Estructura de la Materia 2

Segundo Cuatrimestre de 2025

Guía 9: Superconductividad

1. **Termodinámica de los superconductores**.

   a) Mostrar que $g_n(T,0) - g_s(T,0) = \mu_0 H_c^2(T)/2$, siendo g_n, g_s las energías libres de las fases normal y superconductora, respectivamente y μ_0 la constante magnética.

   b) Sobre la base de la teoría de Ginzburg–Landau, analizar el comportamiento de $H_c(T)$ cerca de T_c.

   c) Mostrar que la diferencia de calor específico entre el estado normal y el superconductor puede expresarse: $c_n - c_s = 2\mu_0 H_c^2(0)\left(t - 3t^3\right)/T_c$, donde $t = T/T_c$.

2. **Efecto Meissner**. A partir de las ecuaciones de Maxwell muestre que momentáneamente, durante la transición superconductora, el campo eléctrico es distinto de cero.

3. **Calor específico de un sistema con gap**. Considere un sistema de dos niveles, en el cual el Hamiltoniano tiene solo dos autoestados separados por una energía Δ.

   a) Calcule la energía libre del sistema.

   b) Muestre que el calor específico se escribe como:

   $$c_V = \frac{\Delta^2 e^{\beta\Delta}}{k_B T^2 \left(1 + e^{\beta\Delta}\right)^2},$$

   con k_B la constante de Boltzman y $\beta = 1/k_B T$.

   c) Obtenga el límite de bajas temperaturas $c_V \propto e^{-\beta\Delta}$.

4. **Corriente crítica**. Considere un cable superconductor de radio R. Calcule la corriente superconductora máxima I_c, que puede circular por el mismo de manera tal que el campo generado por dicha corriente no exceda al campo crítico H_c en la superficie del cable.

5. **Ecuación de London para una placa superconductora** (extraído del Ashcroft). Considere una placa infinita superconductora ubicada entre dos planos perpendiculares al eje $\hat{y}$ ubicadas en $y = \pm d$. Un campo magnético uniforme H_0 es aplicado paralelo al eje $\hat{z}$.

   a) Tomando como condición de contorno que la componente paralela del campo $\mathbf{B}$ sea continua en la superficie, deduzca de las ecuaciones de London y Maxwell que, dentro del superconductor,

   $$\mathbf{B} = B(y)\hat{\mathbf{z}}, \quad B(y) = H_0 \frac{\cosh(y/\Lambda)}{\cosh(d/\Lambda)}$$

   donde la longitud de penetración de London es $\Lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$, con m, e y n la masa, carga y densidad de los conductores y μ_0 la constante magnética.

b) Muestre que la densidad de corriente diamagnética que circula en equilibrio es

$$\mathbf{j} = j(y)\hat{\mathbf{x}}, \quad j(y) = \frac{1}{\mu_0 \Lambda} H_0 \frac{\sinh(y/\Lambda)}{\cosh(d/\Lambda)}.$$

c) La densidad de magnetización en un punto dentro de la placa es $\mathbf{M}(y) = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{H}_0$. Muestre que la densidad de magnetización promedio (promediado sobre el ancho de la placa) es

$$\langle M \rangle = -H_0 \left(1 - \frac{\Lambda}{d} \tanh(d/\Lambda)\right)$$

y obtenga la forma límite para la susceptibilidad cuando la placa es ancha ($d \gg \Lambda$) o delgada ($d \ll \Lambda$).

6. **Funcional de Ginzburg – Landau***. A partir de la funcional de Ginzburg – Landau

$$G_S[\phi, \mathbf{A}] = G_n + \frac{1}{V} \int \mathrm{d}\mathbf{r} \left[\frac{1}{2m^\star} (-i\hbar\nabla + e^\star \mathbf{A})\phi^* (i\hbar\nabla + e^\star \mathbf{A})\phi + \right.$$
$$\left. + \frac{B^2(\mathbf{r})}{2\mu_0} - \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) + a\phi\phi^* + \frac{1}{2} b\phi\phi^*\phi\phi^* \right]$$

a) Obtenga las ecuaciones de Ginzburg – Landau extremando la funcional, $\delta G_S = 0$. Para ello proponga $\phi^* \to \phi^* + \delta\phi^*$ y $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$ y aplique la condición de extremo.

1) Para convertir el término proporcional a $\nabla\delta\phi^*$ en otro proporcional a $\delta\phi^*$ es útil hacer una integración por partes. Muestre que esta transformación lleva a la condición de borde $\hat{\mathbf{n}} \cdot (i\hbar\nabla + e^\star \mathbf{A})\phi = 0$, donde $\hat{\mathbf{n}}$ es la normal a la superficie del superconductor.

2) Para convertir el término proporcional a $\nabla \times \delta\mathbf{A}$ en uno proporcional a $\delta\mathbf{A}$ es útil la relación vectorial

$$\mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) = \nabla \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{F}) + \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}).$$

Muestre que esta transformación lleva a la condición de borde $\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{H}) = 0$.

b) Usando las ecuaciones de Ginzburg – Landau muestre que la teoría cumple con la ecuación de continuidad para la densidad de corriente: $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ y $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$, donde $\mathbf{j}$ es la densidad de corriente y $\hat{\mathbf{n}}$ la normal a la superficie del superconductor.

7. **Relación entre las teorías de GL y London**.

a) Mostrar que de la teoría de Ginzburg–Landau se predice la ecuación de London para la corriente superconductora, indentificando $|\phi|^2 = n_s$, siendo n_s la densidad de “portadores superconductores”.

b) Teniendo en cuenta la teoría microscópica, ¿cuál sería la relación que vincula la carga efectiva $e^\star$ del funcional de Ginzburg–Landau y la carga e de un electrón?

8. **Ecuaciones de Ginzburg – Landau**. Resolver las ecuaciones de Ginzburg–Landau para un sistema normal-superconductor. Suponer que la interfase se halla en el plano $x = 0$, separando el semi-espacio normal ($x < 0$) del superconductor ($x > 0$) y que, en la región normal, se aplica un campo magnético $\mathbf{B}_0 = B_0\hat{z}$ paralelo a la superficie de separación.

9. **Transformación de Bogoliubov**. El hamiltoniano efectivo de BCS puede escribirse en forma matricial como:

$$H_{\rm BCS} = \sum_{\mathbf{k}} \left(c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}\, c_{-\mathbf{k}\downarrow}\right) \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta & -\xi_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} + D = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{c}^\dagger_{\mathbf{k}} K_{\mathbf{k}} \mathbf{c}_{\mathbf{k}} + D,$$

donde $\mathbf{c}^\dagger_{\mathbf{k}} = \left(c^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}\, c_{-\mathbf{k}\downarrow}\right)$, $K_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} \xi_k & -\Delta \\ -\Delta & -\xi_k \end{pmatrix}$ y D una constante. La matriz $K_{\mathbf{k}}$ es hermítica y por lo tanto diagonalizable por una transformación unitaria. Introduciendo la transformación

$$\mathbf{c}_{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} c_{\mathbf{k}\uparrow} \\ c^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u^*_k & v_k \\ -v^*_k & u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} \equiv U_k \mathbf{\Gamma}_{\mathbf{k}}$$

se tiene $H_{\rm BCS} = \sum_{\mathbf{k}} \Gamma^\dagger_{\mathbf{k}} U^\dagger_{\mathbf{k}} K_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}} \Gamma_{\mathbf{k}} + D$.

   a) Muestre que pedir que $U_{\mathbf{k}}$ sea unitaria es equivalente a pedir $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$. Además la transformación es canónica, ya que preserva las relaciones de conmutación. Muestre que los operadores de Bogoliubov satisfacen las reglas de conmutación fermiónicas.

   b) Pidiendo que $U^\dagger_{\mathbf{k}} K_{\mathbf{k}} U_{\mathbf{k}}$ sea diagonal, obtenga la condición $2\xi_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v_{\mathbf{k}} - \Delta u^2_{\mathbf{k}} + \Delta^* v^2_{\mathbf{k}} = 0$. Utilizando esta relación y la obtenida en el ítem anterior, despeje $u_{\mathbf{k}}$ y $v_{\mathbf{k}}$ y obtenga finalmente

$$H_{\rm BCS} = \sum_{\mathbf{k}} \left(\gamma^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow}\, \gamma_{-\mathbf{k}\downarrow}\right) \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\mathbf{k}\uparrow} \\ \gamma^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow} \end{pmatrix} + D,$$

   donde $E_k = \sqrt{\xi^2_{\mathbf{k}} + |\Delta|^2}$.

   c) Usando las reglas de conmutación y haciendo el cambio $\mathbf{k} \to -\mathbf{k}$ adecuadamente, llegue a la expresión final:

$$H_{\rm BCS} = \sum_{\mathbf{k},\sigma} E_k \gamma^\dagger_{\mathbf{k}\sigma} \gamma_{\mathbf{k}\sigma} + E_0,$$

   con $E_0 = D - \sum_{\mathbf{k}} E_k$.

10. **Estado fundamental BCS**.

$$|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(u_{\mathbf{k}} + v_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^\dagger_{-\mathbf{k}\downarrow}\right) |0\rangle$$

   a) Muestre que $\gamma_{\mathbf{k}\sigma} |BCS\rangle = 0$ para el estado fundamental $|BCS\rangle$. Esto significa que el estado $|BCS\rangle$ es el "vacio" de los bogoliuvones.

b) Suponiendo que $\langle 0|0\rangle = 1$, donde el estado $|0\rangle$ es el "vacio" de los operadores fermiónicos $c_{\mathbf{k}\sigma}$, muestre que el estado fundamental $|BCS\rangle$ está normalizado.

c) A partir de la expresión no normalizada, $|BCS\rangle = \prod_{\mathbf{k}} \left(1 + \phi_{\mathbf{k}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\right) |0\rangle$, muestre que el estado fundamental puede escribirse alternativamente como un estado coherente $|BCS\rangle = \exp\left[\sum_{\mathbf{k}} \phi_{\mathbf{k}} \hat{c}^{\dagger}_{\mathbf{k}\uparrow} \hat{c}^{\dagger}_{-\mathbf{k}\downarrow}\right] |0\rangle$.