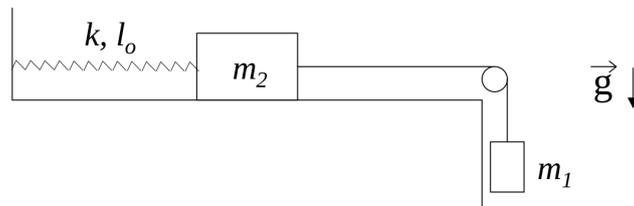
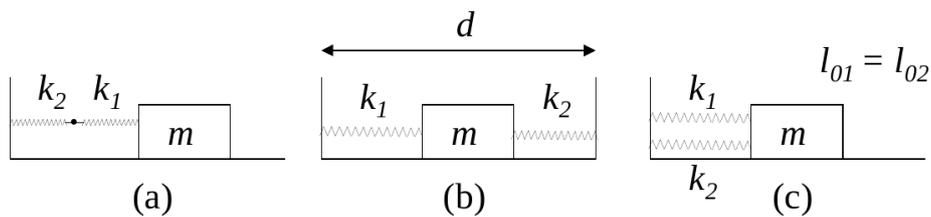


### Guía 4: Movimiento Oscilatorio

- ① Considere una partícula de masa  $m$  suspendida del techo por medio de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . Determine cómo varía la posición con el tiempo sabiendo que en  $t = 0$  la partícula se halla a una distancia  $2l_0$  del techo, con velocidad nula.
- ② El sistema de la figura, compuesto por dos cuerpos de masas  $m_1$  y  $m_2$  y un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ , se encuentra inicialmente en equilibrio. Se lo pone en movimiento imprimiendo a la masa  $m_1$  una velocidad  $v_0$  hacia abajo (no hay rozamiento).



- a) Plantee las ecuaciones de Newton y de vínculo para  $m_1$  y para  $m_2$ .
- b) Diga cómo varía la posición de  $m_2$  con el tiempo.
- ③ Sean dos resortes de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , y un cuerpo de masa  $m$ , que desliza sin rozamiento, conectados como en las figuras a), b) y c).



- (i) Demostrar que la frecuencia de oscilación de  $m$  vale, en el caso a)

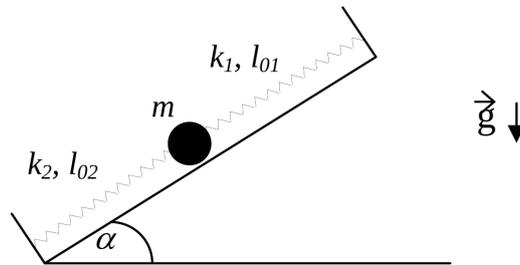
$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} \quad (1)$$

y en los casos b) y c):

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \quad (2)$$

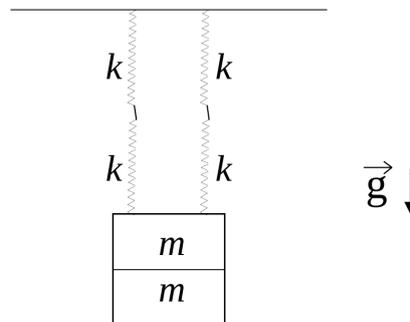
(ii) Encuentre las posiciones de equilibrio sabiendo que los resortes tienen longitudes naturales  $l_{01}$  y  $l_{02}$ .

- ④ Una bolita de masa  $m$  se desliza sobre un plano inclinado sostenida por dos resortes, de constantes elásticas  $k_1$  y  $k_2$ , y longitudes libres  $l_{01}$  y  $l_{02}$ , respectivamente, los cuales se encuentran fijos a dos paredes separadas una distancia  $L$ .



- Plantee la ecuación de Newton para la bolita y encuentre la ecuación de movimiento.
- Halle la posición de equilibrio y determine si es estable o inestable.
- Si partiendo de la posición de equilibrio el sistema se pone en movimiento imprimiéndole a la bolita una velocidad  $v_0$  hacia arriba, encuentre la posición de la bolita como función del tiempo.

- ⑤ Cuatro resortes idénticos de constante elástica  $k$  desconocida y longitud natural  $l_0$  se hallan sosteniendo un cuerpo formado por dos pesas de masa  $m$  cada una, como muestra la figura.

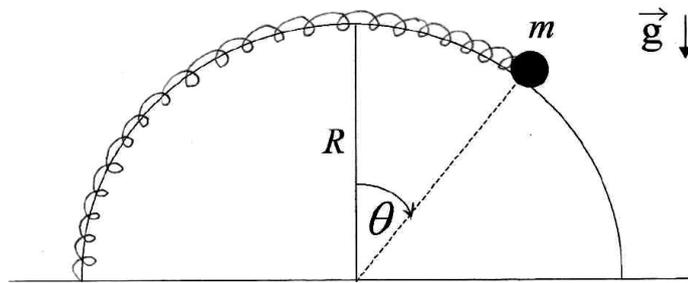


- Sabiendo que la posición de equilibrio del cuerpo se halla a una distancia  $d$  del techo, encuentre el valor de  $k$ .
- Estando el sistema en su posición de equilibrio se retira una de las pesas sin perturbarlo y se lo deja en libertad.
  - Obtenga la ecuación que rige el movimiento posterior del sistema. Calcule el período de oscilación y la nueva posición de equilibrio.
  - Utilizando las condiciones iniciales halle la posición del cuerpo en función del tiempo.

⑥ Un cuerpo suspendido de un hilo inextensible de longitud 80 cm realiza un movimiento oscilatorio en un plano siendo  $\theta = \theta(t)$  el ángulo entre la vertical y el hilo.

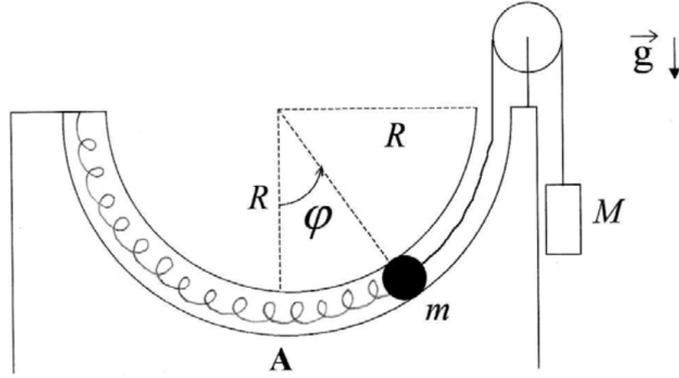
- Plantee las ecuaciones de Newton para el cuerpo.
- ¿Bajo qué aproximación el movimiento es armónico? ¿qué período tiene?
- Si en  $t = 0$  es  $\theta = 0$ ,  $\dot{\theta} = 0,2 \text{ s}^{-1}$  ¿se satisface la aproximación de b)  $\forall t$  ?
- Usando las ecuaciones planteadas en a) halle la posición de equilibrio y diga si es estable o inestable y por qué.

⑦ Una bolita de masa  $m$  está enhebrada en un aro semicircular de radio  $R$  y sujeta a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0 = \pi R/2$ , como muestra la figura.



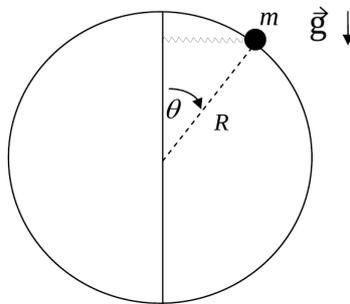
- Halle la ecuación de movimiento.
- Encuentre posiciones de equilibrio.
- Diga cuándo el equilibrio es estable.

⑧ Una bolita de masa  $m$  se mueve por un tubo delgado, carente de rozamiento, el cual describe una semicircunferencia de radio  $R$ . La bolita se halla sujeta por un extremo a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0 = \pi R/2$ , y por el otro a una soga, deslizando ambos elementos por el interior del tubo, tal como muestra la figura. Del extremo de la soga pende, a través de una polea, otro cuerpo de masa  $M$  que actúa como contrapeso. Considere la soga inextensible, y las masas de soga, resorte y poleas despreciables. En el instante inicial la bolita se halla en el punto A ( $\varphi=0$ ) con velocidad  $v_0$ .



- Plantee las ecuaciones de Newton para cada una de las masas. Halle la ecuación diferencial que rige el movimiento de la bolita.
- Halle gráficamente la o las posiciones de equilibrio de la bolita, determinando si corresponden a posiciones de equilibrio estable o inestable.
- Halle la expresión de la fuerza de vínculo ejercida por el tubo sobre la bolita como función del ángulo  $\varphi$ .

- 9) Una masa  $m$  está enhebrada en un aro circular sin fricción de radio  $R$  y unida al extremo de un resorte de constante  $k$  y longitud natural nula (se considera despreciable frente al radio del aro). El otro extremo del resorte corre libremente a lo largo de un eje vertical, de modo tal que el resorte permanece siempre en posición horizontal (ver figura).



- Halle las ecuaciones de Newton para  $m$ .
- Si inicialmente la masa se encuentra en  $\theta = \pi/2$  con velocidad nula, halle la expresión de la fuerza de vínculo con el aro en función del ángulo  $\theta$ .
- Encuentre las posiciones de equilibrio y analice si son estables o inestables.

- 10) Un péndulo simple de 10 g de masa tiene inicialmente un período de 2s y una amplitud de 2 grados. Luego se lo sumerge en un medio con rozamiento y después de dos oscilaciones completas la amplitud se reduce a 1,5 grados. Encuentre la constante de amortiguamiento  $r$ .

- 11) Una partícula de masa  $m$  está unida al extremo de un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$ . El otro extremo del resorte está unido a una pared que se mueve de acuerdo a la ley  $x_p(t) = L \cos(\omega t)$ . La partícula también está sometida a la acción de una fuerza viscosa tal que  $\vec{F}_v = -\gamma \dot{x} \hat{x}$ .
- Escriba la ecuación de Newton para la partícula. Indique claramente cuáles son las fuerzas que actúan sobre ella.
  - Para el caso  $\frac{k}{m} > (\frac{\gamma}{2m})^2$ , diga cual es la solución a la ecuación e movimiento  $x(t)$ . Para tiempos largos ( $1 \ll \beta t$ , con  $\beta = \gamma/2m$ ), diga en qué dirección se mueve la partícula cuando la pared se mueve hacia la derecha, si  $\omega = \sqrt{k/m}$ .
- 12) Considere una partícula de masa  $m$  que se mueve sobre una recta ( $x$ ). La partícula está unida a un resorte de constante elástica  $k$  y longitud natural  $l_0$  (tal como indica la figura). Hay rozamiento entre la partícula y el plano con coeficientes  $\mu_e$  y  $\mu_d$ . En el instante  $t=0$  la partícula se encuentra en la posición  $x_0 > l_0$  con velocidad nula.
- Describa cualitativamente el movimiento analizando cuidadosamente el efecto del rozamiento. Obtenga la ecuación diferencial que gobierna el movimiento (sugerencia: use el hecho de que el movimiento transcurre en una recta y distinga los dos sentidos del movimiento). Demuestre que, tal como ocurre en ausencia de rozamiento, el cuerpo tiene velocidad nula en todos los instantes  $t_n = n T/2$ , donde  $T = 2\pi\sqrt{m/k}$  y  $n$  es un número entero. Demuestre que la distancia recorrida entre dos detenciones sucesivas (separadas por un intervalo  $T/2$ ) disminuye cada vez en una cantidad  $2 \mu_d \frac{mg}{k}$ . Diga en qué momento se detiene definitivamente el movimiento del cuerpo.
  - Si se considera  $x_0 = N \mu_d \frac{mg}{k} + l_0$  (donde  $N$  es un número entero), diga cuantas veces cambia el sentido de la velocidad del cuerpo antes de detenerse definitivamente (considere el caso  $\mu_e < 2\mu_d$ ). Analice en particular los casos  $N=4$  y  $N=7$ , grafique la función  $x(t)$  y diga en qué lugar y en qué instante se detiene definitivamente el cuerpo.
  - Compare el movimiento del cuerpo con el caso en el que el rozamiento se origina en la fricción del cuerpo con el aire (que produce una fuerza proporcional a la velocidad).

