

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 2

SEGUNDO CUATRIMESTRE DE 2025

GUÍA 6: DINÁMICA DE REDES Y PROPIEDADES TÉRMICAS

1. Hallar la relación de dispersión de fonones para una cadena lineal monoatómica con interacción a primeros vecinos.
2. Sea una cadena lineal formada por iones de masa m_1 y m_2 con interacciones a primeros vecinos C .

a) Mostrar que la relación de dispersión es:

$$\omega^2(k) = \frac{C}{\mu} \left(1 \pm \sqrt{1 - 2 \frac{\mu^2}{m_1 m_2} [1 - \cos(ka)]} \right)$$

(μ es la masa reducida.)

- b) Encontrar la relación de amplitud u/v de las dos ramas de $\omega^2(k)$ para k en el borde de zona ($k = \frac{\pi}{a}$).
 - c) Discutir la forma de la relación de dispersión y la naturaleza de los modos normales cuando $m_1 \gg m_2$.
 - d) Comparar la relación de dispersión con la de la cadena monoatómica cuando $m_1 \approx m_2$. ¿Qué sucede cuando son iguales?
3. Hallar los modos normales de vibración de una cadena lineal monoatómica en la que las constantes de fuerza entre primeros vecinos son alternadamente C y $10C$. La distancia entre primeros vecinos es $a/2$. Encontrar $\omega(k)$ en $k = 0$ y $k = \pi/a$. Dibujar la relación de dispersión.
 4. Calcular la matriz dinámica para un cristal unidimensional con una base de tres átomos, A-B-A, de masas m_A y m_B . La cadena tiene constante de red a , y las posiciones de los átomos en la celda unidad son $x(B) = 0$, $x(A_1) = a/3$ y $x(A_2) = 2a/3$, e interactúan con constantes de fuerza C_{AB} y C_{AA} entre primeros vecinos respectivos. Calcular las frecuencias y los autovectores en $k = 0$.
 5. Sea una red rectangular plana monoatómica con parámetros de red a y b . Las constantes de fuerza entre átomos son C_1 a primeros vecinos y C_2 a segundos vecinos.
 - a) Hallar la matriz dinámica del sistema, para una dirección de \mathbf{k} arbitraria en el plano.
 - b) Graficar la relación de dispersión en el siguiente recorrido de la primera zona de Brillouin: $\Gamma \rightarrow X \rightarrow S \rightarrow \Gamma \rightarrow Y \rightarrow S$, donde $\Gamma = (0,0)$, $X = (\pi/a, 0)$, $Y = (0, \pi/b)$, $S = (\pi/a, \pi/b)$.
 - c) Hallar el límite para $ka \approx kb \ll 1$.

6. Un cristal bidimensional de celda unidad rectangular ($a=a$, $b=2a$) tiene dos átomos (A y B, masas m_A y m_B) por celda unidad, ubicados en posiciones (0,0) (el A) y (0, 1/2) (el B). Los átomos interactúan entre sí a través de constantes de fuerza C_{AA} , C_{BB} y C_{AB} , a primeros vecinos, entre los átomos AA, BB y AB respectivamente, y constantes C_4 entre átomos AB a segundos vecinos. Hallar la matriz dinámica de este problema para vectores de onda k en la dirección del lado b. Hallar y graficar las curvas de dispersión correspondientes en esa dirección. (Ayuda: en esa dirección de k se separan los modos longitudinales de los transversales).
7. Sea un cristal cuya red es del tipo panal de abejas:
- ¿Cuántas ramas fonónicas acústicas y cuántas ópticas existen?. Dibujar cualitativamente las curvas de dispersión en alguna dirección del espacio recíproco.
 - Tomando constantes de fuerza C a primeros vecinos, hallar las curvas de dispersión para la dirección $k = \alpha a^*$ correspondientes a modos longitudinales y transversales. ¿Cómo se explica que los modos transversales no dependen del valor de k ? ¿Qué suposición habría que cambiar para que esto no fuera así?
 - Graficar cualitativamente la densidad de estados restringida a esta dirección. En base a esto, dibujar cualitativamente C_v vs T .
8. Calcular las dispersiones de los modos longitudinales y transversales en la dirección (1,0,0) de una red FCC monoatómica con interacciones a primeros vecinos. Calcular la velocidad del sonido para estos modos.
9. A partir de la relación de dispersión de una cadena lineal monoatómica con interacciones a primeros vecinos encontrar la densidad de estados de fonones.
10. Suponiendo que la rama óptica en un sólido tridimensional tiene, cerca de $k = 0$, la forma $\omega(k) = \omega_0 - Ak^2$, mostrar que la densidad de estados correspondiente a esa porción de la banda óptica es:
- $$D(\omega) = \begin{cases} \left(\frac{L}{2\pi}\right)^3 2\pi A^{-3/2} (\omega_0 - \omega)^{\frac{1}{2}} & \omega \leq \omega_0 \\ 0 & \omega \geq \omega_0 \end{cases}$$
11. A bajas temperaturas el calor específico según el modelo de Debye tiene un comportamiento como T^3 .
- ¿Cómo se modifica esta dependencia si se considera un sólido unidimensional? ¿Y uno bidimensional?
 - Imaginar un cristal formado por planos atómicos débilmente acoplados entre sí. ¿Qué forma tendrá el calor específico para $T \rightarrow 0$?
12. Empleando la aproximación de Debye para el cálculo del calor específico en una cadena monoatómica ¿se sobreestima o se subestima este valor (comparado con el real) a altas temperaturas?
13. Un cristal puede ser descrito por el modelo de Debye-Einstein con frecuencia de Debye ω_D y frecuencia de Einstein ω_E , $\omega_E \gg \omega_D$. Hacer un gráfico cualitativo de la densidad de estados fonónica $D(\omega)$, indicando claramente la condición de normalización. Hacer otro de $c_v = c_v(T)$, especificando su dependencia para $T \rightarrow 0$ y para temperaturas altas. Considerar el problema en 1, 2 y 3 dimensiones.