Cinemática 1D

Va un resumen de lo visto en clase.

Una vez definido el sistema de referencia, tenemos la posición, velocidad y aceleración de un objeto puntual.

$$x(t)$$
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

Este es un sistema de ecuaciones diferenciales. Si tenemos $a(t)$, podemos obtener la velocidad y luego la posición integrando en el tiempo:

$$v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\, dt$$
$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\, dt$$

Si en vez de tener la aceleración en función del tiempo, tenemos la aceleración en función de la velocidad, podemos integrar de la siguiente manera

$$a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dt = \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} dt = \int_{t_0}^{t} \frac{dv}{a(v)} \Rightarrow t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)}$$

Luego podemos invertir la función y despejar $v(t)$. Integrando en el tiempo obtenemos $x(t)$.

Cambio de variable

En ciertas ocasiones puede ser útil realizar la siguiente operación

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v \Rightarrow a = \frac{dv}{dx}v$$

De esta forma estamos pensando a la velocidad como función de la posición, y eliminamos la variable "tiempo" de la ecuación.

Volviendo al caso anterior, si tenemos $a(v)$, podemos despejar

$$a(v) = \frac{dv}{dx}v \Rightarrow dx = \frac{v}{a(v)}dv \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)}dv$$

Y de esta forma despejamos para obtener $v(x)$. Una vez obtenido $v(x)$ podemos integrar para obtener $x(t)$:

$$v(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dt = \frac{1}{v(x)}dx \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$$

Si tenemos la aceleración en función de la posición, no hay una forma directa de obtener $v(t)$, pero realizando el cambio de variables podemos obtener $v(x)$.

$$a(x) = \frac{dv}{dx}v \Rightarrow a(x)dx = vdv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)dx = \int_{v_0}^{v} vdv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)dx = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$$

Despejando: $v(x) = \pm\sqrt{v_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a(x)dx}$

Bonus: Este último resultado es el teorema de variación de la energía cinética, o teorema de trabajo-energía. En efecto, si multiplicamos la ecuación por la masa, queda

$$\int_{x_0}^{x} ma(x)dx = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Usando la segunda ley de Newton, tenemos que $ma = F_R$, con F_R la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo, es decir, la suma vectorial de todas las fuerzas. Entonces

$$\int_{x_0}^{x} F_R dx = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$$

Definiendo el trabajo de la fuerza resultante $W = \int_{x_0}^{x} F_R dx$ y la energía cinética $T = \frac{1}{2}mv^2$, queda

$$W = \Delta T$$

Resumen

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}v$$

Si *a=a(t)*

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow v(t) = v_0 + \int_{t_0}^{t} a(t)\,dt$$
$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)\,dt$$

Si *a=a(v)*

$a(v) = \frac{dv}{dt} \Rightarrow t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{a(v)} dv$ **se puede despejar** $v(t)$. Integramos nuevamente para tener *x(t)*

$a(v) = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow \Rightarrow x - x_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{a(v)} dv$ **se puede despejar** $v(x)$

Si *a=a(x)*

No se puede obtener $v(t)$ por integración

$a(x) = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow \int_{x_0}^{x} a(x)dx = \frac{v^2}{2} - \frac{v_0^2}{2}$ **se puede despejar** $v(x)$

Una vez obtenida $v(x)$:
$v(x) = \frac{dx}{dt} \Rightarrow t - t_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{v(x)}$ **se puede despejar** $x(t)$

Luego obtenemos $v(t)$ y $a(t)$ derivando $x(t)$.

Veremos que en muchos casos, estas integrales no tendrán expresión analítica.

Separación de variables

Si a es función de x y v, $a = a(x, v)$, en ciertos casos podemos integrar por el método de separación de variables. Si $a(x, v) = f(v).g(x)$, es decir, el producto de una función de la velocidad por otra función de la posición, obtenemos

$$a(x, v) = f(v)g(x) = \frac{dv}{dx} v \Rightarrow g(x)dx = \frac{v}{f(v)} dv \Rightarrow \int_{x_0}^{x} g(x)dx = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{f(v)} dv$$