Choques relativistas

May 16, 2025

1 Ejercicio 5

En un choque relativista, sabemos que el cuadrimomento P^μ se conserva antes y después del mismo. Ademas, recordemos que la cantidad $P^\mu P_\mu$ es un invariante de Lorentz. Es decir, esta cantidad vale lo mismo en cualquier sistema de referencia inercial. Luego, tenemos

$$P^\mu P_\mu\big|_{AC} = P^\mu P_\mu\big|_{DC} \,, \tag{1}$$

donde AC refiere a *antes del choque* y DC a *después del choque*. Notemos que, debido a la invarianza de Lorentz, la ecuacion anterior puede ser usada en distintos sistemas de referencia a cada lado de la ecuación. Esto nos va a facilitar el calculo en distintas situaciones.

Por ejemplo, empecemos estudiando el caso en que dos partículas de masa $m_1 = m_2$ chocan entre si, y se crean dos partículas de masa $m_3 = m_4$. Vamos a plantear el choque en dos sistemas de referencia distintos: uno donde el centro de masa esta en reposo, y otro donde m_2 esta en reposo.

Caso $V_{CM} = 0$

En el primer caso tenemos que las partículas se mueven con $\pm\vec{v}$. Luego, dado que las masas son iguales, tenemos que $P_1^i = -P_2^i$, por lo que $P_T^i = P_1^i + P_2^i = 0$. Esto nos dice que el momento total luego del choque también debe anularse, por lo que $P_3^i = -P_4^i$. Notemos que en la igualdad anterior estamos usando indices latinos, ya que nos referimos solo al momento espacial de cada partícula. Luego, tenemos que

$$\begin{aligned} P^\mu P_\mu\big|_{AC} &= g_{00}(P_1^0 + P_2^0)^2 + g_{ij}(P_1^i + P_2^i)(P_1^j + P_2^j) && (2)\\ &= (\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2)^2 && (3)\\ &= 4\gamma_1^2 m_1^2 && (4)\end{aligned}$$

donde en el ultimo paso usamos que $m_1 = m_2$, y que γ es una función de v^2, por lo que $\gamma_1 = \gamma_2$.

Luego del choque tenemos una situación similar, por lo que

$$
\begin{aligned}
P^\mu P_\mu\big|_{DC} &= g_{00}(P_3^0 + P_4^0)^2 + g_{ij}(P_3^i + P_4^i)(P_3^j + P_4^j) && (5)\\
&= (\gamma_3 m_3 + \gamma_4 m_4)^2 && (6)\\
&= 4\gamma_3^2 m_3^2 && (7)
\end{aligned}
$$

donde nuevamente usamos que $m_3 = m_4$, y que γ es una función de v^2, por lo que $\gamma_3 = \gamma_4$. Finalmente, usando la Eq. (1), obtenemos que la velocidad inicial se relaciona con las masas y la velocidad de salida mediante

$$\gamma_1 = \frac{m_3}{m_1}\gamma_3 \,. \tag{8}$$

Nos interesa calcular la energía umbral de la reacción. Es decir, la energía minima necesaria para crear m_3 y m_4. Para esto, primero notemos que la energía es cinética, por lo que la vamos a calcular a partir de la velocidad de las partículas. Segundo, nos interesa la energía mínima, y esto lo pedimos buscando la velocidad inicial tal que las partículas m_3 y m_4 se creen en reposo, por lo que $\gamma_3 = 1$. La energía cinética relativista la podemos pensar como la primera corrección a la energía total a velocidades bajas. Partiendo de la definicion de la energía relativista $E = \gamma m$, en el limite de bajas velocidades tenemos que

$$E = \gamma m \sim m + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}\left(\frac{v}{c}\right) . \tag{9}$$

Luego, podemos definir a la energía cinética como

$$T \equiv \gamma m - m \tag{10}$$

En nuestro caso, tenemos que

$$T = m_3 - m_1 \,. \tag{11}$$

Este resultado ya nos restringe el espacio de parámetros para el cual el proceso se puede dar. Si $m_1 > m_3$, obtenemos que $T < 0$, lo que es absurdo ya que la energía cinética es una cantidad siempre definida positiva. Luego, lo que nos dice este resultado es que

- $m_3 > m_1 \longrightarrow$ necesito aplicar una cierta $v \neq 0$ en las partículas iniciales para que el proceso sea posible. Es decir, necesito inyectarle energía al sistema.

- $m_1 > m_3 \longrightarrow$ la energía umbral no esta definida, ya que como las partículas iniciales son mas pesadas que las finales, el proceso se puede dar espontáneamente (un decaimiento, por ejemplo).

Caso $v_1 = v$**,** $v_2 = 0$

Ahora miremos el caso donde $v_1 = v$ y $v_2 = 0$. Empezamos calculando el invariante (Eq. 1) para antes del choque,

$$P^\mu P_\mu|_{AC} = g_{00}(P_1^0 + P_2^0)^2 + g_{ij}(P_1^i + P_2^i)(P_1^j + P_2^j) \tag{12}$$

$$= (\gamma_1 m_1 + m_1)^2 - m_1^2\gamma_1^2 v_1^2 \tag{13}$$

$$= 2m^2(1+\gamma)\,. \tag{14}$$

Si planteamos lo mismo luego del choque, tenemos que

$$P^\mu P_\mu|_{DC} = g_{00}(P_3^0 + P_4^0)^2 + g_{ij}(P_3^i + P_4^i)(P_3^j + P_4^j) \tag{15}$$

$$= m_3^2(\gamma_3 + \gamma_4)^2 - (P_3^i + P_4^i)^2\,. \tag{16}$$

Nuevamente nos preguntamos por la energía umbral, por lo que buscamos la velocidad inicial necesaria para que se creen m_3 y m_4 en reposo, por lo que $P_3^i = P_4^i = 0$, y $\gamma_3 = \gamma_4 = 1$. Podemos despejar la Eq. (1) para este caso, y obtenemos

$$\gamma_1 = \frac{m_3^2 - m_1^2}{m_1^2}\,. \tag{17}$$

Notemos que valen las mismas conclusiones que antes! Sin embargo, podemos ver que este caso es menos eficiente que el caso donde el centro de masa inicial esta en reposo. En general, en estos procesos vamos a querer crear partículas mucho mas pesadas que las iniciales, por lo que $m_3 \gg m_1$ (ver el ejercicio 11). Luego, a primer order tenemos que $\gamma_1 \sim m_3^2/m_1^2$. Es decir, la velocidad necesaria para que se de el proceso escala como el cuadrado de m_3, mientras que en el caso donde $V_{CM} = 0$, la velocidad escala solo linealmente. Esto tiene que ver con el hecho de que, por la conservacion del momento espacial, en este caso no podemos crear partículas cuyo centro de masa este en reposo. Luego, para crear a m_3 y m_4, vamos a necesitar la energía "de masa" más la energía cinética para que el centro de masa siga en movimiento. En cambio, en el caso $V_{CM} = 0$ esta ultima energía cinética no es necesaria. Este es el motivo por el cual, en general, los aceleradores de partículas tienen dos haces que colisionan entre si, en lugar de un solo haz que colisiona contra un blanco en reposo.

2 Ejercicio 11

En este ejercicio vamos a aplicar lo que vimos en el ej 5, para el caso de las *resonancias*. Las resonancias son procesos del tipo

$$1 + 2 \to X \to 1 + 2\,, \tag{18}$$

donde X es una partícula inestable que se crea en medio del proceso, y rápidamente vuelve a decaer en las partículas que la generan. Las resonancias se manifiestan como picos en el grafico de la seccion eficaz de un proceso, en funcion de la energia (ver la figura).

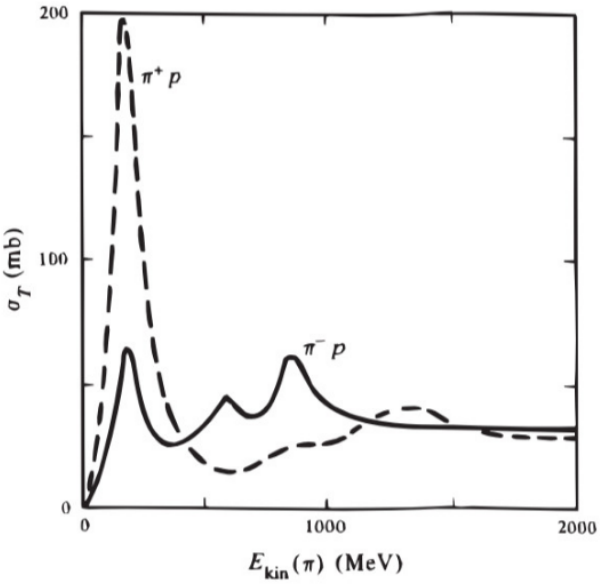

Figure 1: Seccion eficaz de procesos del tipo $\pi + p \to \pi + p$, para π^+, π^- y π^0. Estos procesos de scaterring estan asociados a la produccion de la particula Δ.

Veamos el caso particular en que un protón que se mueve a $v_1 = v$ choca a un antiproton que esta en reposo. Queremos calcular la energía mínima para que se cree un bosón de Higgs (que va a ser la partícula X del caso anterior). Si repetimos la cuenta del ejercicio pasado para este caso particular, vemos que

$$P^\mu P_\mu|_{DC} = g_{00}(P_1^0 + P_2^0)^2 + g_{ij}(P_1^i + P_2^i)(P_1^j + P_2^j) \tag{19}$$

$$= (\gamma_1 m_1 + m_1)^2 - m_1^2\gamma_1^2 v_1^2 \,. \tag{20}$$

Luego del choque vamos a tener una unica particula del tipo X, por lo que el invariante resulta

$$P^\mu P_\mu|_{DC} = g_{00}{P^0}_x^2 + g_{ij}P_x^i P_x^j \tag{21}$$

$$= (\gamma_x m_x)^2 - m_x^2\gamma_x^2 v_x^2 \,. \tag{22}$$

Nuevamente, nos preguntamos por la energia umbral para que se pueda dar el proceso. Luego, estudiamos el caso $v_x = 0$, que corresponde a la energia minima. Despejando la velocidad inicial en este regimen, tenemos que

$$\gamma_1 = \frac{m_x^2 - m_1^2 - m_2^2}{2m_1 m_2} \,. \tag{23}$$

Ahora metamos algunos valores. Si nos preguntamos por la producción de un Higgs a partir de un par protón-antiprotón, tenemos que $m_x = m_{higgs} = 125\,\text{GeV}$, mientras que $m_p = m_{\bar{p}} \sim 1\text{GeV}$. Luego, si calculamos la energía cinética obtenemos un valor aproximado de $T \sim 7\,\text{TeV}$, y una velocidad inicial para el protón de $v \sim 0.9999999c$. Pueden buscar los valores que usa el LHC para crear un Higgs, y compararlo con lo que calculamos acá.