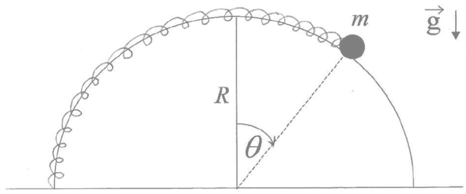
Guía 4: Ejercicio 7.

Una bolita de masa m está enhebrada en un aro semicircular de radio R y sujeta a un resorte de constante elástica k y longitud natural $l_0 = \pi R/2$, como muestra la figura.



a) Halle la ecuación de movimiento.

b) Encuentre posiciones de equilibrio.

c) Diga cuándo el equilibrio es estable.

La idea de este ejercicio es estudiar los puntos de equilibrio de un sistema que conviene escribir en sistemas polares.

Lo primero que debemos hacer es elegir un sistema de referencia. Claramente, la opción más cómoda es elegir el origen de coordenada en el centro de la semicircunferencia y en ese origen elegir un sistema de coordenadas polares como indica la figura 1. Dado que la bolita está sujeta al aro, su distancia al origen $r = R$ no cambia en el tiempo.

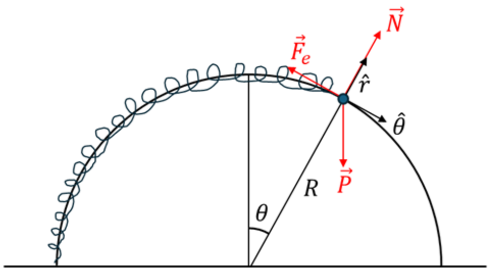


Figura 1: Sistema del ejercicio 7 y su respectivo diagrama de cuerpo libre.

Desde este sistema de referencia la posición de la bolita es $\mathbf{r} = R\hat{r}$. Además, como hay un piso debajo del aro, θ solo puede tomar valores en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Ahora veamos las fuerzas que actúan sobre la bolita. La más evidente es la fuerza de vínculo, esta simplemente es normal a la superficie

$$\mathbf{N} = N\hat{r}. \tag{1}$$

También vemos que tiene peso. Como siempre este va hacía abajo, ortogonal a piso, digamos la dirección $\hat{y}$. Entonces su peso es $\mathbf{P} = mg\hat{y}$. Pero como vamos a trabajar en coordenadas polares debemos transformar este vector. Ya vimos como pensar esta transformación. En polares el peso se escribe como

$$\mathbf{P} = -mg\cos\theta\hat{r} + mg\sin\theta\hat{\theta}. \tag{2}$$

Por último, queda ver la fuerza del resorte. Simplificaremos el problema suponiendo que el resorte se adhiere suavemente al aro, es decir que punto a punto la fuerza que ejerce es tangencial a su superficie, i.e. va en la dirección $\hat{\theta}$. Por otro lado, su longitud natural $l_0 = R\frac{\pi}{2}$ y, según la coordenada que estamos usando, la longitud del resorte es $l = R(\frac{\pi}{2} + \theta)$. Luego, sabemos que la fuerza que ejerce el resorte siempre es contraria a su "elongación" respecto a la longitud natural, o sea

$$\mathbf{F}_e = -k(l - l_0)\hat{\theta} = -k\left(R\frac{\pi}{2} + R\theta - R\frac{\pi}{2}\right)\hat{\theta} = -kR\theta\hat{\theta}. \tag{3}$$

La dinámica del sistema está descrita por las ecuaciones de Newton $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}$. Recordemos que en coordenadas polares la aceleración es

$$\ddot{\mathbf{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} \tag{4}$$

Luego, usando que la distancia al origen $r = R$ es constante, debe ser $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, y reemplazando por la resultante de las fuerzas; las ecuaciones de Newton devienen en

$$-mR\dot{\theta}^2\hat{r} + mR\ddot{\theta}\hat{\theta} = (N - mg\cos\theta)\hat{r} + (mg\sin\theta - kR\theta)\hat{\theta}. \tag{5}$$

Finalmente obtuvimos una ecuación diferencial para cada componente. De la dirección radial $\hat{r}$ podremos ver como es la normal como función del ángulo. Este análisis lo dejamos para otro momento. La parte importante, siendo que la variable dinámica es el ángulo, es la ecuación de la dirección angular. La ecuación de movimiento para θ es

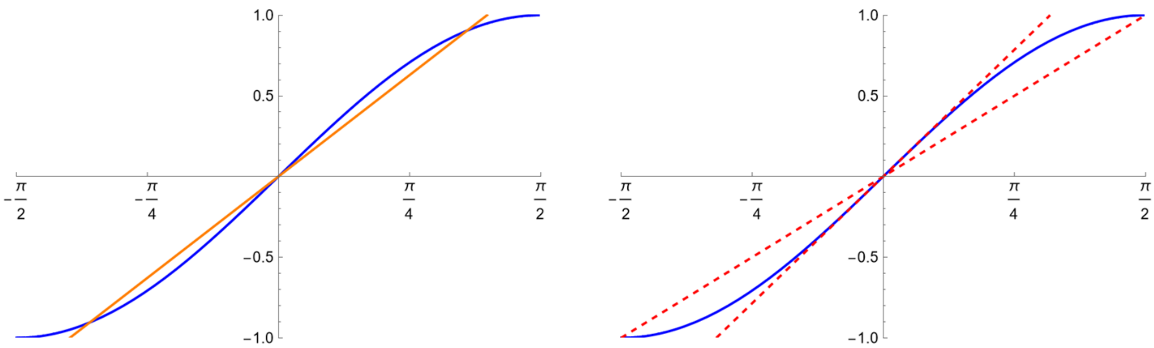
$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta - \frac{k}{m}\theta. \tag{6}$$

Ahora podemos ver si existen puntos de equilibrio y si estos son estables o inestables.

Los puntos de equilibrio son aquellos valores de θ que alcanzan el equilibrio dinámico, es decir los θ_{eq} tal que $\ddot{\theta}(\theta_{eq}) = 0$. Usando la ecuación de movimiento, vemos que estamos buscando aquellos que satisfacen la ecuación

$$\sin\theta_{eq} = \frac{kR}{mg}\theta_{eq} \tag{7}$$

Esta ecuación es altamente trascendente. No podremos resolver θ_{eq} en término de los parámetros mediante funciones elementales. Al menos no de forma general. Por suerte es fácil que $\theta_{eq} = 0$ es una solución siempre, para cualquier valor de k, R, m y g. La pregunta es ¿existe otro valor de θ_{eq} que también sea de equilibrio? Para responder esta pregunta notemos que la ecuación (7) es la intersección de la función $\sin\theta$ y la recta $\frac{kR}{mg}\theta$. Empecemos viendo los gráficos de estas funciones para un valor arbitrario de la pendiente $\frac{kR}{mg}$, como muestra la figura (2a).



(a) (b)

Figura 2: (a) Gráficos de la función $\sin\theta$ y la recta $\frac{kR}{mg}\theta$, con $\frac{kR}{mg} = 0{,}8$. En el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ estas funciones se cruzan en tres puntos distintos. La intersección entre la función $\sin\theta$ (en azul) y la recta que pasa por el origen (la naranja) determina los posibles puntos de equilibrio. (b) Gráfico de la función $\sin\theta$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Las lineas punteadas corresponden a las rectas θ y $\frac{2}{\pi}\theta$. Solo aquellas rectas cuyas pendientes estén entre estas dos rectas tendrán más de un punto de equilibrio.

Probando para distintos valores de la pendiente es posible encontrar casos, como el de la figura (2a), dónde las funciones se cortan en tres puntos. También vemos que si la inclinación es muy alta, la recta se pega cada vez más a la vertical y por lo tanto solo puede cortar al $\sin\theta$ en $\theta = 0$. Es decir que hay una pendiente máxima para el hay más puntos de equilibrio. Este valor máximo de la pendiente es la tangente de $\sin\theta$ en $\theta = 0$, es decir la pendiente 1. Si disminuimos la pendiente desde 1, podemos llegar hasta la recta que une los puntos $(-\frac{\pi}{2}, -1)$ y $(\frac{\pi}{2}, 1)$. Esta recta tiene pendiente $\frac{2}{\pi}$. Si tomamos una pendiente más chica, los posibles puntos de intersección quedan fuera del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Y como θ solo puede tomar valores en este intervalo, no se pueden considerar puntos de equilibrio. Sin embargo, si pudiéramos extender el rango de θ, por ejemplo apoyando el sistema por fuera del borde de una mesa y extendiendo el aro, los puntos de equilibrio se encontrarían viendo un gráfico como el de la figura (3)

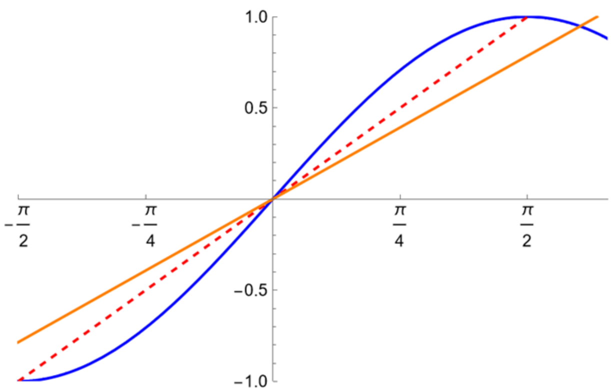


Figura 3: Puntos de equilibrio por fuera del intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Se encuentran para valores de $\frac{kR}{mg} < \frac{2}{\pi}$.

Pero volviendo a las condiciones del problema; las únicas rectas para las cuales hay ángulos de equilibrio, además de $\theta_{eq} = 0$, son aquellas comprendidas entre las lineas punteadas de la figura (2b). Esto implica que se cumplan las cotas

$$\frac{2}{\pi} < \frac{kR}{mg} < 1 \tag{8}$$

De manera que si $\frac{kR}{mg} < \frac{2}{\pi}$ o $1 < \frac{kR}{mg}$ la recta $\frac{kR}{mg}\theta$ interseca el $\sin\theta$ únicamente en $\theta = 0$.

Analicemos ahora la estabilidad de estos puntos de equilibrio. Sabemos que si θ cumple la ecuación de movimiento $\ddot{\theta} = f(\theta)$; entonces los puntos de equilibrio cumple $f(\theta_{eq}) = 0$ (ya los calculamos), y estos son estables si $\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} < 0$ o inestables si $\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} > 0$. Volviendo a la ecuación de movimiento (6), debemos calcular

$$\left.\frac{df}{d\theta}\right|_{\theta=\theta_{eq}} = \frac{g}{R}\cos\theta_{eq} - \frac{k}{m}. \tag{9}$$

Para estudiar la estabilidad de este sistema consideremos los casos (I): $\frac{kR}{mg} < \frac{2}{\pi}$, (II): $1 < \frac{kR}{mg}$ y (III): $\frac{2}{\pi} < \frac{kR}{mg} < 1$.

Veamos cada uno por separado:

(I) En este caso el único punto de equilibrio es $\theta_{eq} = 0$. Evaluando en la ecuación (9) obtenemos

$$\frac{df}{d\theta}(0) = \frac{g}{R} - \frac{k}{m} = \frac{g}{R}\left(1 - \frac{kR}{gm}\right) \tag{10}$$

Ahora, a partir de la condición de este caso podemos notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{kR}{mg} &< \frac{2}{\pi} \\ -\frac{2}{\pi} &< -\frac{kR}{mg} \\ 1 - \frac{2}{\pi} &< 1 - \frac{kR}{mg} \\ \frac{\pi - 2}{\pi} &< 1 - \frac{kR}{mg} \\ 0 < \frac{\pi - 2}{\pi} &< 1 - \frac{kR}{mg} \\ 0 &< 1 - \frac{kR}{mg}. \end{aligned}$$

Juntando estos dos resultados es claro que $\frac{df}{d\theta}(0) > 0$. Y por lo tanto es un punto de equilibrio inestable.

Este resultado lo podemos entender físicamente. La condición (I) dice que $\frac{\pi}{2}kR < mg$. Notemos que $\frac{\pi}{2}kR = k(\pi R - \frac{\pi}{2}R)$ es la máxima fuerza, en módulo, que puede ejercer el resorte. Entonces está condición nos está diciendo que el peso es más le "gana" a la fuerza del resorte. Por lo tanto, a penas lo aparte de $\theta = 0$ ganará el peso y la fuerza restitutiva del resorte no será suficiente para devolver a la bolita a su lugar inicial. Simplemente caerá.

(II) Nuevamente, el único ángulo de equilibrio es $\theta_{eq} = 0$ y otra vez es

$$\frac{df}{d\theta}(0) = \frac{g}{R} - \frac{k}{m} = \frac{g}{R}\left(1 - \frac{kR}{mg}\right) \tag{11}$$

y como $1 < \frac{kR}{mg}$, es decir $1 - \frac{kR}{mg} < 0$; $\frac{df}{d\theta}(0) < 0$ y por lo tanto es un punto de equilibrio estable.

En este caso estamos viendo el caso opuesto al anterior. La condición (II) dice que $mg < kR$. Es decir que la fuerza del resorte es más intensa que el peso. Por lo tanto el resorte podrá devolver la bolita a su posición inicial $\theta = 0$ y evitar que caiga por su propio peso.

(III) Finalmente, consideremos el caso dónde hay más de un punto de equilibrio. Primero notemos lo siguiente. Si θ_{eq} es un punto de equilibrio entonces $-\theta_{eq}$ también es de equilibrio. Basta con recordar que el seno es una función impar, es decir $\sin(-\theta) = -\sin\theta$. Esto lo vemos chequeando

$$\frac{kR}{mg}(-\theta_{eq}) = -\frac{kR}{mg}\theta_{eq} = -\sin\theta_{eq} = \sin(-\theta_{eq}). \tag{12}$$

Incluyendo a $\theta_{eq} = 0$, vamos a tener en total tres ángulos de equilibrio. Por esto, supondremos que el θ_{eq} no nulo es positivo. Su contraparte negativa será análoga.

El punto de equilibrio $\theta_{eq} = 0$ cumple, una vez más,

$$\frac{df}{d\theta}(0) = \frac{g}{R} - \frac{k}{m} = \frac{g}{R}\left(1 - \frac{kR}{mg}\right). \tag{13}$$

Y Ahora, como es $\frac{kR}{gm} < 1$, tenemos $0 < 1 - \frac{kR}{gm}$ y por lo tanto $\frac{df}{d\theta}(0) > 0$. Es decir que es inestable.

Ahora tomemos el ángulo de equilibrio no nulo que cumple $\theta_{eq} = \frac{mg}{kR}\sin\theta_{eq}$. Entonces evaluando en la ecuación (9) es

$$\frac{df}{d\theta}(\theta_{eq}) = \frac{g}{R}\cos\theta_{eq} - \frac{k}{m} = \frac{k}{m}\left(\frac{mg}{kR}\cos\theta_{eq} - 1\right) \tag{14}$$

Notemos que como el coseno es una función par, es decir $\cos(-\theta) = \cos\theta$, la ecuación anterior garantiza que $\frac{df}{d\theta}(-\theta_{eq}) = \frac{df}{d\theta}(\theta_{eq})$; y por lo tanto θ_{eq} y $-\theta_{eq}$ tienen la misma estabilidad. De la ecuación (7) que define el ángulo de equilibrio podemos despejar $\frac{mg}{kR} = \frac{\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}$ y por lo tanto

$$\frac{df}{d\theta}(\theta_{eq}) = \frac{k}{m}\left(\frac{\theta_{eq}}{\sin\theta_{eq}}\cos\theta_{eq} - 1\right) = \frac{k}{m}\left(\frac{\theta_{eq}}{\tan\theta_{eq}} - 1\right) \tag{15}$$

Veamos un poco más de cerca la función $g(\theta) = \frac{\theta}{\tan\theta} - 1$. Podemos mostrar que esta función es estrictamente decreciente. Para ver esto podemos derivar y mostrar que la derivada es estrictamente negativa. Va a ser necesario recordar que $\sin\theta < \theta$ para $\theta > 0$ y la identidad trigonométrica $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$. Entonces, derivemos $g(\theta)$

$$\begin{aligned} \frac{dg}{d\theta} &= \frac{1}{\tan\theta} - \frac{\theta}{\tan^2\theta}\frac{1}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{\theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{\sin\theta\cos\theta - \theta}{\sin^2\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta - \theta}{\sin^2\theta} \\ \frac{dg}{d\theta} &= \frac{1}{2}\frac{\sin 2\theta - 2\theta}{\sin^2\theta} < 0. \end{aligned} \tag{16}$$

De manera que $g(\theta)$ es decreciente. Por lo tanto $g(\theta) < g(0)$, y se puede mostrar con un límite que $g(0) = 0$. Por lo tanto

$$g(\theta) = \frac{\theta}{\tan\theta} - 1 < g(0) = 0 \tag{17}$$

para cualquier θ entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. Y como $0 < \theta_{eq} < \frac{\pi}{2}$ debe ser

$$\frac{df}{d\theta}(\theta_{eq}) = \frac{k}{m}\left(\frac{\theta_{eq}}{\tan\theta_{eq}} - 1\right) < 0, \tag{18}$$

y por lo tanto es un punto de equilibrio estable.

Entonces concluimos lo siguiente. En este caso, la fuerza elástica y el peso se compensan lo suficiente como tener dos puntos de equilibrio estables. COnsideremos que la bolita empieza en un ángulo chico, digamos positivo. Al ser $\theta_{eq} = 0$ un punto de equilibrio inestable, la fuerza resultante tenderá a sacarlo de ese equilibrio cada vez más rápido (aceleración positiva). Sin embargo, va a llegar un momento donde cruce el punto de equilibrio $\theta_{eq} > 0$ (que no podemos calcular pero está determinado por el valor de los parámetros) y empezará a oscilar establemente alrededor de este punto.