ESTRUCTURA DE LA MATERIA 4

VERANO 2025

PRÁCTICA 6: FORMULACIÓN LAGRANGIANA DE MODELOS RELATIVISTAS

La formulación Lagrangiana de las ecuaciones relativistas es clave para la construcción de las *teorías cuánticas de campos* (QFT). Los campos que aparecen aquí *no deben interpretarse como funciones de onda*; las ecuaciones relativistas derivadas de estos Lagrangianos, clásicas, actúan como semillas para llegar a la versión cuántica por medio de un proceso de cuantización. Del lagrangiano pueden leerse ciertas simetrás, muchas de las cuales se preservarán al cuantizar. Además de la simetría ante transformaciones de Poincare, los términos típicos del Lagrangiano del modelos estandard presentan *simetrías internas*, es decir, simetrías ante cambios en los campos que no afectan a sus argumentos (el punto del espacio-tiempo del cual dependen). En la versión cuántica, la energía y momento de los campos esta discretizada en términos de cuantos de energía-momento, que obedecen las reglas de dispersión de particulas relativistas. Si bién el estudio del proceso de cuantización va más alla del alcance de este curso, se comenzará en esta guía a dibujar *diagramas de Feynman* correspondientes a los términos de interacción, los cuales son representaciones graficas de contribuciones a la amplitud de Scattering, de un gran valor heurístico.

1 Consideraciones preliminares

Si los ejercicios de esta sección les resultan demasiado abstractos, quédese con las afirmaciones que se hacen. A fin de hacer mas simple la escritura, haremos algunos abusos de lenguaje. Por ejemplo, en vez de referirnos a $T_{\mu\nu}$ como las componentes de un tensor T, diremos a veces ”el tensor $T_{\mu\nu}$” (lo cual es un horror si se lo toma literalmente, dado que $T_{\mu\nu}$ es un número). Es importante aclarar que los indices con letras griegas μ,ν,ρ (salvo que se indique lo contrario) cubren todas las variables de un espacio D dimensional, independientemente de si la métrica es Euclideana o Minkowskiana. Sin embargo, en los casos de interés, se entenderá que hay una métrica Minkowskiana y que hay una variable especial, el tiempo, denotada por $\mu = 0$ y que $D = 4$, de forma tal que $\mu = 0,1,...,D-1$

1. **Delta de Kronecker como tensor**: en la derivación de las ecuaciones de movimiento es necesario lidiar con indices y contracciones, y en especial con un tensor de tipo 1-1 con un indice contravariante y uno covariante [1]. Recordemos que un tensor de este tipo de componentes $T^{\mu}{}_{\nu}$, ante un cambio general de coordenadas $x^\mu \to \tilde{x}^\mu$ transforman como:

$$\tilde{T}^{\mu}_{\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\nu} T^{\sigma}_{\rho} \tag{1}$$

   Las componentes de un tensor genérico cambian ante cambios de coordenadas, a diferencia de un escalar que es invariante. Sin embargo, aunque parezca extraño, hay algunos tensores que tienen la propiedad de quedar invariantes ante algunas o todas las transformaciones de coordenadas. Tal es el caso de la *delta de Kroenecker* que es un tensor invariante ante cambios generales de coordenadas.

[1] En general diremos que el tensor es ”de tipo $p-q$ si tiene p indices contravariantes y q indices covariante)

(a) Muestre que si aplica 1 al tensor T de rango 1-1 de componentes $T^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ (definido como es usual: 1 si $\mu = \nu$ y 0 en el resto de los casos) las componentes de T en el nuevo sistema son las mismas.

(b) Muestre que no ocurre lo mismo para el tensor covariante de rango 2 de componentes $W_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$. Basta considerar algún cambio particular de coordenadas (Piense en alguno simple, como el de un cambio de escala en las coordenadas)

(c) Muestre que en el caso en que la transformación es una rotación, tanto con la definición de la delta de Kroenecker como componentes de un tensor de rango 1-1 o 0-2 o 2-0, esas componentes quedan invariantes (lo que da cuenta del hecho de que nunca nos hemos preocupado de eso)

2. En este ejercicio veremos algunas manipulaciones simples, que estarán inmersas en cuentas más largas. Debe tenerse presente la notación : $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, mientras que $\partial^\mu \equiv \eta^{\mu\nu}\partial_\nu$

(a) Muestre que si ϕ es un escalar, $\partial_\mu \phi$ es la componente de un tensor de rango 1 covariante.

(b) Muestre que si $L[\phi]$ y ϕ son escalares, $\frac{\partial L}{\partial(\partial_\mu \phi)}$ es la componente μ de un tensor contravariante.

(c) Muestre que $\frac{\partial(\partial_\mu \phi)}{\partial_\nu \phi} = \delta^{\nu}_{\mu}$. Note que no solo es cuestión de mostrar que el miembro izquierdo da 0 o 1 sino que la posición de esos indices es la correcta.

2 Ecuaciones de movimiento y corrientes conservadas

3. Dada la densidad lagrangiana de un campo escalar complejo,

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi,$$

(a) Halle las ecuaciones de movimiento utilizando las variables parte real e imaginaria de ϕ. Muestre que es equivalente (y mas simple) hallar las ecuaciones de movimiento utilizando las variables ϕ y ϕ^*. Demuestre que para un lagrangiano genérico que sea real ambos procedimientos dan lugar a ecuaciones equivalentes.

(b) Halle las simetrías del Lagrangiano y diga que grupo forman. Halle las corrientes de Noether correspondientes a las simetrías internas.

(c) ¿Como se modifican los puntos 1 y 2 si se agrega al lagrangiano el término $-V(\phi\phi^*)$?

(d) Considere ahora el Lagrangiano:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \, \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi \phi,$$

para un campo ϕ *real*. Repita el análisis anterior de los primeros tres items. Note el factor $\frac{1}{2}$ global diferencia. (Si bién es irrelevante para las ecuaciones de movimiento, se introduce para que el momento canónico conjugado sea $\partial_t \phi$).

4. Considere el Lagrangiano:

$$L = \bar{\psi}\gamma^{\mu} i\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi$$

.

   (a) Halle las ecuaciones de movimiento, variando respecto a $\bar{\psi}$

   (b) Compare con la que obtiene variando respecto a ψ.

   (c) Halle las simetrías de este lagrangiano y obtenga la corriente de Noether asociada a las simetrías internas.

5. Las simetrías consideradas en el ejercicio anterior eran del tipo que denominamos ”internas”; provienen de cambios en el o los campos del lagrangiano que no se meten en el argumento espacio-temporal. Distinto es el caso de las transformaciones ”externas” (es entendible que resulte extraña la jerga), en el que el campo es compuesto con una función del espacio tiempo. Por ejemplo, para el caso de un campo escalar, los lagrangianos de interés serán aquellos invariantes ante la siguiente transformación: $\phi \to \tilde{\phi}(x) = \phi(x+\xi)$, siendo ξ un cuadrivector cualquiera constante. En componentes, esta única transformación comprende 4 transformaciones independientes: $x^{\mu} \to x^{\mu} + \xi^{\mu}$ explícitamente.

   (a) ¿Cuales son las expresiones de ξ que corresponden a la simetría ante traslaciones en cada una de las direcciones, espaciales y temporales?

   (b) Considere el lagrangiano del campo escalar del ejercicio anterior. ¿Como ve que es invariante ante traslaciones espaciales o temporales? ¿Que modificación podría hacerle para que no sea invariante ante traslaciones?

   (c) Halle la expresión de la carga conservada asociada a la invariancia respecto a traslaciones temporales y verifique que es definida positiva. Para ello, tenga en cuenta que la expresión de la corriente de Noether tiene un término extra respecto al usado en las simetrías internas

   La importancia de este ejercicio es la conclusión de que aún para un campo con soluciones de frecuencia de ambos signos (positivas y negativas) la energía (como carga de Noether) es definida positiva. Esto persistirá a nivel cuántico.

6. Considere los siguientes Lagrangianos que describen a dos espinores de Dirac ψ_1 y ψ_2 y un campo escalar real ϕ masivo interactuantes:

$$\begin{aligned} L_A &= \overline{\psi}_1 i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_2 + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_2 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_B &= \overline{\psi}_1 i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_1 + \overline{\psi}_2 i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi_2 + \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi \\ &\quad -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + g\overline{\psi_1}\phi\psi_1 + g\overline{\psi}_2\phi\psi_2 \end{aligned}$$

(a) Halle las simetrías internas de ambos lagrangianos (se entiende que se pide aquellas simetrías obvias, las mas evidentes) indicando claramente cuantos párametros independientes tiene en cada caso.

(b) Halle las corrientes de Noether conservadas asociadas a las simetrías internas encontradas indicando que ley de conservación espera a nivel cuántico, es decir, indicando que números de partículas espera que se conserven.

(c) Dibuje los diagramas de Feynman correspondientes a los términos de interacción, indicando con 1 y 2 a los fermiones y con una linea punteada al campo escalar .

(d) A partir de estos, dibuje los diagramas que contribuyen a los procesos
i)$1+\bar{2} \to \bar{1}+2$
ii) $1+\bar{2} \to 1+\bar{2}$
iii) $1+1 \to 2+2$
al orden más bajo en g para cada Lagrangiano. En base a las leyes de conservación del punto b), diga que procesos no son posibles.

7. Considere la siguiente densidad lagrangiana

$$\mathscr{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi^* + \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi^* - m^2 \phi^* \phi - M^2 \varphi \varphi^* - V(\varphi, \phi)$$

donde $V(\varphi, \phi)$ es una función de los módulos de ambos campos, y donde m y M son parámetros constantes del modelo

(a) Obtener las ecuaciones de movimiento (de Euler-Lagrange) que se derivan de la misma. Nótese que hay dos campos (y complejos!) en esta teoría.

(b) Hallar las simetrías de esta densidad lagrangiana y diga que grupo forman. ¿ Como deben ser las masas M y m y qué forma debe tener V para que el grupo de simetría sea $U(2)$?

8. Considere la densidad lagrangiana de tres partículas de Dirac libres,

$$\mathscr{L} = \bar{\psi}_1(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_1)\psi_1(x) + \bar{\psi}_2(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_2)\psi_2(x) + \bar{\psi}_3(x)(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_3)\psi_3(x)$$

(a) ¿Cuál es el grupo de simetría de este lagrangiano?

(b) Y si fuesen las tres masas iguales ($m_1 = m_2 = m_3$), ¿cuál sería el grupo de simetrías en este caso?

9. Considere el lagrangiano de Dirac acoplado al lagrangiana de Maxwell; es decir

$$\mathscr{L} = i\overline{\psi}\gamma^\mu D_\mu \psi - m\overline{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu},$$

siendo D_μ la denominada *derivada covariante* $D_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

(a) Escriba este lagrangiano aislando la parte del fermión libre, la del campo electromagnético, y la de interacción.

(b) Como cuenta preliminar, halle la expresión de : $\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}$ y $\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}$

(c) Derive las ecuaciones de Euler-Lagrange para este modelo