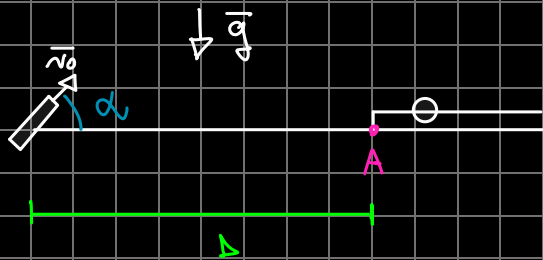


EJERCICIO 6



DATOS:

PARA LA PELOTTA $\rightarrow a = Kt$

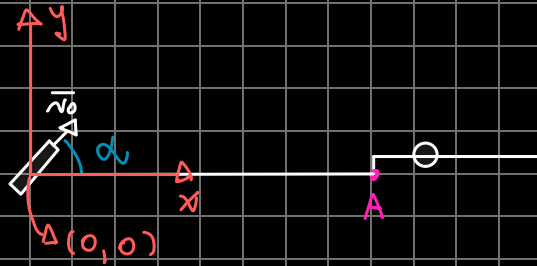
$$x(t=0) = A$$

$$v(t=0) = 0$$

PARA LAS BOMAS $\rightarrow a$ ESTA F.O

LO PRIMERO QUE VAMOS A HACER ES BUSCAR LAS ECUACIONES QUE DESCRIBEN EL MOVIMIENTO DE CADA OBJETO

PARA ESTO, NECESITO SELECCIONAR UN ORIGEN DE COORDENADAS



COMO EL PROYECTIL SE MUEVE EN 2D ES NECESARIO DEFINIR BIEN EL ORIGEN Y EL SENTIDO PARA LAS COORDENADAS X E Y

PELOTTA

POR EL ORIGEN DE COORDENADAS QUE ELEGIMOS, AHORA TENEMOS QUE $x_p(t=0) = D$

TENEMOS QUE $a(t) = K \cdot t = \frac{dv_p}{dt} \Rightarrow \int_0^t dt' K \cdot t' = \int_0^{v_p} dv_p'$

$v(t=0) = 0$

LUEGO, $\frac{K t^2}{2} = \frac{v(t)}{p} = \frac{dx_p}{dt} \Rightarrow \int_0^t \frac{K t'^2}{2} dt' = \int_D^{x_p} dx_p'$

$$\Rightarrow \frac{K t^3}{6} = x_p - D \Rightarrow \frac{K t^3}{6} + D = x_p$$

CON ESTA ECUACIÓN NOS ALCANZA PARA DESCRIBIR EL MOV. DE LA PELOTTA

POR EL ENUNCIADO DEL PROBLEMA, SABEMOS QUE LA PELOTTA NO SE MUEVE EN LA DIRECCIÓN Y. PARA SER SUPER CÚROS Y COMPLETOS, PODEMOS DECIR QUE

$$y_p(t) = cte$$

SI BIEN SE SOBREENTIENDE, ES UNA BUENA PRACTICA A FUTURO ACIARAR ESTAS COSAS

COMO CONSIDERAMOS QUE LA PELOTTA INICIALMENTE ESTA EN $y = 0$ Y COMO LA POSICIÓN EN Y SE MANTIENE CONSTANTE, VAMOS A TENER

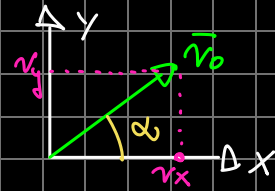
$$y_p(t) = 0$$

BOIA

PARA ESTE OBJETO, NO CONOCEMOS EL VALOR DE LA VELOCIDAD INICIAL $v_0 = |\vec{v}_0|$. SI CONOCEMOS EL ÁNGULO α . PODEMOS ESCRIBIR AL VECTOR $\vec{v}_0$ DE LA SIGUIENTE FORMA:

$$\vec{v}_0 = v_{0x} \hat{x} + v_{0y} \hat{y} \quad \left. \begin{array}{l} v_{0x} \text{ y } v_{0y} \text{ SON LAS PROYECCIONES} \\ \text{DEL VECTOR } \vec{v}_0 \text{ EN LOS EJES QUE} \\ \text{DEFINIMOS} \end{array} \right\}$$

⇒ USO TRIGONOMETRÍA PARA ENCONTRAR LAS PROYECCIONES



$$v_x = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin(\alpha)$$

WEGO,

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha) \hat{x} + v_0 \sin(\alpha) \hat{y}$$

CON ESTO, TENEMOS LA VELOCIDAD INICIAL PARA LA BOIA, PERO TODAVÍA TENEMOS QUE DESCRIBIR EL MOVIMIENTO DE ESTE OBJETO PARA TODO TIEMPO

* PARA LA COORDENADA X:

EN LA DIRECCIÓN X NO TENEMOS ACELERACIÓN $\Rightarrow a_{x_B} = 0$

LA INTEGRAL DE 0 ES UNA CTE $\Rightarrow v_{x_B} = \text{cte}$

COMO CONOCEMOS LA VELOCIDAD INICIAL EN X, Y LA VELOCIDAD EN X NO CAMBIA EN EL TIEMPO $\Rightarrow v_{x_B} = v_{0x} = v_0 \cos(\alpha)$ PARA TODO TIEMPO

WEGO, COMO $v_{x_B} = \frac{dx_B}{dt} \Rightarrow \int_0^T v_{x_B} dt' = \int_0^{x_B} dx'_B$

$$\Rightarrow \int_0^T v_0 \cos(\alpha) dt' = x_B(t) \Rightarrow x_B(t) = v_0 \cos(\alpha) \cdot t$$

* PARA LA COORDENADA Y

TENEMOS QUE CONSIDERAR QUE LA BOIA ES AFECTADA POR LA GRAVEDAD $\Rightarrow a_{y_B} = g$ (Y RECORDAMOS QUE VA EN $-\hat{y}$)

WEGO, $-g = \frac{dv_B}{dt} \Rightarrow \int_0^T -g dt' = \int_{v_{0y}}^{v_{By}} dv'_B$

$$\Rightarrow -gT = v_B(t) - v_{0y} = v_{By}(t) - v_0 \sin(\alpha)$$

$$\Rightarrow v_0 \sin(\alpha) - gT = v_{By}(t)$$

INTEGRANDO UNA VEZ MAS, VAMOS A TENER QUE

$$y_B(t) = v_0 \sin(\alpha) \cdot t - g \frac{t^2}{2}$$

NOS VA A RESULTAR UTIL PARA ESTE PROBLEMA OBTENER LA TRAYECTORIA $y(x)$

$\Rightarrow$ DESPEJAMOS EL TIEMPO DE LA ECUACIÓN PARA LA BOIA Y NOS QUEDA QUE

$$T = \frac{x_B}{v_0 \cos(\alpha)} \Rightarrow y_B(x) = v_0 \sin(\alpha) \cdot \frac{x_B}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2} g \frac{x_B^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)}$$

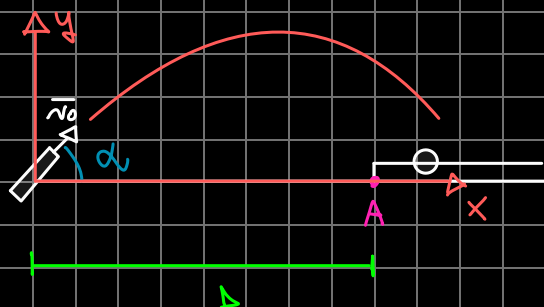
$$y_B(x) = \tan(\alpha) \cdot x_B - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x_B^2$$

CON TODAS ESTAS ECUACIONES VAMOS A CONTESTAR LAS PREGUNTAS DEL ENUNCIADO

A) NOS PIDEN VALORES DE v_0 TAL QUE LA BOIA LE PEGUE A LA PELOTITA

PARA QUE LA BOIA LE PEGUE A LA PELOTITA, TENEMOS QUE PEDIR QUE $y_B(x) = 0 \wedge x_B \geq \Delta$

ES DECIR, v_0 TIENE QUE SER TAL QUE LA BOIA SUPERE LA DISTANCIA Δ ANTES DE LLEGAR AL SUELO



SI $y(x) = 0$ PARA $x < \Delta$, ENTONCES LA PELOTITA Y LA BOIA NUNCA SE VAN A ENCONTRAR

ENTONCES, VAMOS A BUSCAR LOS VALORES DE x TALES QUE $y(x) = 0$

$$y(x) = 0 = \tan(\alpha) x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 \quad \wedge \quad x = 0$$

$$\wedge \quad x = \frac{\tan(\alpha) \cdot 2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{g}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sin(\alpha) 2v_0^2 \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha) \cdot g} = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}$$

USO UNA IDENTIDAD TRIGONOMETRICA

AHORA, PEDIMOS QUE ESTA x SEA MAYOR A Δ

$$\Rightarrow \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} \geq \Delta \Rightarrow v_0^2 \geq \frac{\Delta g}{\sin(2\alpha)} \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{\Delta g}{\sin(2\alpha)}}$$

ES DECIR, v_0 TIENE QUE SER MAYOR O IGUAL A ESE VALOR PARA QUE SEA POSIBLE QUE LA BOIA Y LA PELOTITA SE ENCUENTREN

PARA VER SI HICIMOS BIEN LAS COSAS, PODEMOS CHEQUEAR LAS UNIDADES

$$[v_0] = \frac{\text{LONGITUD}}{\text{TIEMPO}} = \left[\sqrt{\Delta g / \sin(\alpha)} \right] = \left[\left[\Delta \right] \cdot [g] / [\sin(\alpha)] \right] = \left[L \cdot L / T^2 \cdot 1 \right] = L / T \quad \checkmark$$

LOS CORCHETES SIGNIFICAN UNIDADES

B) EN ESTE INCISO, TENEMOS QUE CONSIDERAR QUE LA BOLA NO FUE DISPARADA EN $t=0$ SI NO QUE EN UN TIEMPO ARBITRARIO t_0 . EN VEZ DE VOLVER A CALCULAR LAS ECUACIONES, PODEMOS SIMPLEMENTE REEMPLAZAR t POR $t-t_0$. LUEGO, NOS VA A QUEDAR QUE PARA LA BOLA

$$X_B = r_0 \cos(\alpha) (\tau - \tau_0)$$

$$y_B = v_0 \sin(\omega)(t - t_0) - \frac{1}{2} g (t - t_0)^2$$

Y PARA LA PELOTTA

$$X_p = \frac{K \tau^3}{6} + \Delta$$

$$Y_P = 0$$

Queremos encontrar el valor de t_0 tal que la bola y la pelotita se encuentren. Pedir que se encuentren significa pedir que

$$X_P(\tau_E) = X_B(\tau_E) \quad , \quad Y_P(\tau_E) = Y_B(\tau_E)$$

EN UN TIEMPO t (TIEMPO DE ENCUENTRO)
LA PELOTA Y LA BOLA TIENEN QUE ESTAR
EN LA MISMA POSICIÓN

[illegible]

$$= \Delta 0 = v_0 \sin(\alpha) (\tau_E - \tau_0) - \frac{1}{2} g (\tau_E - \tau_0)^2 \rightarrow \begin{cases} \tau_E - \tau_0 = 0 = \Delta \tau = \tau_0 \\ \tau_E - \tau_0 = \frac{2 v_0 \sin(\alpha)}{g} \end{cases}$$

Ahora pedimos que $X|_{\mathcal{B}}(t) = X_p(t)$

$$\Rightarrow n_0 \cos(\alpha) \cdot \underline{(r_e - r_0)} = \frac{k \cdot r_e^3}{6} + \Delta$$

REEMPLAZAMOS POR LO QUE CALCULAMOS ANTES

$$\Rightarrow r_0 \cos(\alpha) \cdot \frac{2r_0 \sin(\alpha)}{6} = \frac{K E^3}{6} + \Delta$$

CON ESTO, VAMOS A PODER DESPEDIR EL LE

$$\sqrt[3]{\left(\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} - \Delta\right) \frac{6}{K}} = TE$$

Y TENIAMOS QUE $\tau_E - \tau_0 = \underbrace{2V_0 \sin(\omega)}_g = \Delta \tau_E = \tau_0 + \underbrace{2V_0 \sin(\omega)}_g$

$$\Rightarrow T_0 = \frac{3}{g} \sqrt{\left(\frac{v_0^2 \sin^2(\alpha)}{g} - \Delta \right) \frac{6}{k}} - \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

ACA' ESTAMOS CONSIDERANDO QUE v_0 ES CONOCIDA Y CUMPLE LA CONDICIÓN QUE CALCIAMOS EN EL INCIO A.

DE ESTE RESULTADO NOS DAMOS CUENTA QUE LO PUEDE TOMAR VALORES NEGATIVOS O POSITIVOS. QUE LO SEA MENOR A CERO SIGNIFICA QUE LA BOLA FUE DISPARADA ANTES DE QUE LA PELOTITA SE EMPIECE A MOVER, Y EL CASO EN EL QUE LO SEA MAYOR A CERO SIGNIFICA QUE LA BOLA FUE DISPARADA DESPUÉS

SIMILAMOS EL TÉRMINO DE LA RAÍZ, PODEMOS DARNOS CUENTA QUE SIEMPRE VA A SER POSITIVO PARA UNA v_0 QUE CUMPLE LA CONDICIÓN DEL INCISO A

$\Rightarrow$ PARA QUE LO SEA NEGATIVO TIENE QUE OCURRIR QUE

$$\sqrt[3]{\left(\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} - \frac{6}{k}\right)} < \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$$

RECORDAMOS QUE LA ACELERACIÓN DE LA PELOTITA ESTA DADA POR

$$a_p(t) = k t$$

SI k ES MUY GRANDE ($k \gg 1$), LA PELOTITA VA A AUMENTAR SU VELOCIDAD RÁPIDAMENTE, Y ADEMÁS:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} - \frac{6}{k}\right)} \ll 1 \rightarrow \text{SI } k \text{ ES MUY GRANDE, ENTONCES ESTOY DIVIDIENDO A ALGO POR UN NÚMERO MUY GRANDE, Y POR LO TANTO LA DIVISIÓN NOS VA A DAR ALGO MUY CHICO}$$

WEBO, SI LA PELOTITA TIENE UNA ACELERACIÓN GRANDE, ENTONCES SERÍA MAS CONVENIENTE DISPARAR LA BOLA ANTES QUE LA PELOTITA ARRANQUE