

Red recíproca

Definición de Red recíproca (RR)

El conjunto de vectores de onda $\bar{K}$ que generan ondas planas con la periodicidad de una RB determinan su red recíproca (RR).

$$\bar{R} = n_1 \bar{a}_1 + n_2 \bar{a}_2 + n_3 \bar{a}_3 \quad \forall n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{Z}; \bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3 \text{ VP}$$

Buscamos todos los $\bar{K}$ tal que: $e^{i\bar{K} \cdot (\bar{r} + \bar{R})} = e^{i\bar{K} \cdot \bar{r}} \quad \forall \bar{r} \in \mathbb{R}^3, \forall \bar{R} \in \text{RB} \rightarrow e^{i\bar{K} \cdot \bar{R}} = 1$

¿La RR es una RB?

Planteamos el siguiente conjunto de vectores linealmente independientes.

$$\begin{cases} \bar{b}_1 = 2\pi \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)} \\ \bar{b}_2 = 2\pi \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)} \\ \bar{b}_3 = 2\pi \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)} \end{cases} \longrightarrow \bar{b}_i \cdot \bar{a}_j = 2\pi \delta_{ij}$$

Cualquier vector $\bar{k} \in \mathbb{R}^3$ puede escribirse como $\bar{k} = k_1 \bar{b}_1 + k_2 \bar{b}_2 + k_3 \bar{b}_3, k_i \in \mathbb{R}$

$$\rightarrow \bar{k} \cdot \bar{R} = (k_1 \bar{b}_1 + k_2 \bar{b}_2 + k_3 \bar{b}_3) \cdot (n_1 \bar{a}_1 + n_2 \bar{a}_2 + n_3 \bar{a}_3) = 2\pi(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3)$$

$$e^{i\bar{k} \cdot \bar{R}} = 1 \quad \forall \bar{R} \in \text{RB} \leftrightarrow k_i \in \mathbb{Z} \rightarrow \begin{array}{|l} \text{La RR es una RB} \\ \text{y los } \bar{b}_i \text{ son VP} \end{array} \quad \begin{array}{|l} \text{Nomenclatura: Red directa (RD) es la RB} \\ \text{a partir de la cual se determina su RR.} \end{array}$$

La RR de la RR

Buscamos todos los $\bar{G}$ tal que: $e^{i\bar{G} \cdot \bar{K}} = 1 \quad \forall \bar{K} \in \text{RR}$.

Como todo vector $\bar{R}$ de la RD satisface esto $\rightarrow$ todos ellos están en la RR de la RR.

¿Un vector que no sea de la RD? $\rightarrow \bar{r} = n_1 \bar{a}_1 + n_2 \bar{a}_2 + n_3 \bar{a}_3$ con al menos un factor no entero.

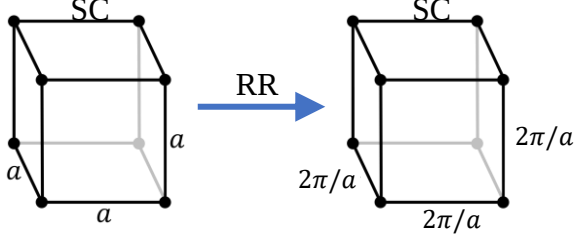
$$\rightarrow \bar{r} \cdot \bar{K} = 2\pi(k_1 n_1 + k_2 n_2 + k_3 n_3) \rightarrow e^{i\bar{r} \cdot \bar{K}} \neq 1 \longrightarrow \text{La RR de la RR es la RD}$$

Volumen de la CP de la RR

$$\begin{aligned} |\bar{b}_1 \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)| &= \left| \left(2\pi \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)} \right) \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3) \right| = \frac{2\pi}{|\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)|} |(\bar{a}_2 \times \bar{a}_3) \cdot (\bar{b}_2 \times \bar{b}_3)| \\ &= \frac{2\pi}{|\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)|} |(\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_2)(\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_3) - (\bar{a}_2 \cdot \bar{b}_3)(\bar{a}_3 \cdot \bar{b}_2)| = \frac{2\pi}{v} |(2\pi)(2\pi)| = \frac{(2\pi)^3}{v} \\ &\quad \underbrace{\quad}_{v \text{ (volumen de la CP de la RD)}} \quad \downarrow \quad \bar{b}_i \cdot \bar{a}_j = 2\pi \delta_{ij} \end{aligned}$$

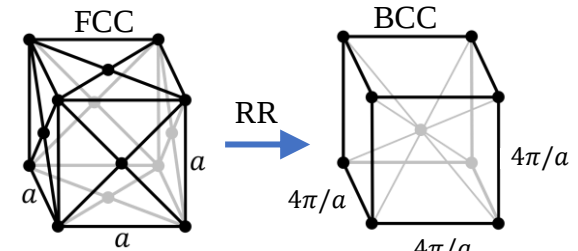
Red recíproca: ZB - Planos de la red

Ejemplos de RR: RR de una SC

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 = a\hat{x} \\ \bar{a}_2 = a\hat{y} \\ \bar{a}_3 = a\hat{z} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{RR}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_1 = \frac{2\pi a^2}{a^3} = \frac{2\pi}{a} \hat{x} \\ \bar{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \hat{y} \\ \bar{b}_3 = \frac{2\pi}{a} \hat{z} \end{array} \right.$$


Ejemplos de RR: RR de una FCC

$$\bar{b}_1 = 2\pi \frac{\bar{a}_2 \times \bar{a}_3}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)}; \bar{b}_2 = 2\pi \frac{\bar{a}_3 \times \bar{a}_1}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)}; \bar{b}_3 = 2\pi \frac{\bar{a}_1 \times \bar{a}_2}{\bar{a}_1 \cdot (\bar{a}_2 \times \bar{a}_3)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{a}_1 = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{y}) \\ \bar{a}_2 = \frac{a}{2}(\hat{x} + \hat{z}) \\ \bar{a}_3 = \frac{a}{2}(\hat{y} + \hat{z}) \end{array} \right. \xrightarrow{\text{RR}} \left\{ \begin{array}{l} \bar{b}_1 = \frac{4\pi}{a} \frac{1}{2}(\hat{y} + \hat{z} - \hat{x}) \\ \bar{b}_2 = \frac{4\pi}{a} \frac{1}{2}(\hat{z} + \hat{x} - \hat{y}) \\ \bar{b}_3 = \frac{4\pi}{a} \frac{1}{2}(\hat{x} + \hat{y} - \hat{z}) \end{array} \right.$$


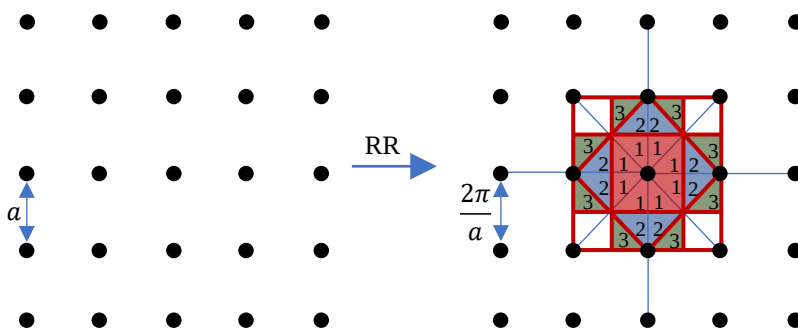
→ La RR de una BCC es una FCC.

Zonas de Brillouin

La CP de WS de la RR se conoce como la 1^{era} zona de Brillouin (1^{era} ZB).

Este nombre se usa solo en el espacio k . La 1^{era} ZB de una RB en el espacio real es la CP de WS de su RR.

→ 1^{era} ZB de una BCC es la CP de WS de una FCC, y viceversa.

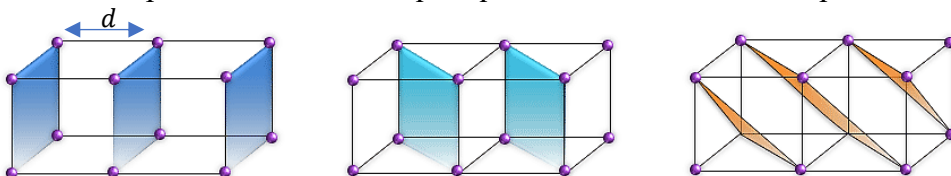


La n -ésima ZB es el conjunto de puntos a los que se llega desde el origen luego de cruzar $n-1$ planos bisectores. También es el conjunto de puntos que tienen al origen como su n -ésimo vecino más cercano.

Todas las ZB tienen el mismo volumen, que es el de la CP.

Planos de la red

Dada una RB, un “plano de la red” es aquel que contiene al menos tres puntos no colineales de la red.



Una familia de planos de la red es un conjunto de planos de la red paralelos e igualmente espaciados, que contienen todos los puntos de la RB.

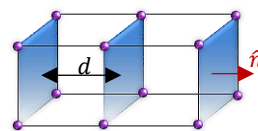
Red recíproca: Relación con planos de la red directa

Teorema

- 1) Para cualquier familia de planos de la red separados en una distancia d , existen vectores de la RR perpendiculares a ellos, el más corto de los cuales tiene una longitud $2\pi/d$.
- 2) De igual manera, para cualquier vector $\vec{K}$ de la RR existe una familia de planos de la red normales a $\vec{K}$ separados una distancia d , donde $2\pi/d$ es la longitud del vector de la RR más corto paralelo a $\vec{K}$.

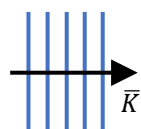
Demostración (1)

Dada una familia de planos de la red con vector normal unitario $\hat{n}$, separados en d .



¿Es $\vec{K} = 2\pi\hat{n}/d$ un vector de la RR?

$e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}}$ es constante en planos perpendiculares a $\vec{K}$ y tiene el mismo valor en planos separados $\lambda = \frac{2\pi}{K} = d$



Como uno de los planos de la RD contiene a $\vec{r} = \mathbf{0} \rightarrow e^{i\vec{K}\cdot\vec{r}} = 1 \forall \vec{r}$ en cualquiera de ellos.

Los planos contienen a todos los $\vec{R}$ de la RB $\rightarrow e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}} = 1 \forall \vec{R} \in \text{RD} \rightarrow \vec{K} \in \text{RR}$.

¿Es $\vec{K}$ es el vector normal más corto de la RR?

Un vector más corto daría lugar a una onda plana de longitud de onda más grande, y no podría tomar el mismo valor (en particular, 1) en todos los planos de la familia. $\rightarrow \vec{K}$ es el vector normal más corto de la RR.

Red recíproca: Relación con planos de la red directa - DRX

Índices de Miller

Los índices de Miller de un plano de la RD son las coordenadas del vector más corto de la RR normal a ese plano, para un dado conjunto de VP de la RR. Se utilizan para definir orientaciones de planos de la RD.

Un plano con índices h, k, l es normal al vector de la RR $h\bar{b}_1 + k\bar{b}_2 + l\bar{b}_3$; $h, k, l \in \mathbb{Z}$ y los índices no tienen factor común.

Interpretación geométrica en la RD

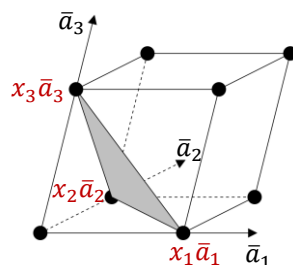
Un plano de la red de índices h, k, l definido por $\bar{K} = h\bar{b}_1 + k\bar{b}_2 + l\bar{b}_3$ está contenido en el plano continuo $\bar{K} \cdot \bar{r} = A$, para una constante adecuada A .

Este plano interseca a los ejes determinados por los VP de la RD $\bar{a}_i$ en $x_1\bar{a}_1, x_2\bar{a}_2, x_3\bar{a}_3$

Los x_i están determinados por la ecuación del plano $\bar{K} \cdot (x_i\bar{a}_i) = A$

$$\begin{aligned} \bar{K} \cdot \bar{a}_1 &= 2\pi h & x_1 &= A/2\pi h \\ \bar{K} \cdot \bar{a}_2 &= 2\pi k & x_2 &= A/2\pi k \\ \bar{K} \cdot \bar{a}_3 &= 2\pi l & x_3 &= A/2\pi l \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad h:k:l = \frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \frac{1}{x_3}$$

$(\bar{b}_i \cdot \bar{a}_j = 2\pi\delta_{ij})$



Convenciones

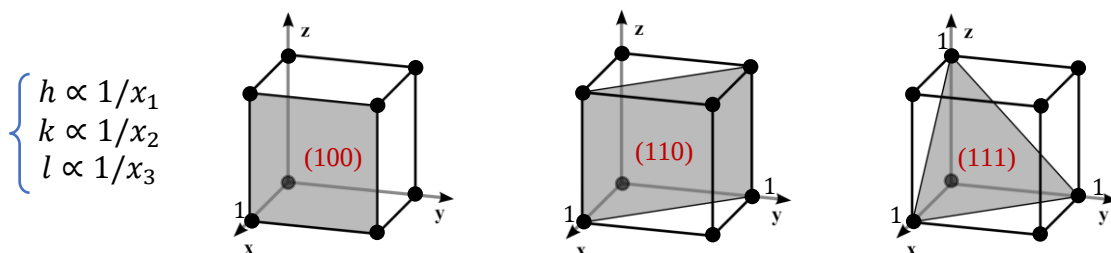
Los índices de Miller dependen de la elección de VP. Para la SC, BCC y FCC se suelen tomar CU cúbicas.

Los planos se especifican como $(h, k, l) \rightarrow$ Un plano con normal $\bar{b}_1 - \bar{b}_2 + \bar{b}_3$ se le llama el plano $(1, -1, 1)$. Alternativamente, $(1\bar{1}1)$ y se eliminan las comas.

Para especificar direcciones en la RD: $[n_1 n_2 n_3] \rightarrow n_1\bar{a}_1 + n_2\bar{a}_2 + n_3\bar{a}_3$ apunta en la dirección $[n_1 n_2 n_3]$.

Para especificar familias de planos de igual simetría: $\{hkl\} \rightarrow$ En un sistema cúbico los planos $(100), (010), (001)$ forman parte del conjunto de planos $\{100\}$.

Ejemplo: Planos en una SC



Difracción de rayos X

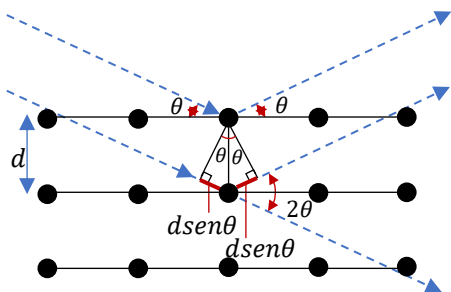
Las distancias interatómicas están en el rango de los Å (10^{-10} m).

$$\hbar\omega = \frac{hc}{\lambda} \sim 10^4 \text{ eV} \longrightarrow \text{Energías de rayos X.}$$

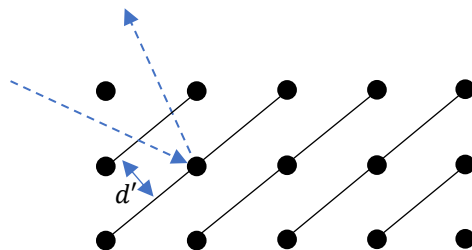
Difracción de rayos X: Formulaciones de Bragg y von Laue

Formulación de Bragg

Rayos reflejados especularmente por planos cristalinos.



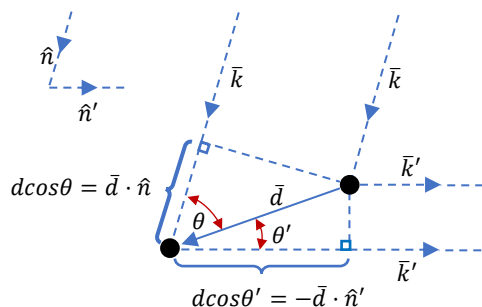
Interferencia constructiva: $2d \text{sen} \theta = n\lambda, n \in \mathbb{Z}$
 $(\lambda \leq 2d)$



Un haz que contenga un rango de longitudes de onda daría lugar a múltiples reflexiones.

Formulación de von Laue

Tratamos a cada átomo como un elemento dispersor que puede re-irradiar en todas las direcciones.



$$\bar{k} = 2\pi \hat{n} / \lambda$$

$$\bar{k}' = 2\pi \hat{n}' / \lambda \quad (k = k', \text{ dispersión elástica})$$

Diferencia de camino:

$$d \cos \theta + d \cos \theta' = \bar{d} \cdot (\hat{n} - \hat{n}')$$

Interferencia constructiva:

$$\bar{d} \cdot (\hat{n} - \hat{n}') = m\lambda, \quad m \in \mathbb{Z} \longrightarrow \bar{d} \cdot (\bar{k} - \bar{k}') = 2\pi m$$

Interferencia constructiva en toda la red:

$$\bar{R} \cdot (\bar{k} - \bar{k}') = 2\pi m, \quad \forall \bar{R} \in \text{RD}, m \in \mathbb{Z} \longrightarrow e^{i(\bar{k} - \bar{k}') \cdot \bar{R}} = 1, \forall \bar{R} \in \text{RD}$$

Necesitamos $\bar{k} - \bar{k}' = \bar{K} \in \text{RR}$ (el cambio en vector de onda debe ser un vector de la RR)

Condición de Laue

Formulación alternativa de von Laue

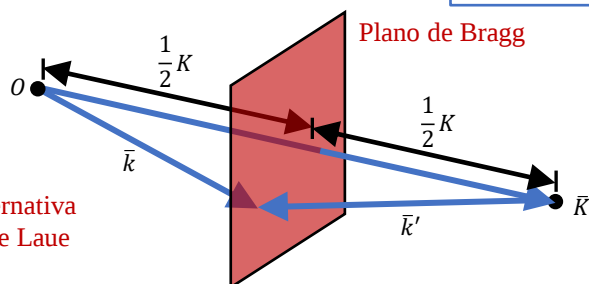
$$\bar{K} = \bar{k} - \bar{k}' \in \text{RR} \longrightarrow k = |\bar{k} - \bar{K}|$$

$$k = k'$$

$$\longrightarrow k^2 = k^2 - 2\bar{k} \cdot \bar{K} + K^2 \longrightarrow 2\bar{k} \cdot \bar{K} = K^2$$

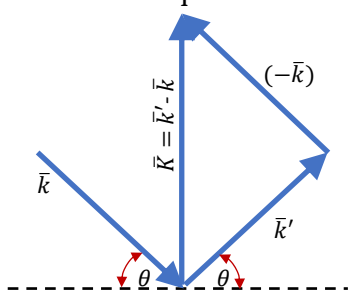
$$2\bar{k} \cdot (K\hat{K}) = K^2 \longrightarrow \bar{k} \cdot \hat{K} = \frac{1}{2}K$$

Formulación alternativa de la condición de Laue



Equivalencia entre las formulaciones de Bragg y von Laue

Partimos de que se satisface la condición de Laue.



$$\bar{K} = n\bar{K}_0, n \in \mathbb{Z}$$

$\bar{K}_0$: vector de la RR más corto // $\bar{K}$

$$K_0 = 2\pi/d \longrightarrow K = 2\pi n/d$$

(Distancia entre planos sucesivos de la RD definidos por $\bar{K}_0$, por teorema.)

$$K = 2k \text{sen} \theta \longrightarrow k \text{sen} \theta = \pi n/d$$

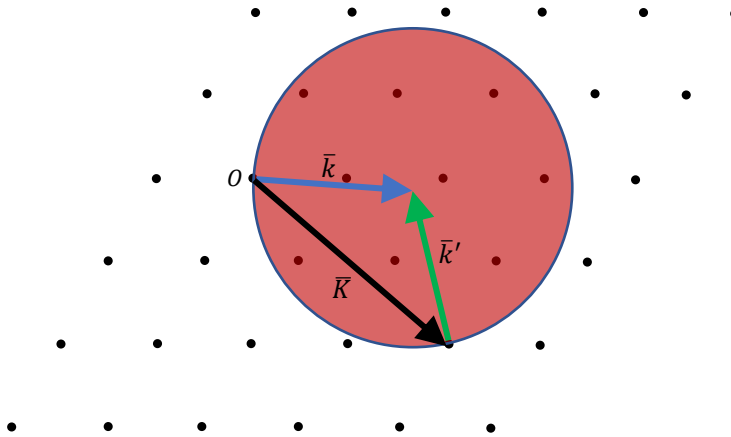
$$k = 2\pi/\lambda \longrightarrow 2d \text{sen} \theta = n\lambda$$

Un máximo de difracción de Laue corresponde a un cambio de vector de onda dado por $\bar{K} \in \text{RR}$, que equivale a una reflexión de Bragg por los planos de la RD perpendiculares a $\bar{K}$. El orden n es el cociente entre K y K_0 .

Difracción de Rayos X: Construcción de Ewald y Métodos

Construcción de Ewald (espacio k)

Construimos una esfera centrada en la punta de $\bar{k}$ (vector de onda incidente), de radio k .



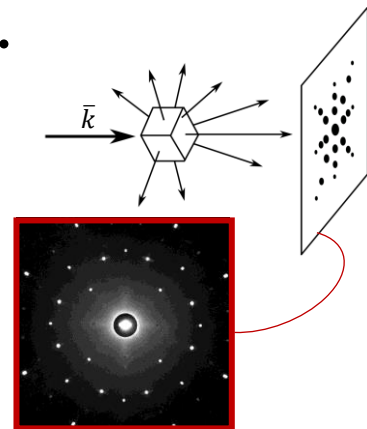
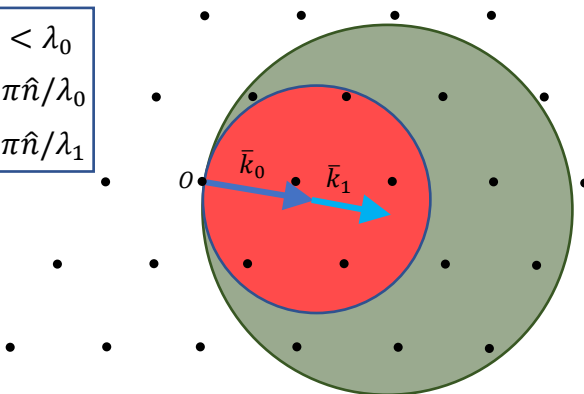
La condición de Laue se satisface sólo si la superficie de la esfera interseca a un punto de la RR (además del origen).

En general no habrá un punto de la RR intersecando a la superficie de la esfera de Ewald.

Método de Laue

Se utiliza un haz de rayos X no monocromático para asegurar la ocurrencia de máximos de Bragg.

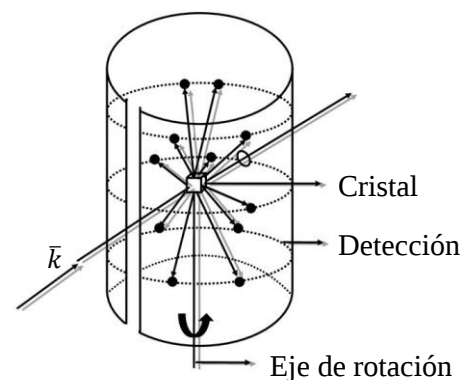
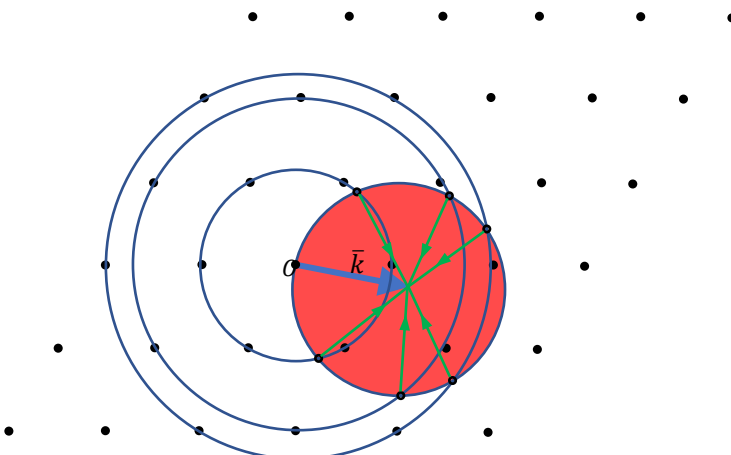
$$\begin{aligned}\lambda_1 &< \lambda < \lambda_0 \\ \bar{k}_0 &= 2\pi\hat{n}/\lambda_0 \\ \bar{k}_1 &= 2\pi\hat{n}/\lambda_1\end{aligned}$$



Se observan máximos de Bragg para los puntos ubicados entre las dos esferas.

Método del cristal rotante

Se utiliza un haz de rayos X monocromático y se rota continuamente al cristal.



Se producen reflexiones de Bragg cuando puntos de la RR intersecan la superficie de la esfera.