

Efecto Hall: topología

Prof. Alberto Camjayi

Introducción

La fase de Berry

En la clase 22, vimos como en la aproximación adiabática aparece una fase geométrica en el autoestado instantáneo, la fase de Berry:

$$\gamma_n = \oint_C \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{R} \text{ con } \mathbf{A}_n(\mathbf{R}) = i \langle n(\mathbf{R}) | \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} | n(\mathbf{R}) \rangle.$$

Cambiamos un poco la notación, para tratar los casos donde el espacio de parámetros es de dimensión arbitraria.

Introducción

La fase de Berry

En la clase 22, también definimos la curvatura de Berry como

$$\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) = \nabla_{\mathbf{R}} \times \mathbf{A}_n(\mathbf{R})$$

$$\boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) = i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H} | m(\mathbf{R}) \rangle \times \langle m(\mathbf{R}) | \nabla_{\mathbf{R}} \hat{H} | n(\mathbf{R}) \rangle}{(E_m - E_n)^2}$$

y

$$\gamma_n = \int_S \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{R}) \cdot d\mathbf{a}$$

Introducción

La fase de Berry

La misma se puede generalizar a un número arbitrario de dimensiones introduciendo el tensor

$$\begin{aligned}\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) &= \frac{\partial}{\partial R^\mu} A_n^\nu(\mathbf{R}) - \frac{\partial}{\partial R^\nu} A_n^\mu(\mathbf{R}) \\ &= i \left[\left\langle \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R_\mu} \middle| \frac{\partial n(\mathbf{R})}{\partial R_\nu} \right\rangle - (\nu \leftrightarrow \mu) \right]\end{aligned}$$

En 3D, el tensor y el vector están relacionados por

$$\Omega_{\mu\nu}^n = \epsilon_{\mu\nu\xi} (\boldsymbol{\Omega}_n)_\xi.$$

Introducción

La fase de Berry

De la expresión del tensor de curvatura de Berry,

$$\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) =$$
$$= i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \partial \hat{H} / \partial R^\mu | m(\mathbf{R}) \rangle \langle m(\mathbf{R}) | \partial \hat{H} / \partial R^\nu | n(\mathbf{R}) \rangle - (\nu \leftrightarrow \mu)}{(E_m - E_n)^2}$$

podemos ensayar una interpretación.

En la aproximación adiabática la dinámica del sistema está restringida al estado n -ésimo. Es esencialmente una operación de proyección sobre dicho estado.

La curvatura de Berry se puede pensar como la “interacción residual” de todos los m estados excluidos en la aproximación.

Introducción

La fase de Berry

De la expresión del tensor de curvatura de Berry,

$$\Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) =$$
$$= i \sum_{m \neq n} \frac{\langle n(\mathbf{R}) | \partial \hat{H} / \partial R^\mu | m(\mathbf{R}) \rangle \langle m(\mathbf{R}) | \partial \hat{H} / \partial R^\nu | n(\mathbf{R}) \rangle - (\nu \leftrightarrow \mu)}{(E_m - E_n)^2}$$

podemos ensayar una interpretación.

De hecho, si incluimos todos los niveles de energía

$$\sum_n \Omega_{\mu\nu}^n(\mathbf{R}) = 0.$$

Fase de Berry y bandas

La fase de Berry en las bandas de Bloch

¿Qué sucede si consideramos la fase de Berry en un hamiltoniano de Bloch? Como veremos, la estructura de bandas de los cristales provee una plataforma natural donde investigar la aparición de la fase de Berry y sus efectos.

Consideremos el hamiltoniano de un cristal

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{r}) \text{ con } V(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = V(\mathbf{r}), \forall \mathbf{R} \in \mathbb{R}D.$$

Como sabemos, los autoestados cumplen

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} \psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$$

Fase de Berry y bandas

Transformación unitaria

Los autoestados son de la forma de una onda plana, modulada por una función periódica

$$\psi_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r}).$$

La ecuación de Schrödinger para $u_{n\mathbf{k}}$, que vimos en la clase 5, puede obtenerse formalmente a través de una transformación unitaria

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \hat{H} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k})^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

Este hamiltoniano más la condición de contorno

$u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = u_{n\mathbf{k}}(\mathbf{r})$, son una formulación alternativa del mismo problema.

Fase de Berry y bandas

La 1BZ como espacio de parámetros

Ahora, podemos identificar al momento cristalino en la 1BZ como el “espacio de parámetros” del hamiltoniano

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k})^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

y de sus autoestados $|u_n(\mathbf{k})\rangle$.

Como la dependencia en el momento cristalino es algo inherente de los estados de Bloch, es de esperar que la fase de Berry se manifieste en distintos fenómenos en cristales.

Ya vimos algunas maneras de que los estados electrónicos recorran caminos cerrados en la 1BZ. Podemos aplicar un campo magnético, generando órbitas en la RR.

Fase de Berry y bandas

La 1BZ como espacio de parámetros

Ahora, podemos identificar al momento cristalino en la 1BZ como el “espacio de parámetros” del hamiltoniano

$$\hat{H}(\mathbf{k}) = \frac{(\hat{\mathbf{p}} + \hbar\mathbf{k})^2}{2m} + V(\mathbf{r})$$

y de sus autoestados $|u_n(\mathbf{k})\rangle$.

Como la dependencia en el momento cristalino es algo inherente de los estados de Bloch, es de esperar que la fase de Berry se manifieste en distintos fenómenos en cristales.

Ya vimos algunas maneras de que los estados electrónicos recorran caminos cerrados en la 1BZ.

O aplicar un campo eléctrico, donde la 1BZ se recorre linealmente para volver a entrar a ella, porque $\mathbf{k} = \mathbf{k} + \mathbf{K}$.

Fase de Berry y bandas

Fase y conexión de Berry

En la 1BZ la fase de Berry será

$$\gamma_n = \oint_C d\mathbf{k} \cdot \langle u_n(\mathbf{k}) | i \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle$$

y la curvatura $\Omega_n = \nabla_{\mathbf{k}} \times \langle u_n(\mathbf{k}) | i \nabla_{\mathbf{k}} | u_{\mathbf{k}} \rangle$.

Veamos que sucede si encendemos un campo eléctrico. ¿La dinámica seguirá siendo la misma que encontramos en la clase 10?

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, campo eléctrico

Normalmente para obtener un campo eléctrico uniforme, se introduce un potencial electrostático que varía linealmente. Esto rompe la simetría de traslación y perdemos al teorema de Bloch. Para evitarlo, derivaremos al campo eléctrico de un potencial vector que depende del tiempo. Así, como

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(t))^2 + V(\mathbf{r})$$

la simetría de traslación se mantiene y $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ sigue siendo un buen número cuántico.

Introduzcamos ahora al momento cristalino invariante de gauge

$$\mathbf{q} = \mathbf{k} + \frac{e}{\hbar}\mathbf{A}(t)$$

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, campo eléctrico

El hamiltoniano depende ahora de un solo parámetro

$$\hat{H} = \hat{H}(\mathbf{q}(\mathbf{k}, t))$$

Además, como dijimos, la simetría de traslación se mantiene y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = 0$$

de donde

$$\dot{\mathbf{q}} = -\frac{e}{\hbar}\mathbf{E}$$

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, campo eléctrico

Calculemos la ecuación de movimiento. El operador velocidad cumple

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}].$$

En el espacio de momentos

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\mathbf{r}}] e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \hat{H}(\mathbf{k}, t).$$

El problema es dependiente del tiempo. Podemos usar las expresiones que vimos en la clase de fase de Berry.

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, campo eléctrico

Si tomamos la corrección a orden uno (el orden cero es la aproximación adiabática), la función de onda perturbada es

$$|u_n(t)\rangle \rightarrow |u_n(\mathbf{k}, t)\rangle - i\hbar \sum_{m \neq n} |u_m(\mathbf{k}, t)\rangle \frac{\langle u_m(\mathbf{k}, t) | \partial_t u_n(\mathbf{k}, t) \rangle}{\epsilon_n - \epsilon_m}$$

Con esta función de onda, podemos evaluar el valor medio del operador velocidad

$$\hat{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \hat{H}(\mathbf{k}, t).$$

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, velocidad

Explícitamente

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon_n(\mathbf{k}) -$$

$$-i \sum_{m \neq n} \left[\frac{\langle u_n(\mathbf{k}, t) | \nabla_{\mathbf{k}} \hat{H} | u_m(\mathbf{k}, t) \rangle \langle u_m(\mathbf{k}, t) | \partial_t u_n(\mathbf{k}, t) \rangle}{\varepsilon_n - \varepsilon_m} - \text{h.c.} \right]$$

Usando la identidad

$$\langle u_n(\mathbf{k}, t) | \nabla_{\mathbf{k}} \hat{H} | u_m(\mathbf{k}, t) \rangle = (\varepsilon_n - \varepsilon_m) \langle \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}, t) | u_m(\mathbf{k}, t) \rangle$$

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, velocidad

La expresión se simplifica a

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon_n(\mathbf{k}) - \Omega_{\mathbf{k},t}^n$$

donde el segundo término no es otra cosa que la curvatura de Berry

$$\Omega_{\mathbf{k},t}^n = -i [\langle \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}, t) | \partial_t u_n(\mathbf{k}, t) \rangle - \langle \partial_t u_n(\mathbf{k}, t) | \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}, t) \rangle]$$

En presencia de un campo eléctrico, la velocidad del electrón adquiere un término extra producto de la fase de Berry.

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, velocidad anómala

Si recordamos que

$$\begin{cases} \mathbf{q} = \mathbf{k} + \frac{e}{\hbar} \mathbf{A}(t) \\ \dot{\mathbf{q}} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \end{cases} \implies \begin{cases} \partial_t = \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} = -\frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \cdot \nabla_{\mathbf{q}} \\ \nabla_{\mathbf{q}} = \nabla_{\mathbf{k}} \end{cases}$$

Se obtiene la forma final

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon_n(\mathbf{k}) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k})$$

$$\begin{aligned} \text{con } \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k}) &= \nabla_{\mathbf{k}} \times \langle u_n(\mathbf{k}, t) | i \nabla_{\mathbf{k}} | u_n(\mathbf{k}, t) \rangle \\ &= i \langle \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}, t) | \times | \nabla_{\mathbf{k}} u_n(\mathbf{k}, t) \rangle. \end{aligned}$$

Fase de Berry y bandas

Dinámica electrónica, velocidad anómala

Como podemos ver

$$\mathbf{v}_n(\mathbf{k}) = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \varepsilon_n(\mathbf{k}) - \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_n(\mathbf{k})$$

además de la contribución habitual de la dispersión de la banda, un término extra, la “velocidad anómala”, contribuye a la velocidad de los electrones.

La misma es siempre transversal al campo eléctrico y da origen a la corriente Hall.

Efecto Hall entero

Cálculo de la corriente

La corriente la podemos calcular como

$$\mathbf{J} = -e \sum_n \int_{1\text{BZ}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \mathbf{v}_n(\mathbf{k}) f(k)$$

Supongamos que las bandas son aislantes, con las bandas de valencia separadas por un gap de las bandas de conducción (que están vacías).

Como ya sabemos, el primer término de la velocidad, integrado sobre la 1BZ con las bandas llenas da cero.

¡Pero el segundo término no! Así resulta

$$\mathbf{J} = \sigma_{xy} \hat{z} \times \mathbf{E}.$$

Efecto Hall entero

Conductividad Hall

La conductividad es

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{2\pi h} \sum_n \int_{1\text{BZ}} d\mathbf{k} \Omega_{k_x, k_y}^n$$

Esta integral es un invariante topológico. Por la periodicidad de la RR

$$\Omega_{k_x, k_y}^n = \Omega_{k_x + \pi, k_y}^n = \Omega_{k_x, k_y + \pi}^n$$

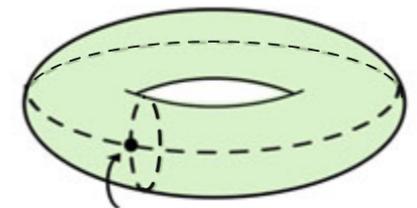
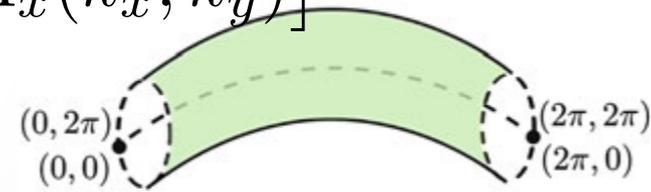
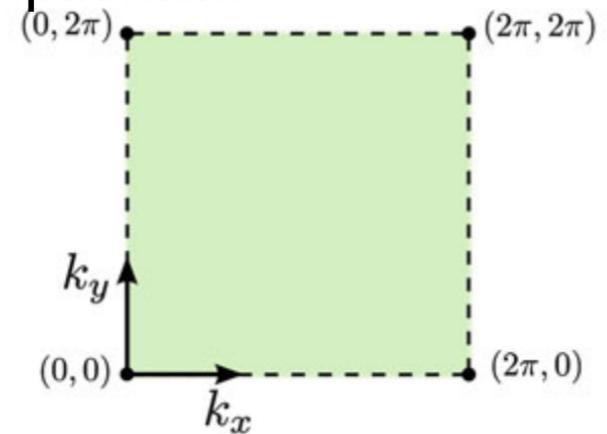
La 1BZ tiene la forma de un toroide.

Efecto Hall entero

Conductividad Hall

Para ver como aparece la cuantización, por simplicidad trabajemos con una banda

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_x dk_y [\nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(k_x, k_y)]_z \\ &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_x dk_y [\partial_{k_x} A_y(k_x, k_y) - \partial_{k_y} A_x(k_x, k_y)] \\ &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_y [A_y(2\pi, k_y) - A_y(0, k_y)] \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_x [A_x(k_x, 2\pi) - A_x(k_x, 0)]\end{aligned}$$



(0, 2π) (2π, 2π)
(0, 0) (2π, 0)

Efecto Hall entero

Conductividad Hall

Para ver como aparece la cuantización, por simplicidad trabajemos con una banda. Por unicidad, los autoestados deben diferir a lo sumo en una fase en los extremos de la 1BZ.

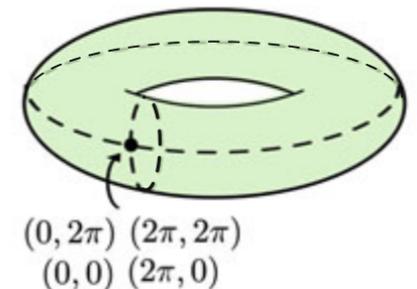
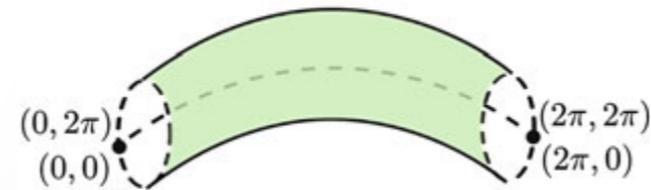
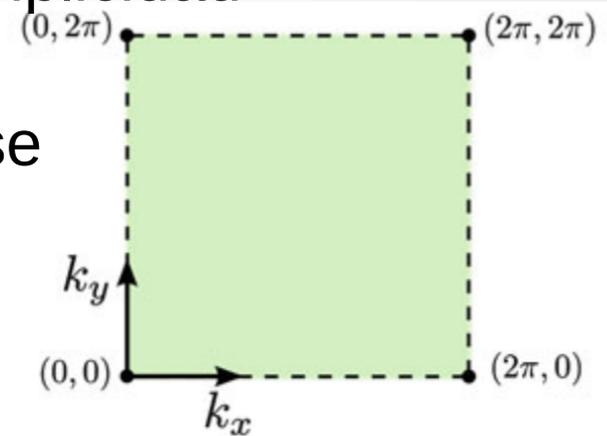
Por ejemplo

$$|u(k_x, 2\pi)\rangle = \exp[i\theta_x(k_x)]|u(k_x, 0)\rangle$$

y

$$\begin{aligned} A_x(k_x, 2\pi) &= \langle u(k_x, 2\pi) | i\partial_{k_x} | u(k_x, 2\pi) \rangle \\ &= -\partial_{k_x} \theta_x(k_x) + A_x(k_x, 0). \end{aligned}$$

Lo mismo con la componente y .



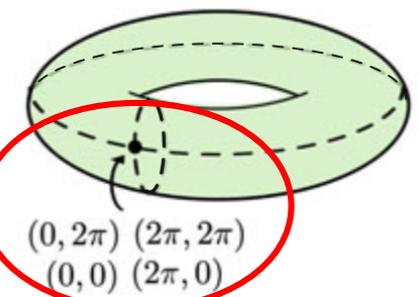
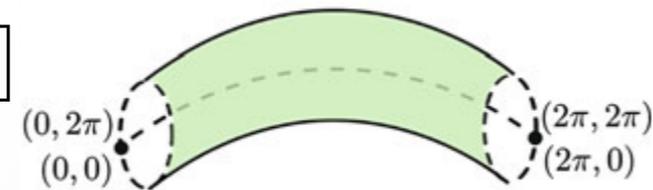
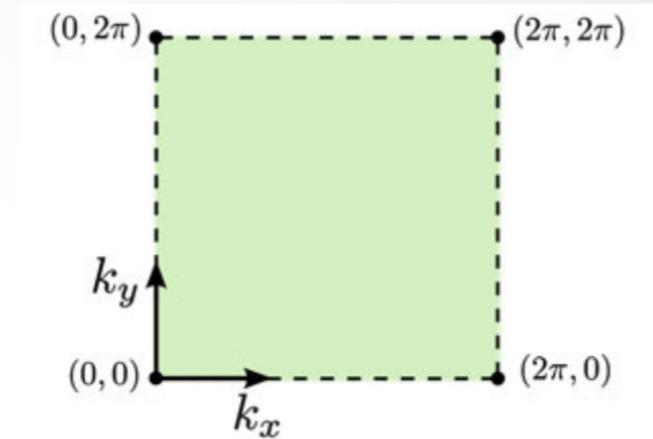
Efecto Hall entero

Conductividad Hall

Usando estas relaciones tenemos

$$\begin{aligned}\sigma_{xy} &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_y [-\partial_{k_y} \theta_y(k_y)] \\ &\quad + \frac{e^2}{2\pi\hbar} \int_0^{2\pi} dk_x [\partial_{k_x} \theta_x(k_x)] \\ &= \frac{e^2}{2\pi\hbar} [\theta_y(0) - \theta_y(2\pi) + \theta_x(2\pi) - \theta_x(0)]\end{aligned}$$

Sobre el toro, las funciones de onda en los extremos de la 1BZ son la misma



Efecto Hall entero

Conductividad Hall

Por lo tanto, como

$$e^{i\theta_y(0)} |u(2\pi, 0)\rangle = |u(0, 0)\rangle$$

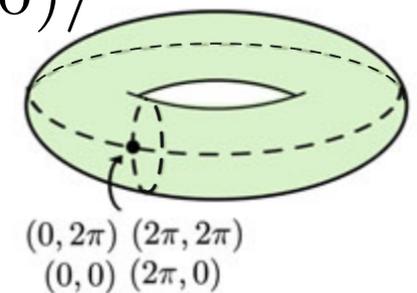
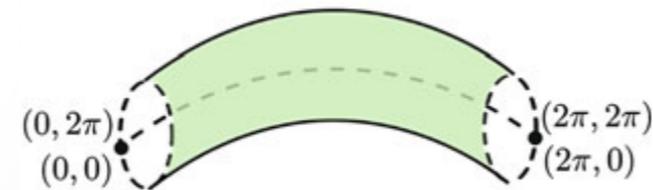
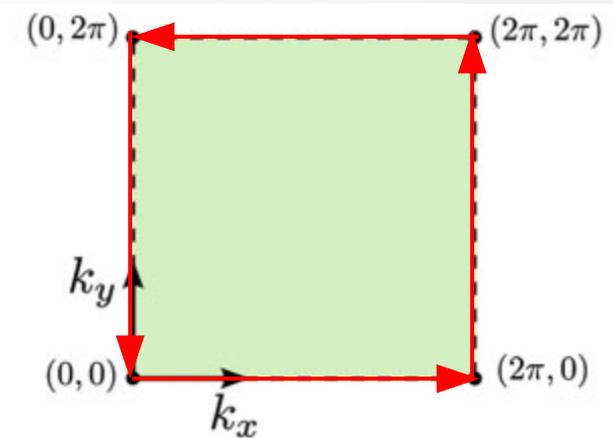
$$e^{i\theta_x(2\pi)} |u(2\pi, 2\pi)\rangle = |u(2\pi, 0)\rangle$$

$$e^{i\theta_y(2\pi)} |u(2\pi, 2\pi)\rangle = |u(0, 2\pi)\rangle$$

$$e^{i\theta_x(0)} |u(0, 2\pi)\rangle = |u(0, 0)\rangle$$

$$|u(0, 0)\rangle = e^{i[\theta_x(0) + \theta_y(2\pi) - \theta_x(2\pi) - \theta_y(0)]} |u(0, 0)\rangle$$

$$\implies \theta_x(0) + \theta_y(2\pi) - \theta_x(2\pi) - \theta_y(0) = 2\nu\pi$$



Efecto Hall entero

Conductividad Hall

La conductividad Hall está cuantizada cuando las bandas están llenas

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu, \nu \in \mathbb{Z}.$$

El entero ν se denomina el número de Thouless-Kohmoto-Nightingale-Nijs (TKNN) o primer número de Chern.

El mismo caracteriza la estructura topológica de los estados de Bloch en el espacio de parámetros, los momentos en la 1BZ.

Bandas magnéticas

Algunos detalles técnicos

Si bien hemos mostrado que la conductividad está cuantizada, algunos detalles técnicos fueron ignorados para hacer más sencilla la demostración.

Primer detalle: en el efecto Hall es fundamental la presencia del campo magnético externo. ¿El teorema de Bloch sigue siendo válido?

Dado que utilizamos fuertemente las consecuencias del teorema de Bloch, es una pregunta importante.

Bandas magnéticas

Algunos detalles técnicos

Si tenemos presente un campo magnético, la energía cinética del hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2$$

Si aplicamos el operador de traslaciones discretas en la red

$$\hat{T}_{\mathbf{R}} \hat{H} \hat{T}_{\mathbf{R}}^\dagger = \frac{1}{2m} (\hat{\mathbf{p}} + e\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}))^2$$

en general, debido al potencial vector, el hamiltoniano no resulta invariante. Por lo tanto el teorema de Bloch no aplica.

Bandas magnéticas

Algunos detalles técnicos

Sin embargo, para el caso donde el campo magnético es constante, tanto el potencial vector original como el trasladado, dan origen al mismo campo

$$\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{B}$$

Eso quiere decir que están relacionados por una transformación de gauge

$$\mathbf{A}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) = \mathbf{A}(\mathbf{r}) + \nabla f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})$$

y que podemos usarla para recuperar el hamiltoniano original

$$e^{i\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} \hat{T}_{\mathbf{R}} \hat{H} \hat{T}_{\mathbf{R}}^\dagger e^{-i\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} = \hat{H}$$

Bandas magnéticas

Operador de traslaciones magnéticas

Podemos entonces definir al operador de traslaciones magnéticas

$$\tilde{T}_{\mathbf{R}} = e^{i\phi_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})} \hat{T}_{\mathbf{R}}$$

con

$$\phi_{\mathbf{R}} = \frac{e f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r})}{\hbar c}$$

tal que

$$[\tilde{T}_{\mathbf{R}}, \hat{H}] = 0$$

Bandas magnéticas

Operador de traslaciones magnéticas

Esto parece resolver el problema, salvo que estos operadores, en general, no conmutan entre si

$$[\tilde{T}_{\mathbf{R}}, \tilde{T}_{\mathbf{R}'}] \neq 0$$

Sin embargo, es posible encontrar dos de dichos operadores que conmutan con el hamiltoniano y entre si $[\tilde{T}_{\mathbf{R}_1}, \tilde{T}_{\mathbf{R}_2}] = 0$. Los vectores \mathbf{R}_1 y \mathbf{R}_2 deben ser tales que la celda unidad que determinan (la “*celda unidad magnética*”), **contenga un número entero de cuantos de flujo**.

Resolviendo las “bandas magnéticas” de hecho es posible obtener los niveles de Landau.

Dinámica semiclassical

Dinámica semiclassical topológica

De manera análoga al caso sencillo que vimos en la clase de dinámica semiclassical, es posible obtener las ecuaciones de movimiento teniendo en cuenta la fase de Berry.

Las mismas son

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon_M(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \end{cases}$$

Dinámica semiclassical

Dinámica semiclassical topológica

De manera análoga al caso sencillo que vimos en la clase de dinámica semiclassical, es posible obtener las ecuaciones de movimiento teniendo en cuenta la fase de Berry.

Las mismas son

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon_M(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \end{array} \right. \quad \text{Velocidad anómala}$$

Dinámica semiclásica

Dinámica semiclásica topológica

De manera análoga al caso sencillo que vimos en la clase de dinámica semiclásica, es posible obtener las ecuaciones de movimiento teniendo en cuenta la fase de Berry.

Las mismas son

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon_M(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$$

Energía electrónica se modifica

$$\hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}$$

$$\varepsilon_M(\mathbf{k}) = \varepsilon(\mathbf{k}) - \mathbf{m}(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{B}$$

Aparece un término proporcional al momento orbital del paquete de ondas.

Evaluando la conductividad con estas ecuaciones se predicen varios efectos además del efecto Hall entero.

Simetrías

Simetrías generales

En general, la curvatura de Berry debe obedecer ciertas consideraciones de simetría.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon_M(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \end{cases}$$

La fórmula para la velocidad tiene que ser invariante ante reversión temporal e inversión espacial, si el sistema sin perturbar tiene estas simetrías.

Reversión temporal: $\boldsymbol{\Omega}(-\mathbf{k}) = -\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$

Inversión espacial: $\boldsymbol{\Omega}(-\mathbf{k}) = \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k})$

Simetrías

Simetrías generales

En general, la curvatura de Berry debe obedecer ciertas consideraciones de simetría.

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \varepsilon_M(\mathbf{k})}{\hbar \partial \mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} = -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B} \end{cases}$$

La fórmula para la velocidad tiene que ser invariante ante reversión temporal e inversión espacial, si el sistema sin perturbar tiene estas simetrías.

Con ambas simetrías presentes $\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{k}) \equiv 0$. En este caso las ecuaciones de movimiento toman su forma habitual.

Topología por doquier

La topología en física

- 1980: von Klitzing descubre el efecto Hall cuántico entero.
- 1982: TKNN relacionan en IQHE con la topología del espacio de Hilbert. Se descubre el FQHE.
- 1988: Haldane demuestra que pueden existir fases topológicas sin campo magnético rompiendo la simetría de reversión temporal.
- 2004: Kane y Mele predicen la existencia del efecto Hall cuántico de espín (SQHE). SOC toma relevancia. En 2006, Bernevig, Hughes y Zhang, refinan el modelo sobre la base de la estructura de bandas del HgTe.
- 2007: Konig encuentra experimentalmente el SQHE en sistemas 2D y en 2008, Hsieh en un sistema 3D.

Fin de la clase

¡Muchas gracias!