal de salida Q, como función del nivel del líquido $h(t)$ (no despecie en sus cálculos la velocidad vertical de la superficie libre).

b) Halle una expresión integral para el tiempo que le lleva al líquido del tanque disminuir su altura en una cantidad d.

c) ¿Cuál es la condición que debe verificar p_0 para que el tanque se desagote completamente?

Resolución 1

a) Es obvio que este problema no es estacionario, el líquido va abandonando el tanque y distintos parámetros que caracterizan al sistema irán también cambiando con el tiempo. Se dice explícitamente que $h = h(t)$, de lo que se infiere que tanto el caudal como la presión del aire dentro del recipiente cambiarán con el tiempo. A pesar de todo lo dicho anteriormente, el enunciado dice que el proceso de vaciado del tanque es **cuasiestacionario**, por lo que podemos buscar una solución aproximada del problema considerando una situación estacionaria. Entonces planteamos el teorema de Bernoulli estacionario entre un punto en la superficie libre del líquido y otro a la salida del tanque unidos por una línea de corriente, sin olvidar que en realidad tendremos parámetros que dependen del tiempo. En el gráfico se han indicado con 1 y 2 los puntos en el fluido conectados por una eventual línea de corriente como la mostrada. Tendremos entonces

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\rho} + gz_1 = \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\rho} + gz_2 \quad .$$

En primer lugar debemos considerar que $z_1 = h(t)$, $z_2 = 0$, y que por conservación del caudal $Sv_1 = Av_2$. Además, al ser el proceso isotérmico, el aire atrapado en el tanque verifica $pV = cte$, lo que nos permitirá escribir para la presión del aire en el interior del tanque $p_1 = p_0(L - h_0)/[L - h(t)]$. Reemplazando en el teorema de Bernoulli

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_0(L - h_0)}{\rho[L - h(t)]} + gh(t) = \frac{v_1^2}{2}\frac{S^2}{A^2} + \frac{p_A}{\rho} \quad ,$$

expresión de la cual podemos despejar v_1 en función de $h(t)$, y de aquí calcular el caudal simplemente multiplicando por S

$$v_1 = A\sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\left[\frac{p_0(L-h_0)}{L-h(t)} - p_A\right] + 2gh(t)}{S^2 - A^2}} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\textbf{Solución} \quad Q = AS\sqrt{\frac{\frac{2}{\rho}\left[\frac{p_0(L-h_0)}{L-h(t)} - p_A\right] + 2gh(t)}{S^2 - A^2}}} \quad .$$

b) En este ítem nos preguntan por el tiempo que demorará el fluido en descender un nivel d. Es el momento de darse cuenta que la velocidad v_1 es la velocidad con la que desciende el nivel del fluido

$$v_1 = -\frac{dh}{dt} = f(h) \quad \Longrightarrow \quad dt = -\frac{dh}{f(h)} \quad .$$

Tomando límites de integración h_0 y $h_0 - d$ para la integral en h se obtiene en definitiva

Solución

$$\boxed{\Delta t = -\int_{h_0}^{h_0-d} \sqrt{\frac{S^2 - A^2}{\frac{2A^2}{\rho}\left[\frac{p_0(L-h_0)}{L-h} - p_A\right] + 2ghA^2}}\, dh} \quad .$$

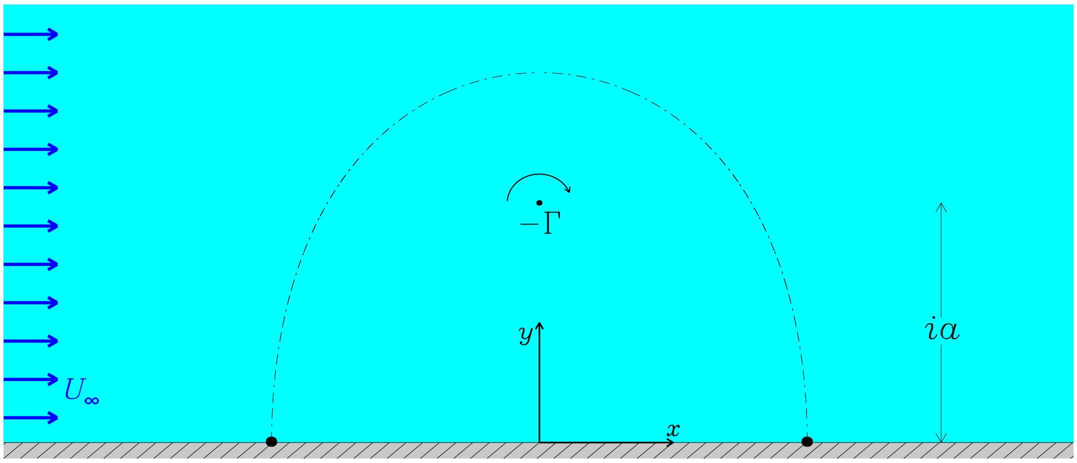
c) En este último punto nos preguntan condiciones sobre la presión inicial en el tanque para que el mismo se desagote completamente. Puede verse que deberíamos pedir que $v_1 > 0$ cuando el tanque se encuentre a punto de vaciarse, es decir, cuando $h \to 0$. Este límite no implica ninguna indeterminación, por lo que en la expresión que obtuvimos para v_1 simplemente se trata de evaluar en $h = 0$ y ver que el radicando sea positivo, lo que nos lleva a la condición

Solución

$$\boxed{p_0 > \frac{L}{L - h_0}\, p_A} \quad .$$

Problema 3

Un vórtice de circulación $-\Gamma$ se encuentra a distancia a de un plano que coincide con el eje x. Un flujo uniforme en el infinito en dirección paralela al eje x fluye sobre el vórtice.



a) Encuentre los puntos de estancamiento sobre el plano y cuál es la condición para que estos existan.
b) Suponga que se verifica la condición que surge del punto **a)**, en ese caso existe una curva separatriz como la mostrada en la figura, que limita el flujo alrededor del vórtice con el flujo proveniente del infinito. Halle una expresión para dicha curva de la forma $x = x(y)$. *Ayuda: considere que dicha separatriz es una línea de corriente.*
c) Si la presión en el infinito es p_∞, halle la distribución de presiones sobre el plano ¿Dónde se alcanza el máximo valor de presión y cuál es el mismo?

Resolución 3

a) Encontramos en primer lugar el potencial complejo de la configuración. Debemos tener en cuenta que el flujo uniforme al infinito ya cumple con las condiciones de contorno que implica la presencia del plano, por lo que sólo debemos considerar la imagen del vórtice: otro vórtice con circulación opuesta ubicado a la misma distancia del plano, pero por debajo de éste.

$$W(z) = U_\infty z + \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\log(z - ia) - \log(z + ia)\right] \quad ,$$

y derivando obtenemos una expresión para la velocidad compleja conjugada

$$\frac{dW}{dz} = u_x - iu_y = \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\frac{1}{z - ia} - \frac{1}{z + ia}\right] + U_\infty = \frac{i\Gamma}{2\pi}\left[\frac{2ia}{z^2 + a^2}\right] + U_\infty \quad .$$

Nos dicen que busquemos puntos de estancamiento sobre el plano, por lo que imponemos la condición $y = 0$ o $z = x$, lo que nos lleva a

$$u_x = -\frac{a\Gamma}{\pi(x^2 + a^2)} + U_\infty \qquad , \qquad u_y = 0 \quad .$$

La nulidad de u_y sobre el plano simplemente expresa que se cumple la condición de contorno. Pidiendo que se anule u_x obtenemos los dos puntos de estancamiento y la condición para que estos existan sobre el plano

Solución

$$P_1 = (-\sqrt{\frac{a\Gamma}{\pi U_\infty} - a^2}, 0) \quad , \quad P_2 = (\sqrt{\frac{a\Gamma}{\pi U_\infty} - a^2}, 0) \quad , \quad \Gamma > \pi a U_\infty \quad .$$

b) Para encontrar la expresión de la separatriz, tal como dice el enunciado usamos que debe ser una línea de corriente. Sabemos que las líneas de corriente pueden obtenerse a través de la igualdad $\psi(x,y) = cte$, por lo que buscamos la función corriente ψ como la parte imaginaria del potencial complejo $W(z)$

$$\psi(x,y) = U_\infty y + \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\log[x^2+(y-a)^2] - \log[x^2+(y+a)^2]\right\} \quad .$$

Para plantear la igualdad $\psi(x,y) = cte$, sólo nos resta determinar el valor de la constante correspondiente a esta línea de corriente específica. Dicho valor podemos obtenerlo evalundo ψ sobre P_1 o sobre P_2, encontrándose que la constante es nula. Planteamos entonces

$$\psi(x,y) = U_\infty y + \frac{\Gamma}{4\pi}\left\{\log[x^2+(y-a)^2] - \log[x^2+(y+a)^2]\right\} = 0 \Longrightarrow \frac{\Gamma}{4\pi}\log\left[\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}\right] = -U_\infty y \quad ,$$

Despejando x se obtiene en definitiva

Solución

$$x = \pm\sqrt{\frac{(y+a)^2 e^{-\frac{4\pi U_\infty y}{\Gamma}} - (y-a)^2}{1 - e^{-\frac{4\pi U_\infty y}{\Gamma}}}} \quad .$$

c) Para hallar la presión sobre el plano usamos el hecho que el fluido es irrotacional e incompresible por lo que

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} = cte \quad ,$$

para cualquier punto del fluido. Si nos paramos sobre el plano tendremos, $y = 0$, y tomando como referencia el infinito podremos plantear

$$\frac{\rho U_\infty^2}{2} + p_\infty = \left.\frac{\rho u^2}{2}\right|_{y=0} + p|_{y=0} \quad .$$

En **a)** ya encontramos una expresión para $u = u_x$ sobre el plano, hacemos uso de este resultado entonces

$$p|_{y=0} = p_\infty + \frac{\rho}{2}\left[U_\infty^2 - \left(U_\infty - \frac{a\Gamma}{\pi(x^2+a^2)}\right)^2\right] \Longrightarrow$$

Solución

$$p|_{y=0} = p_\infty + \frac{\rho U_\infty \Gamma a}{\pi(x^2+a^2)} - \frac{\rho \Gamma^2 a^2}{2\pi^2(x^2+a^2)^2} \quad .$$

Para buscar los puntos donde la presión es máxima uno podría estar tentado en derivar $p|_{y=0}$ respecto de x para hallar el máximo de la función, pero afortunadamente no es necesario pasar por estos cálculos, solamente notar que los puntos donde la presión se maximiza son los puntos de estancamiento ya calculados, P_1 y P_2, en los cuales la presión toma el valor $p_\infty + \rho U_\infty^2/2$.