

ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

VERANO 2025

PRÁCTICA 5: ECUACIONES DE ONDA RELATIVISTAS: DIRAC Y KLEIN-GORDON

A pesar de que los intentos por construir una mecánica cuántica relativista para un sistema con un número fijo de partículas no funcionaron, el estudio de las ecuaciones de onda invariantes de Lorentz (Dirac y Klein-Gordon) es fundamental para construir e interpretar el modelo estandar desarrollado en el marco de una teoría cuántica de infinitos grados de libertad.

1 Cuestiones elementales de la ecuación de Dirac y Klein-Gordon

1. 🐰 Considere la ecuación de Klein-Gordon (KG) para un campo ϕ complejo:

$$\partial^\mu \partial_\mu \phi + m^2 \phi = 0$$

- (a) Considerando la solución $e^{\pm ik \cdot x}$ (con $k \cdot x \equiv k^\mu x^\nu \eta_{\mu\nu} = k^\mu x_\mu$), halle la relación de dispersión que debe cumplir k^μ . Despeje $\omega(k) \equiv |k^0|$ en términos de k^i .
- (b) En los intentos por pensar a ϕ como función de onda, los autovalores de $i\partial_\mu$ se interpretarían como el cuadrimomento del estado. Halle estos autovalores con su signo adecuado para las soluciones de onda plana anteriores, identificando las soluciones de energía positiva y negativa con $e^{\pm ik \cdot x}$
- (c) A fin de ver en que limite una solución de la ecuación de KG es solución de la ecuación de Schrödinger, considere una solución $\phi_{\vec{k}}$ de KG de energía positiva y momento definido \vec{k} . Verifique que para momentos espaciales pequeños, es decir, para $|\vec{k}| \ll m$, $\psi \equiv e^{+imt} \phi_{\vec{k}}$ satisface aproximadamente la ecuación de Schrödinger para una partícula libre de masa m . Por qué es necesario el factor e^{+imt} ?

2. 🐰 Dadas las matrices

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

muestre que definiendo $\gamma^0 \equiv \beta$ y $\gamma^i \equiv \beta \alpha^i$ se verifica

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}.$$

(Estas matrices γ constituyen la representación de Dirac del Algebra de Clifford.). Escriba explícitamente algunas de esas relaciones para entender lo que significan.

3. 🐰 Sea la ecuación de Dirac



o escrita en forma más explicita,

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0.$$

(a) Proponiendo una solución del tipo

$$\psi(x) = Ae^{-i(k^0 t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{pmatrix} \xi \\ \phi \end{pmatrix},$$

muestre que, para que exista solución no nula, k^μ debe satisfacer: $k^2 = m^2$.

(b) Halle las soluciones independientes en el caso particular en que $\vec{k} = 0$.

(c) Encuentre, para k^μ generico (que cumpla $k^2 = m^2$, pues de lo contrario no seria solución) la relación entre las dos componentes superiores y las inferiores del spinor de Dirac

(Ayuda: será útil recordar que las matrices de Pauli también cumplen una suerte de álgebra de Clifford, sustituyendo $\eta_{\mu\nu}$ por δ_{ij} . Es decir:

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}1_{2 \times 2}.$$

Usando esto, se puede ver que: $(\vec{\sigma} \cdot \vec{k})^2 = |k|^2$. Verifiquelo.)

4. Verificar que las siguientes expresiones con soluciones de la ecuación de Dirac con momento definido:

$$u_1 = e^{-i\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\omega + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = e^{-i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\omega + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$v_1 = e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\omega + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = e^{i(\omega_{\vec{k}} t - \vec{k} \cdot \vec{x})} \begin{pmatrix} \frac{\vec{k} \cdot \vec{\sigma}}{\omega + m} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas, halle los autovalores de $i\partial_\mu$ e identifique el momento \vec{p} y la energía E (con sus signos) a partir del k^μ . Tenga en cuenta que los autovalores de $i\partial_\mu$ corresponden a la versión con índices abajo: p_μ , es decir a: $(E, -\vec{p})$.

5. A partir de las soluciones para partícula libre de la ecuación de Dirac con $E > 0$, verifique que en el límite no relativista las componentes inferiores (o débiles) del espinor de Dirac son de orden v/c respecto de las superiores (o fuertes), y que estas últimas tienen la forma de una solución de Schrödinger para partícula libre multiplicadas por un espinor de Pauli de dos componentes.

6. A partir de $\rho_{Dirac} = \psi^\dagger \psi$ y $\vec{J}_{Dirac} = \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi$ o en forma compacta: $j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$, y usando la ecuación de Dirac, muestre que se satisface la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho_{Dirac}}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_{Dirac} = 0$$

que, escrita en otra forma, es:

$$\partial_\mu j^\mu = 0$$

.

2 Spin asociado al espinor de Dirac

7. Hasta el momento, no hemos usado que el espinor de Dirac tenga asociado un momento angular intrínseco. A fin de empezar a ver esto, considere los siguientes items.

- (a) Halle el Hamiltoniano de Dirac que permite escribir la ecuación de Dirac como una ecuación de Schrödinger,

$$i\partial_t \psi = H\psi$$

- (b) Demuestre que el Hamiltoniano de Dirac no conmuta con el operador de impulso angular orbital \vec{L} , pero sí lo hace con el de impulso angular total $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, con \vec{S} dado por

$$\vec{S} \equiv \frac{1}{2} \vec{\Sigma}$$

con

$$\vec{\Sigma} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

- (c) Muestre que el operador \vec{S} definido de esa manera satisface el álgebra de impulsos angulares, y además tiene autovalores $\pm 1/2$ ($\pm \hbar/2$ en unidades anti-naturales).

8. A fin de incluir la interacción con el campo electromagnético, una modificación (invariante relativista) de la ecuación de Dirac es:

$$(\gamma^\mu (i\partial_\mu - ieA_\mu) - m)\Psi = 0$$

Notando que $A_\mu = (\phi, -\vec{A})$ y considerando un espinor con autovalor E (positivo) de $i\partial_0$, muestre que en el límite no relativista y de campos electromagnéticos débiles ($\phi \ll E \approx m$) las componentes inferiores del espinor pueden despejarse algebraicamente en términos de las superiores y estas últimas (ψ) satisfacen la ecuación de Schrödinger-Pauli que aprendió en Mecánica Cuántica,

$$\left(\frac{1}{2m} (\vec{p} - e\vec{A})^2 + q\Phi - g \frac{q}{2m} \frac{1}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} \right) \psi = E\psi,$$

donde g es el factor giromagnético del electrón. Si hizo las cuentas bien, habrá llegado a que $g = 2$.

3 Comportamiento de un espinor ante transformaciones de Lorentz

9. Como precalentamiento para el ejercicio siguiente. Para ello considere la expresión matricial de una transformación de Lorentz Λ escrita en la forma $\Lambda = e^{\alpha A}$ que realiza la transformación $X \rightarrow X' = \Lambda X$

(a) A partir de la condición de invariancia de la norma Minskowskiana de X :

$$X^T \eta X = (X')^T \eta X'$$

muestre, quedándose a primer orden en α , que A debe cumplir:

$$A^T = -\eta A \eta$$

(b) A partir de eso, muestre que para boost A es simétrica mientras para rotaciones es antisimétrica.

(c) Verifique explícitamente que con

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Λ es un boost en x . Relaciones el parámetro usual de un boost (la velocidad relativa del sistema de referencia) con este parámetro α

Observación: Es útil describir los generadores con un par de índices que denoten a los ejes que mezclan. De esta forma, un generador de boost puede escribirse como J_{0i} . Por una cuestión de elegancia, se duplican los generadores, definiendo el $J_{i0} = -J_{0i}$. Esto se extiende a los generadores de rotaciones. El generador de rotaciones en torno al eje 3 se se escribirá como $J_{12} = -J_{21}$.

10. El espinor de Dirac transforma con una matriz S_Λ ante transformaciones Λ del grupo de Lorentz (es decir, rotaciones y boosts). S_Λ se obtiene exponenciando los generadores $\Sigma^{\alpha\beta} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\alpha, \gamma^\beta]$ (que forman cierta representación del algebra de Lorentz). Es decir, la transformación del espinor se obtiene mediante $S_\Lambda \equiv e^{-\frac{i}{2}\omega_{\alpha\beta}\Sigma^{\alpha\beta}}$, donde $\omega_{\alpha\beta}$ son los parámetros (antisimétricos en $\alpha\beta$) de la transformación de Lorentz: ω_{ij} parametrizan una rotación en el plano ij y ω_{0i} parametriza un boost a lo largo del eje i

(a) Halle la expresión explícita de los generadores Σ para el caso de una rotación en torno a un eje generico (usando el ejercicio 2).

(b) Idem para el caso de un boost.

11. Considere una transformación de Lorentz $x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ que transforma al espinor ψ según $\psi \rightarrow \psi'(x') = S_\Lambda \psi(x)$ siendo S la matriz definida previamente. Tomando por válida la igualdad $S_\Lambda^{-1} \gamma^\mu S_\Lambda = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu$, muestre que

(a) $S^\dagger \gamma^0 = \gamma^0 S^{-1}$

- (b) $\bar{\psi}' = \bar{\psi}S^{-1}$ con $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$.
- (c) $\bar{\psi}\psi$ es invariante de Lorentz.
- (d) $j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$ es un cuadrivector.

Observación: j^μ es un cuadrivector que se usara mucho más adelante. Note que esta formado con combinaciones cuadraticas de un espinor, justificando la idea de el espinor como "una raiz cuadrada de un vector". En el caso del spinor ordinario visto en teorica 2, esa combinación cuadratica es justamente aquella que fabrica la representación de spin 1!

4 Paridad, helicidad y quiralidad

12. Muestre que para las soluciones de ondas planas de la ecuación de Dirac (ψ), $\tilde{\psi}$ definida como $\tilde{\psi}(t, \vec{x}) = \psi(t, -\vec{x})$ no es solución pero que $\gamma_0\tilde{\psi}$ si lo es. Esto último es mas facil mostrarlo usando el hecho de que ψ sea solución , sin especializar al caso de onda plana .
13. El ejercicio anterior motiva la definición de la operación paridad \mathcal{P} definida como $\mathcal{P}\psi = \gamma_0\psi \circ I$ siendo I la operación de inversión espacial. Verifique que ante al acción de \mathcal{P} , j^μ y $\bar{\Psi}\Psi$ se comportan como lo hacen los cuadrivectores y escalares ante paridad.
14. Una noción importante relacionada con paridad es la de *quiralidad*. El espinor de Dirac de 4 componentes se puede pensar como suma de dos espinores que tienen una *quiralidad definida*. Definiendo $\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$, muestre que:
 - (a) γ_5 es hermítico, de cuadrado unitario, y anticonmuta con las cuatro matrices de Dirac. γ^5 es conocido como el operador de quiralidad.
 - (b) Muestre que los operadores $P_\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \gamma^5)$ son proyectores: $P_\pm^2 = P_\pm$, $P_+P_- = P_-P_+ = 0$, $P_+ + P_- = 1$. Muestre además que P_+ y P_- proyectan sobre los autoespacios de autovalores $+1$ y -1 de γ_5 respectivamente, denominados de quiralidad *Right* y *Left*.
 - (c) Muestre que la operación paridad convierte un espinor izquierdo (autovector de γ_5 con autovalor -1) en uno derecho (autovector de γ_5 con autovalor $+1$) y viceversa.
15. 🐰 Definiendo $\psi_R = P_+\psi$ y $\psi_L = P_-\psi$, muestre que:
 - (a) la ecuación de Dirac en el caso masivo puede escribirse como dos ecuaciones acopladas para ψ_R y ψ_L
 - (b) Muestre que para partículas muy livianas o ultrarelativistas, la ecuación de Dirac se desacopla en dos ecuaciones diferentes para ψ_L y ψ_R . Como consecuencia de lo anterior, muestre que para un espinor de masa cero es posible tener soluciones de quiralidad definida.
16. Muestre que:
 - (a) $\bar{\psi}\gamma^5\psi$ es un pseudoescalar.

(b) $\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma^5\psi$ es un pseudo-cuadrivector.

17. Muestre que el operador de helicidad $\hat{h} \equiv \frac{1}{2}\vec{\Sigma} \cdot \hat{P}$ con $(\hat{P} = \vec{P}/|\vec{P}|)$, que da la proyección del spin en la dirección de movimiento, conmuta con el Hamiltoniano de Dirac y con el operador de impulso \vec{P} . Ayuda: haga actuar el conmutador sobre una base de autoestados de \vec{P} .
18. Demuestre que en el límite altamente relativista, la acción de γ^5 sobre los espinores $u(\vec{p})$ es la misma que la del operador de helicidad, es decir

$$\frac{1}{2}\gamma^5 u(\vec{p}) = \hat{h}u(\vec{p}).$$

Por otro lado, verifique que para las soluciones de tipo v (antipartículas) quiralidad y helicidad son opuestas

$$\frac{1}{2}\gamma^5 v(\vec{p}) = -\hat{h}v(\vec{p}).$$

19. La helicidad de una partícula masiva no es un concepto invariante de Lorentz. Mas específicamente, no es invariante ante boost. Para una partícula de masa cero, sin embargo, lo es. A fin de ver esto:
- (a) Argumento, de forma heurística, que para una partícula masiva es posible hallar un cambio de sistema de referencia tal que la velocidad de la partícula cambie de signo pero no así su rotación intrínseca.
- (b) Usando la identificación de h con γ_5 para el caso sin masa, muestre que γ_5 conmuta con $S(\Lambda)$ y por tanto la helicidad es invariante de Lorentz.