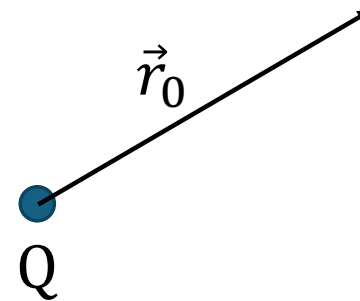


# Campo eléctrico de una carga puntual

- El campo generado por una carga  $Q$  situada en el origen y evaluado en cualquier posición  $\vec{r}_0$  es:

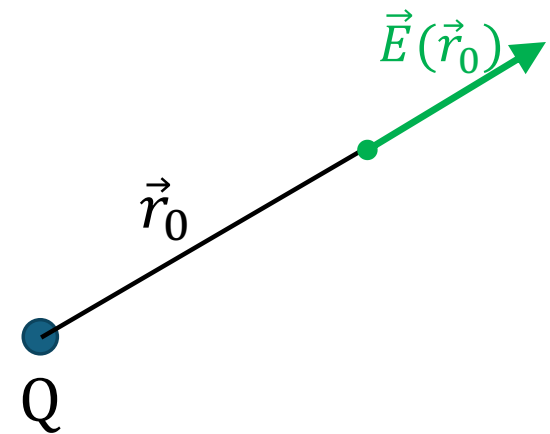
$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \hat{r}_0$$



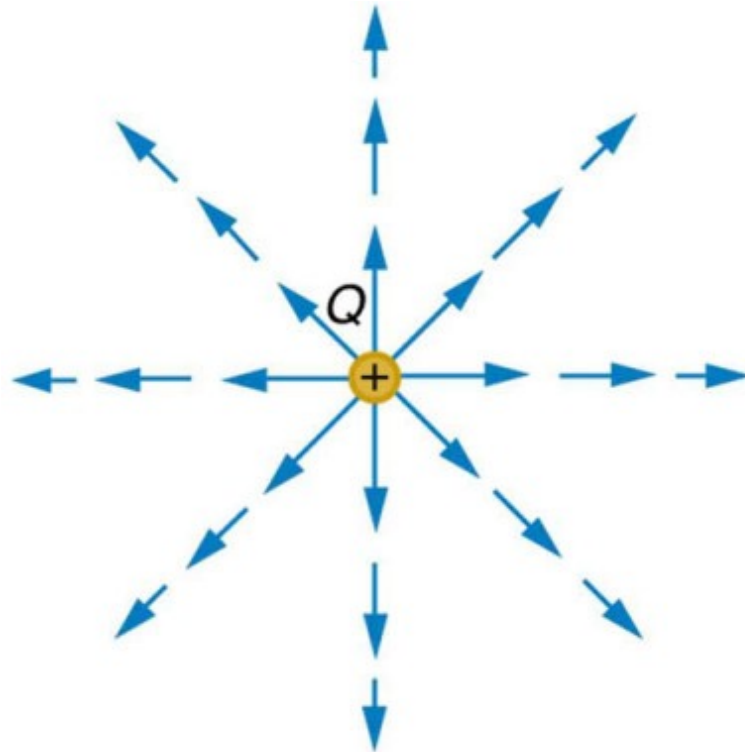
# Campo eléctrico de una carga puntual

- El campo generado por una carga  $Q$  situada en el origen y evaluado en cualquier posición  $\vec{r}_0$  es:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_0^2} \hat{r}_0$$



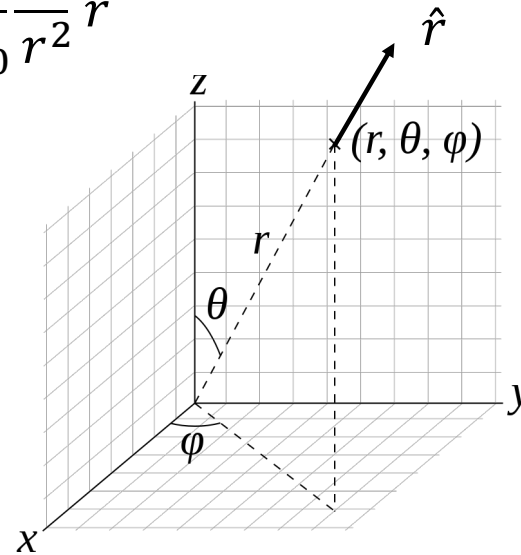
Campo eléctrico de una carga positiva  $Q > 0$



# Campo eléctrico de una carga puntual

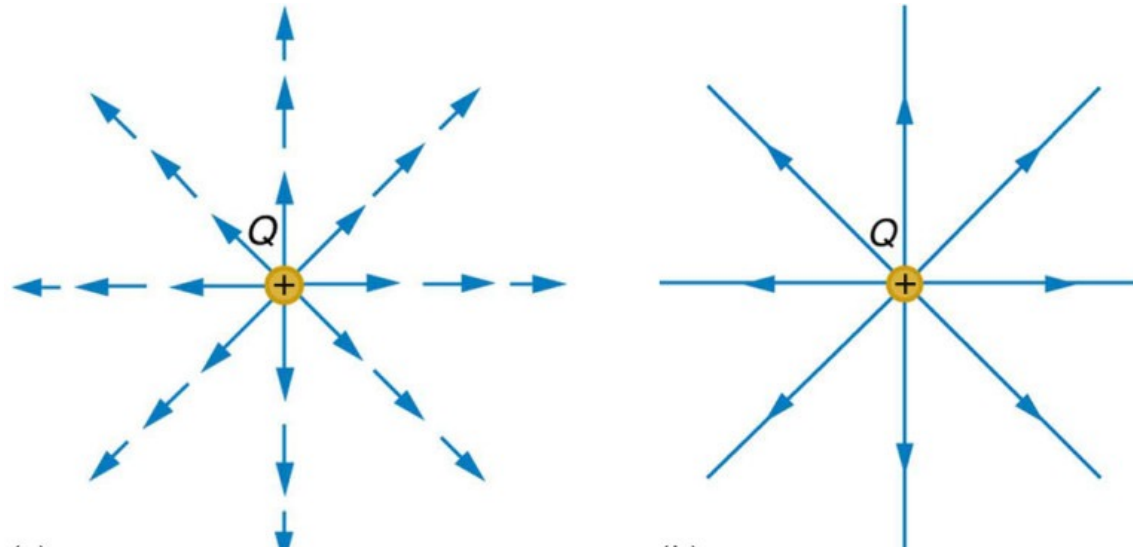
- En coordenadas esféricas  $(r, \theta, \varphi)$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



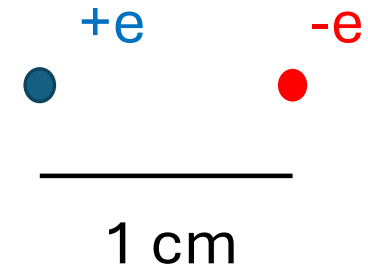
# Líneas de campo de una carga Q

- Líneas que tienen al campo  $\vec{E}$  como vectores tangentes.
- Densidad de líneas indica intensidad.



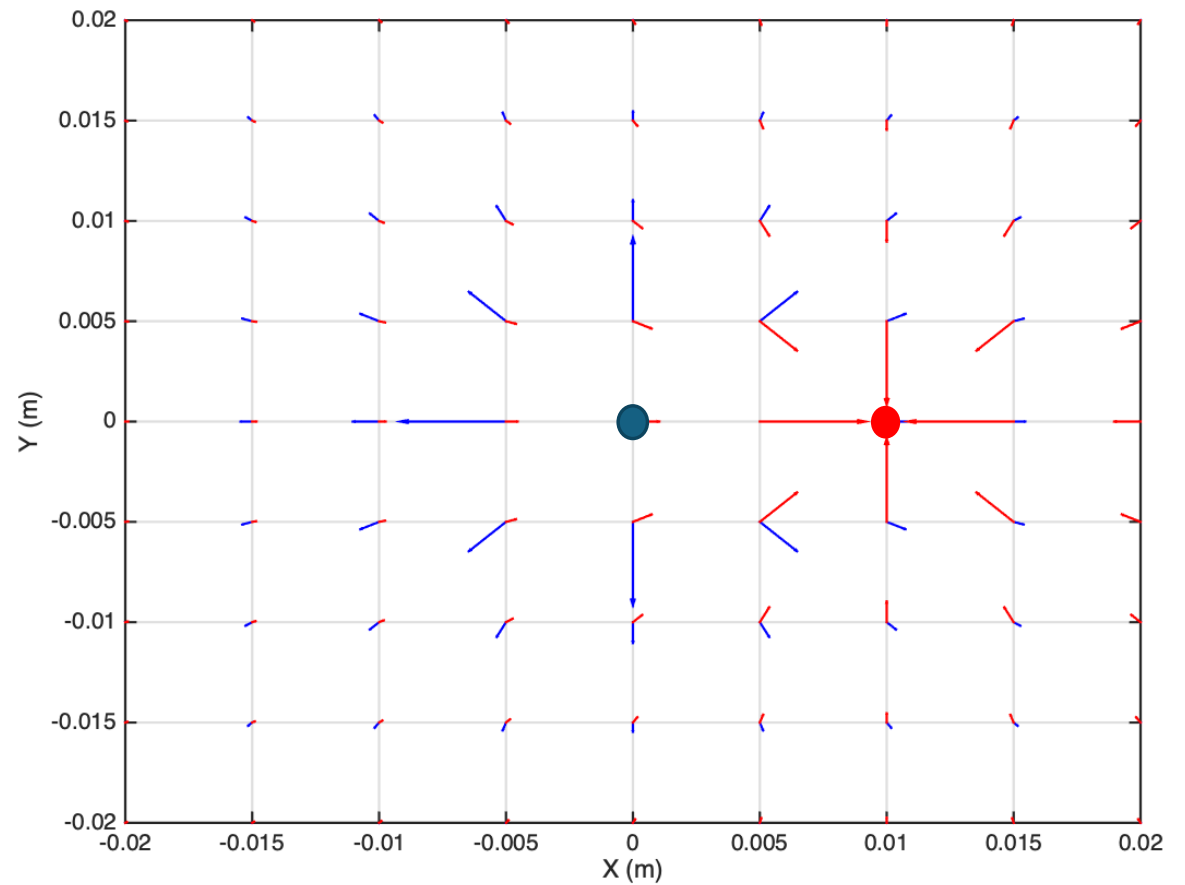
# Campo de dos cargas puntuales

- Una carga  $+e$  en  $(0,0)$ .
- Una carga  $-e$  en  $(1 \text{ cm})$ .



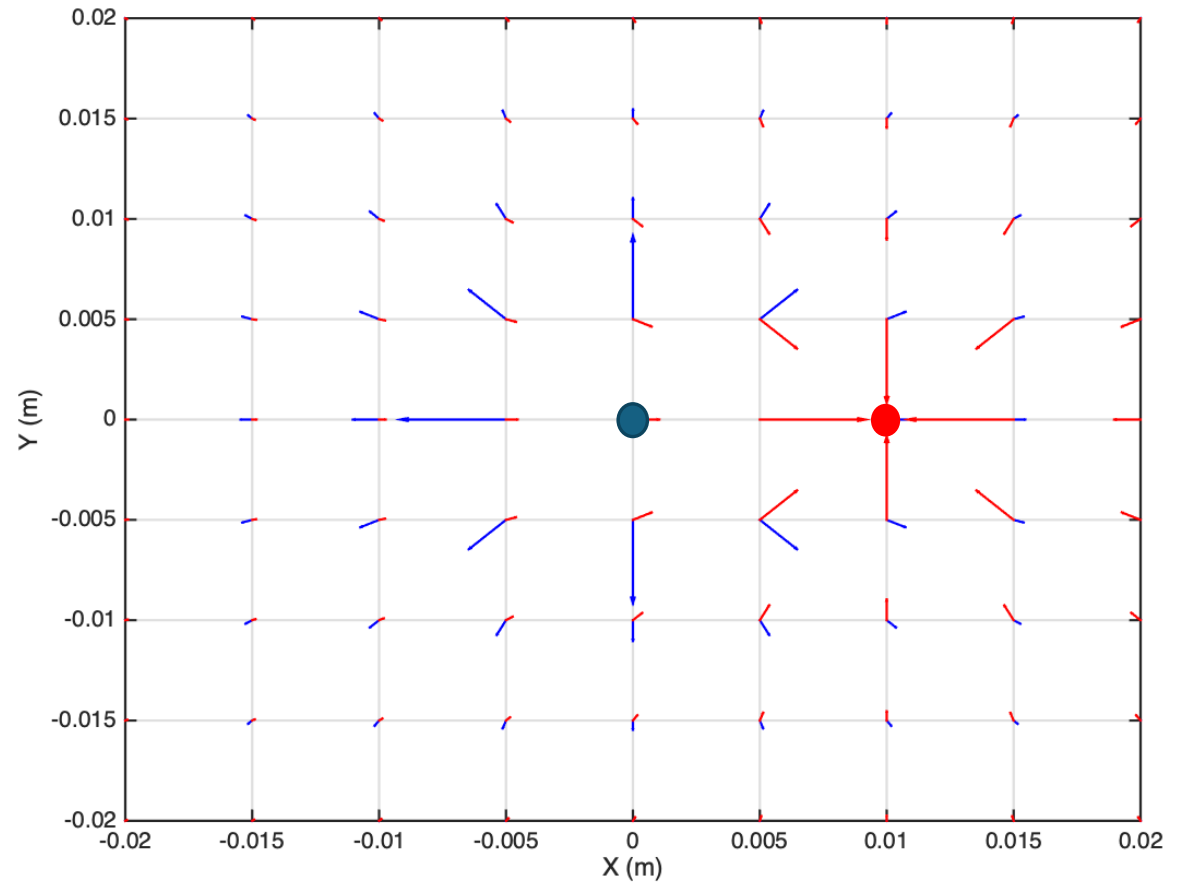
# Campo de dos cargas

- Una carga  $+e$  en  $(0,0)$ .
- Una carga  $-e$  en  $(0,1 \text{ cm})$ .



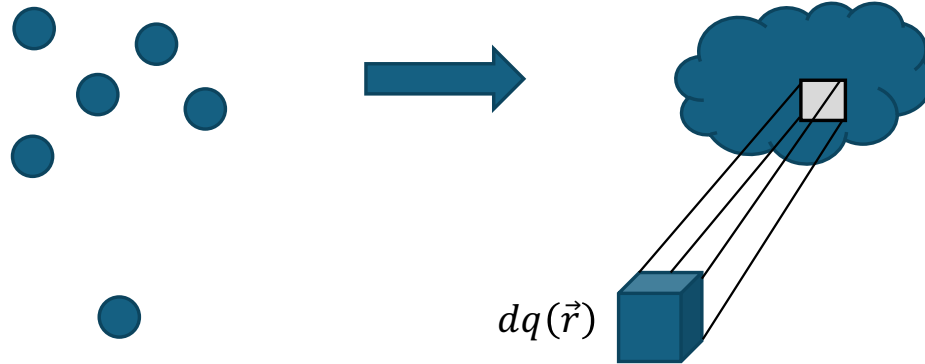
# Campo de dos cargas

- Una carga  $+e$  en  $(0,0)$ .
- Una carga  $-e$  en  $(0,1 \text{ cm})$ .
- El campo total en cada punto es la suma vectorial de los campos de cada carga.





# Distribución continua de cargas



Carga puntual  
en punto  $\vec{r}$

Diferencial de carga en el  
punto  $\vec{r}$

$Q$

$$dq(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) dV$$

Densidad  
de carga en  $\vec{r}$

Diferencial  
de volumen  
en el punto  $\vec{r}$

# Campo eléctrico de una distribución

- Vimos que para  $N$  cargas puntuales en posiciones  $\vec{r}_j$ , el campo  $\vec{E}$  en el punto  $\vec{r}_0$

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j \hat{r}_{0j}}{r_{0j}^2}$$

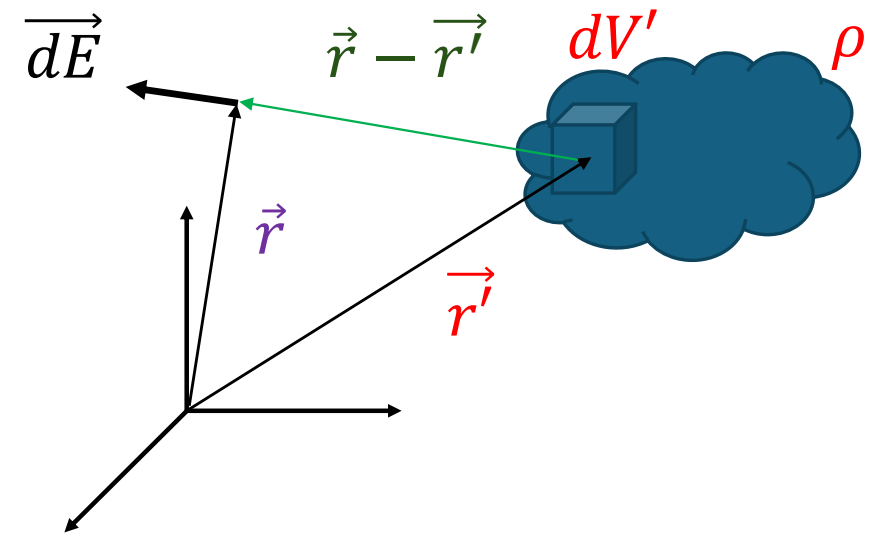
- Donde  $\hat{r}_{0j}$  es un vector unitario que apunta desde  $\vec{r}_0$  hasta  $\vec{r}_j$ .  
Equivalentemente:

$$\vec{E}(\vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j (\vec{r}_j - \vec{r}_0)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_0|^3}$$

# Campo eléctrico de una distribución

- Equivalentemente, pensemos en un diferencial de carga  $\rho(\vec{r}') dV'$  en el punto  $\vec{r}'$  como parte de una distribución volumétrica  $\rho$ .
- La contribución de  $\rho(\vec{r}') dV'$  al campo eléctrico  $\vec{E}$  en el punto  $\vec{r}$  es:

$$\vec{dE}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho(\vec{r}') dV' (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$



$\vec{r}'$  es el punto 'fuente'  
 $\vec{r}$  es el punto 'campo'

# Campo eléctrico de una distribución

- El campo total  $\vec{E}$  en el punto  $\vec{r}$  se obtiene integrando sobre todo el volumen de la distribución de carga volumétrica.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

- Equivalentemente podemos expresar  $\rho(\vec{r}')dV'$  como  $dq(\vec{r}')$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{Carga } Q} \frac{dq(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

# Campo eléctrico de una distribución

- Esta forma permite usar distribuciones superficiales  $\sigma$  :

$$dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') ds'$$

- En cuyo caso

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\sigma(\vec{r}') ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- O distribuciones lineales  $\lambda$

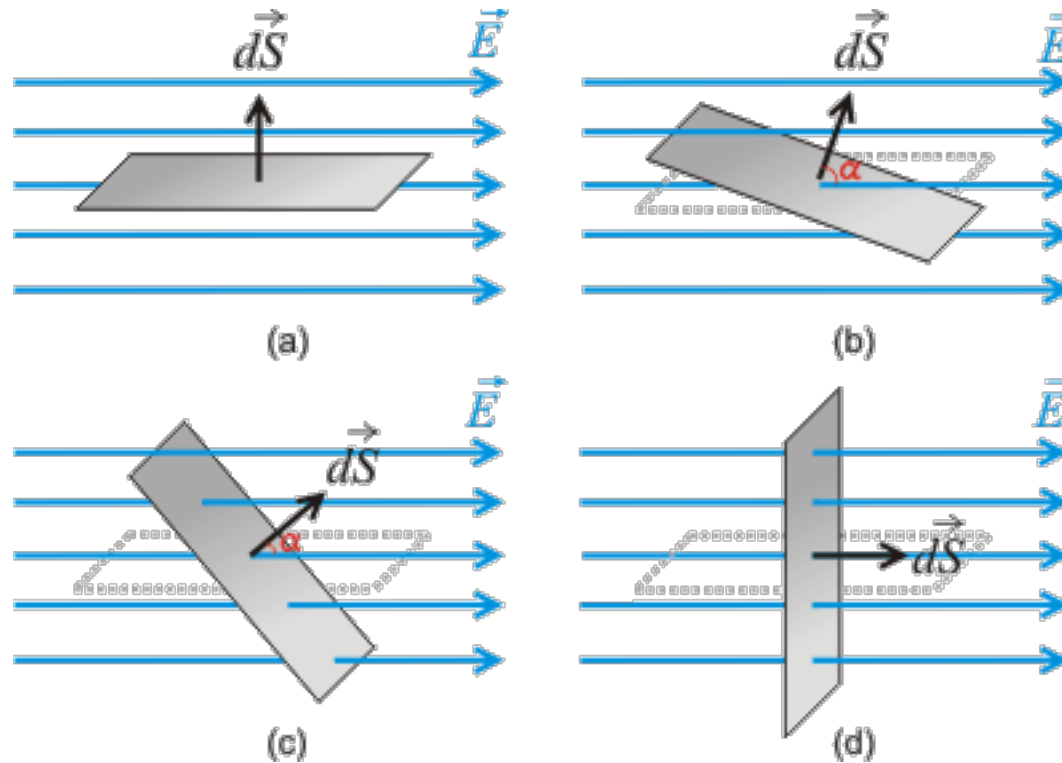
$$dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl'$$

- Y entonces

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}')\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

# Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

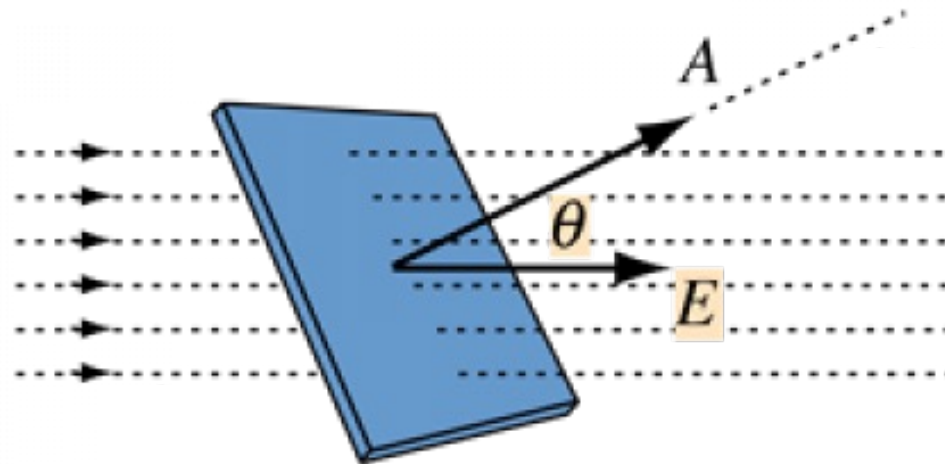


# Flujo de un campo a través de una superficie

El flujo es el producto de un campo por el área transversal que atraviesa

Superficie plana de área  $A$ ,  $\vec{E}$  uniforme

$$\Phi = \vec{E} \cdot \vec{A} = EA \cos \theta$$



# Flujo de campo eléctrico

- Superficie compuestas de facetas de área  $\vec{A}_i$  atravesadas por campos  $\vec{E}_i$ .

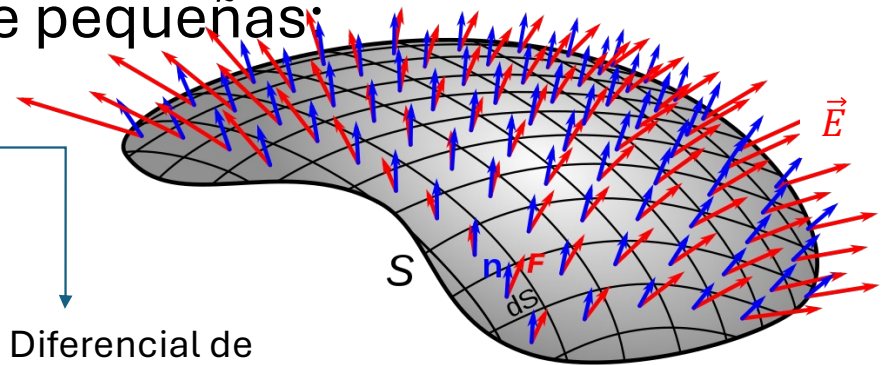
$$\Phi = \sum_{\text{todos los } i} \vec{E}_i \cdot \vec{A}_i = \sum_{\text{todos los } i} E_i A_i \cos \theta_i$$



- Si las facetas son infinitesimalmente pequeñas:

$$\Phi = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, ds$$

$\vec{E}$  Campo en la faceta infinitesimal  
 $\vec{n}$  Normal a la faceta infinitesimal  
 $ds$  Diferencial de área

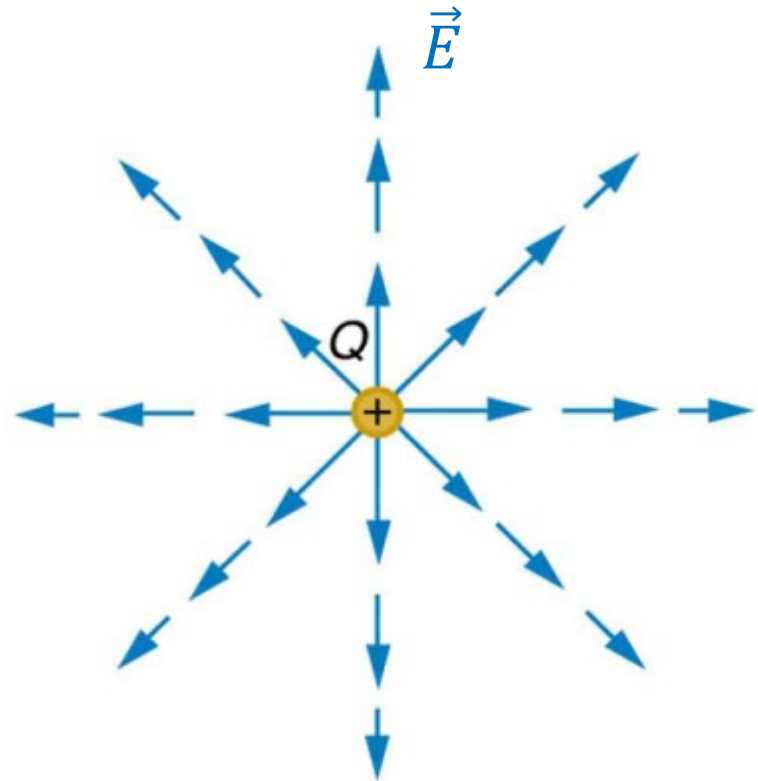




# Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

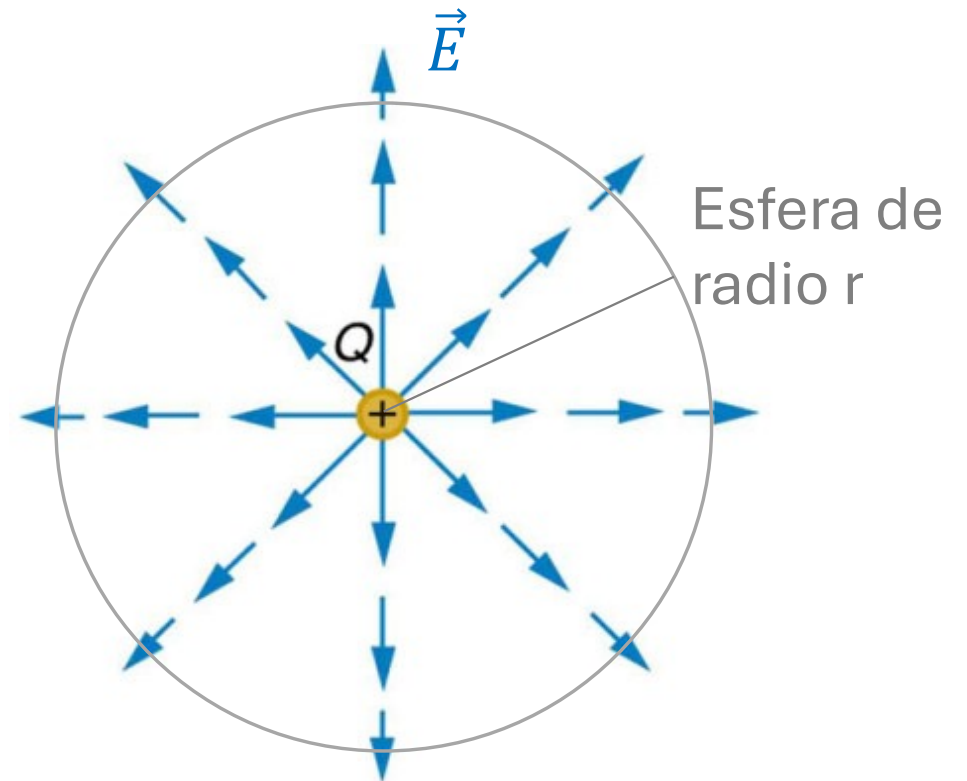


# Flujo eléctrico de una carga $Q$ a través de una esfera

- El flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio  $r$  vale:

$$\Phi = \int \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Superficie de  
la esfera

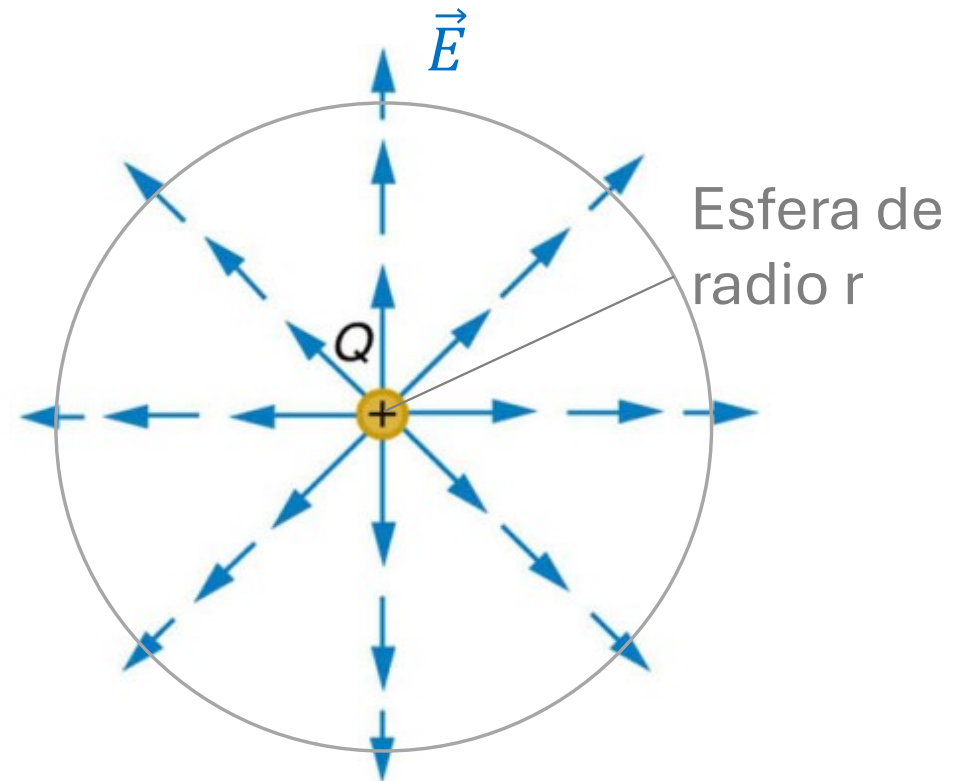


# Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Sobre la esfera,  $\vec{E}$  apunta siempre radialmente y vale lo mismo

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}$$

Superficie de  
la esfera

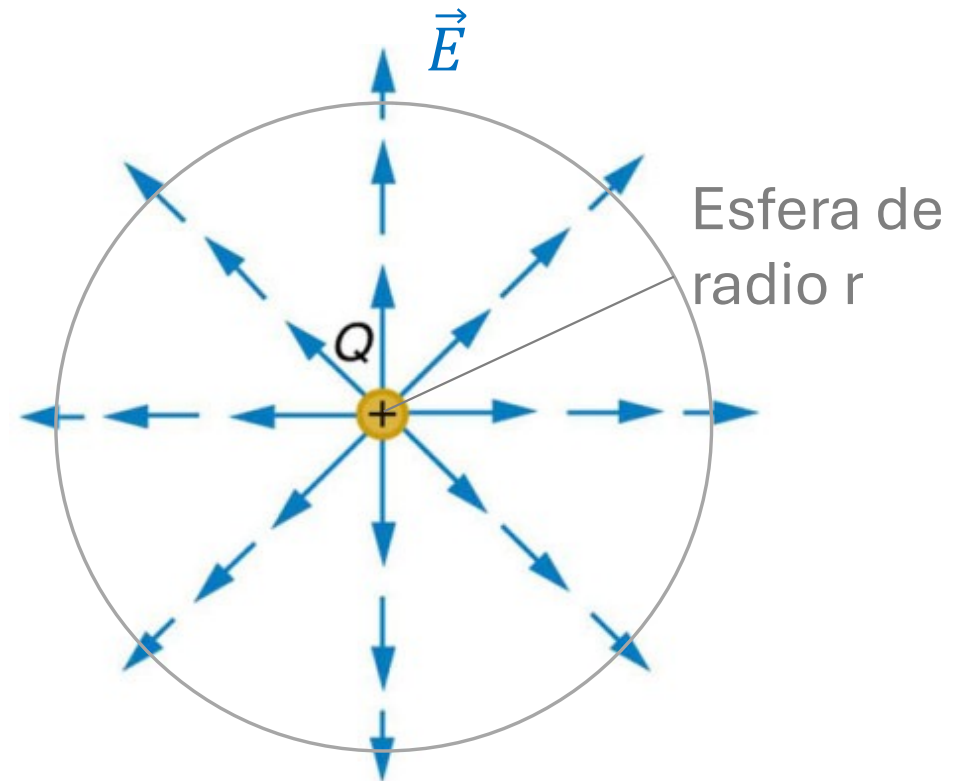


# Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale  $r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \hat{r}$$

Superficie de  
la esfera



# Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera

- Partiendo de:

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \hat{r}$$

Superficie de  
la esfera

- Reorganizamos los factores y tachamos los  $r^2$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\cancel{r^2}} \cancel{r^2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \hat{r} \cdot \hat{r}$$

Superficie de  
la esfera

# Flujo eléctrico de una carga $Q$ a través de una esfera

- Luego, sabemos que por definición  $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$\Phi = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Superficie de  
la esfera

- Ponemos ahora los límites de integración y  $Q$  sale afuera

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

# Flujo eléctrico de una carga $Q$ a través de una esfera

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale  $2\pi$ , entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es el mismo para cualquier valor de  $r$ .

# Ley de Gauss



Carl Friedrich Gauss  
(1777-1855)

*Se verifica que en general, **para toda superficie cerrada**  $S$  que encierra un volumen  $V$ , El flujo del campo eléctrico  $\vec{E}$  a través de  $S$  es proporcional a la carga total encerrada*

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_i q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, dv$$

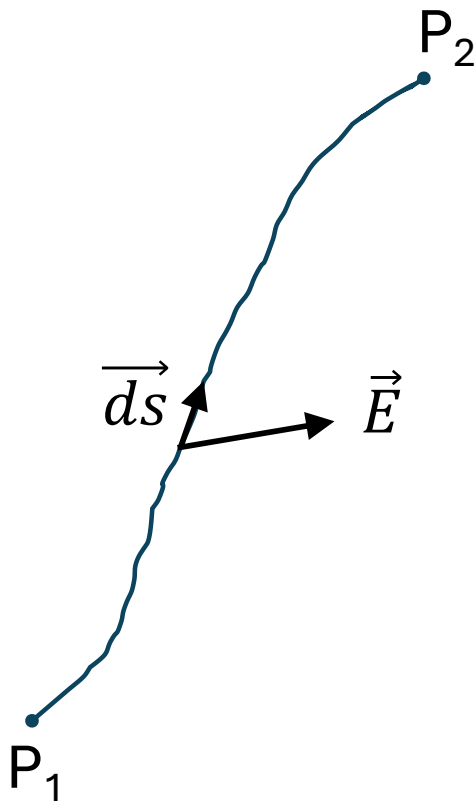


# Pregunta

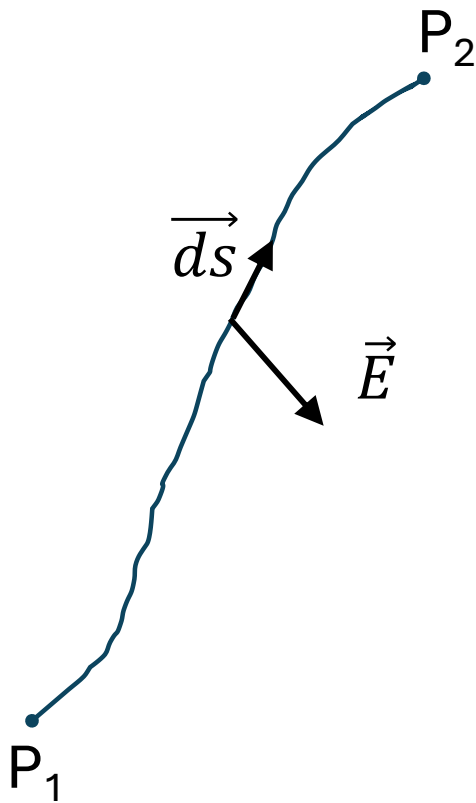
- ¿Qué dice el Teorema de Gauss?

# Integral de línea del campo

- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

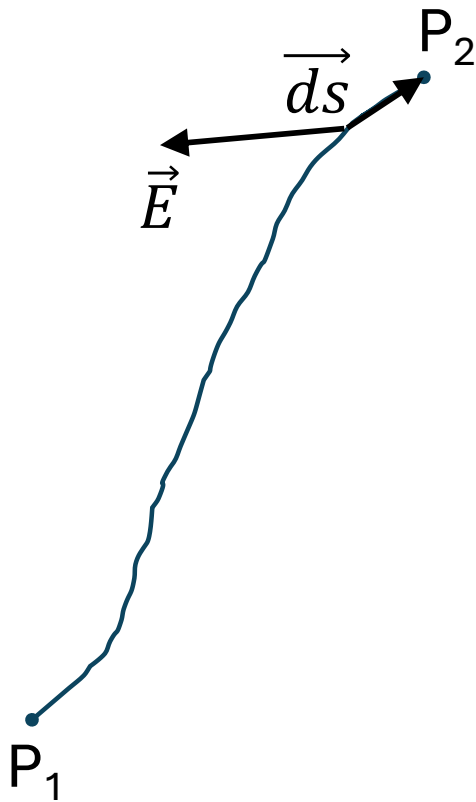


# Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.
- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo  $\vec{E}$  entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

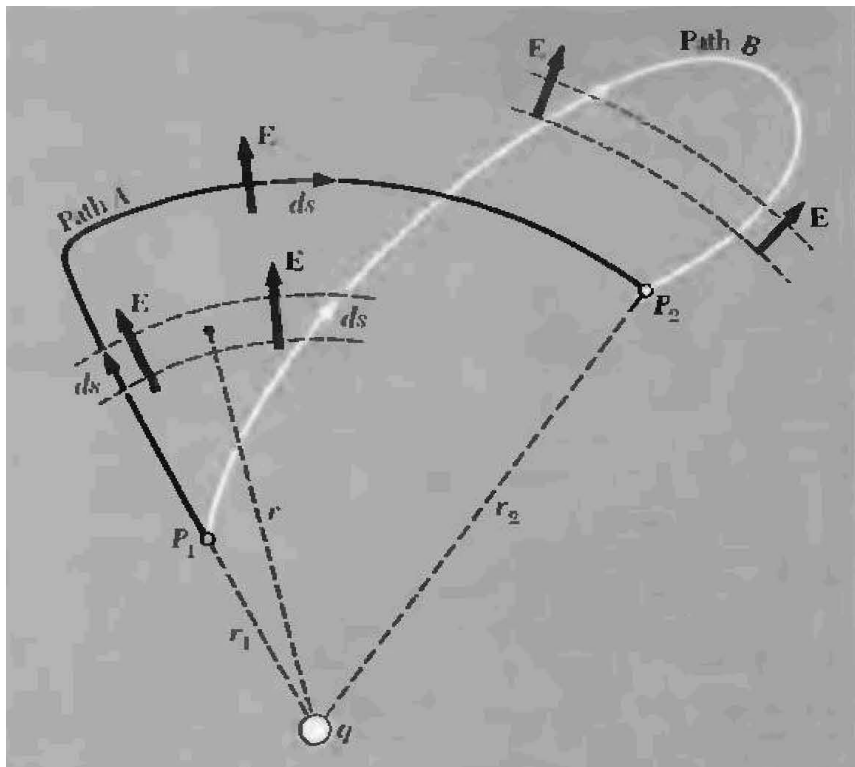
# Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.
- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo  $\vec{E}$  entre dos puntos  $P_1$  y  $P_2$ .

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

# Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual  $q$ .

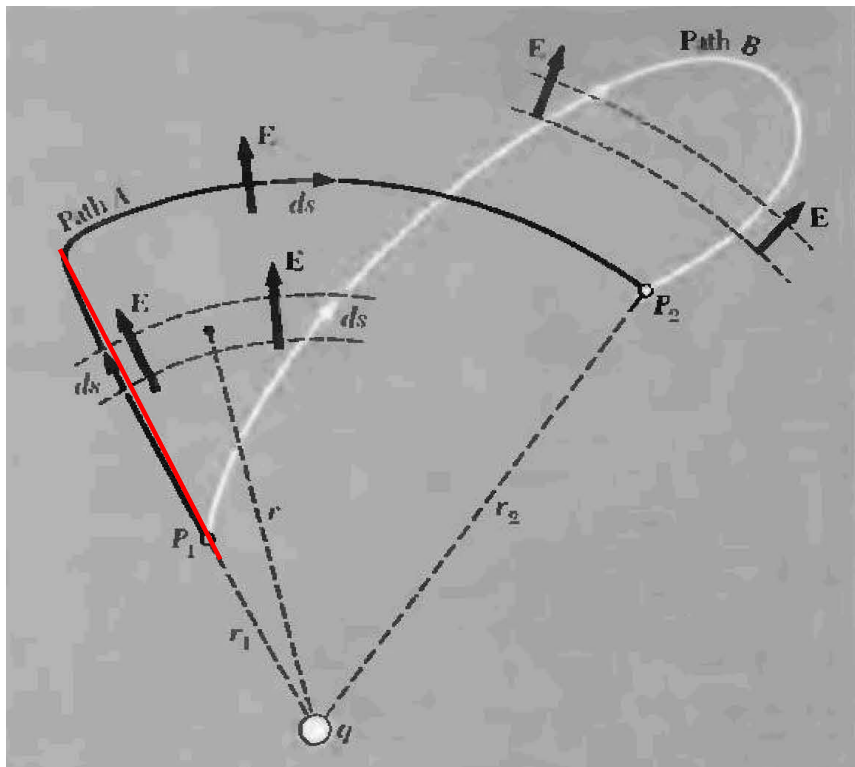
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1$  a  $r_2$  + un arco a  $r_2$ ) la integral entre  $P_1$  y  $P_2$  da:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} =$$

Camino A

# Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual  $q$ .

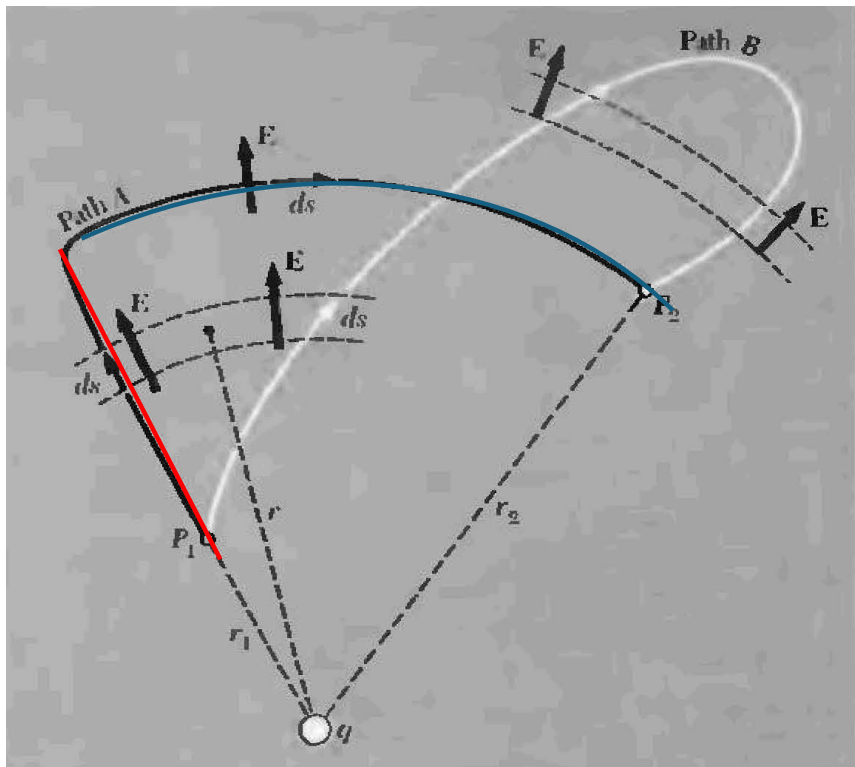
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1$  a  $r_2$  + un arco a  $r_2$ ) la integral entre  $P_1$  y  $P_2$  da:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \int \underbrace{\vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}}_{\text{Camino radial}} +$$

Camino A

# Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual  $q$ .

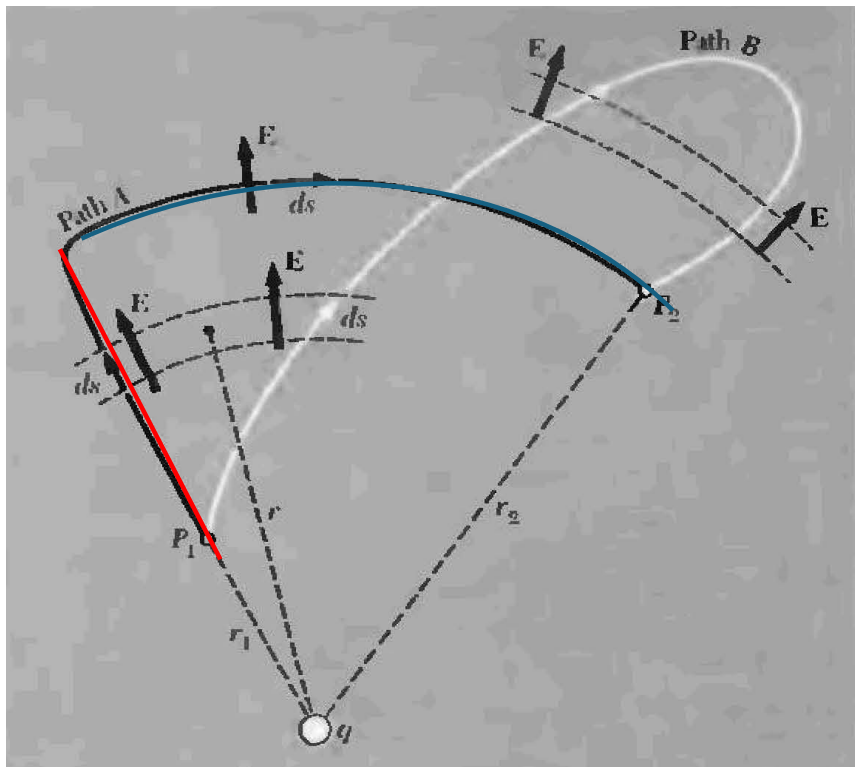
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1$  a  $r_2$  + un arco a  $r_2$ ) la integral entre  $P_1$  y  $P_2$  da:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{Camino radial}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{\text{Arco}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Camino A

# Diferencia de potencial en carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual  $q$ .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1$  a  $r_2$  + un arco a  $r_2$ ) la integral entre  $P_1$  y  $P_2$  da:

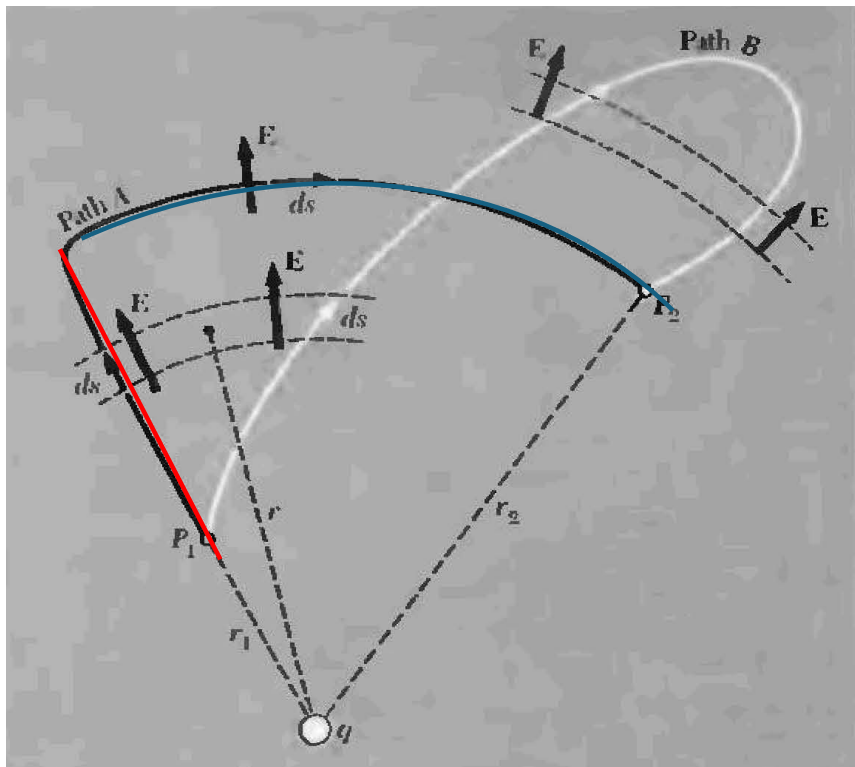
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Camino radial                      Arco

Son perpendiculares!



# Diferencia de potencial en carga puntual



- Por el Camino A (camino radial desde  $r_1$  a  $r_2$  + un arco a  $r_2$ ) la integral entre  $P_1$  y  $P_2$  da  $d\vec{s} = dr \hat{r}$  :

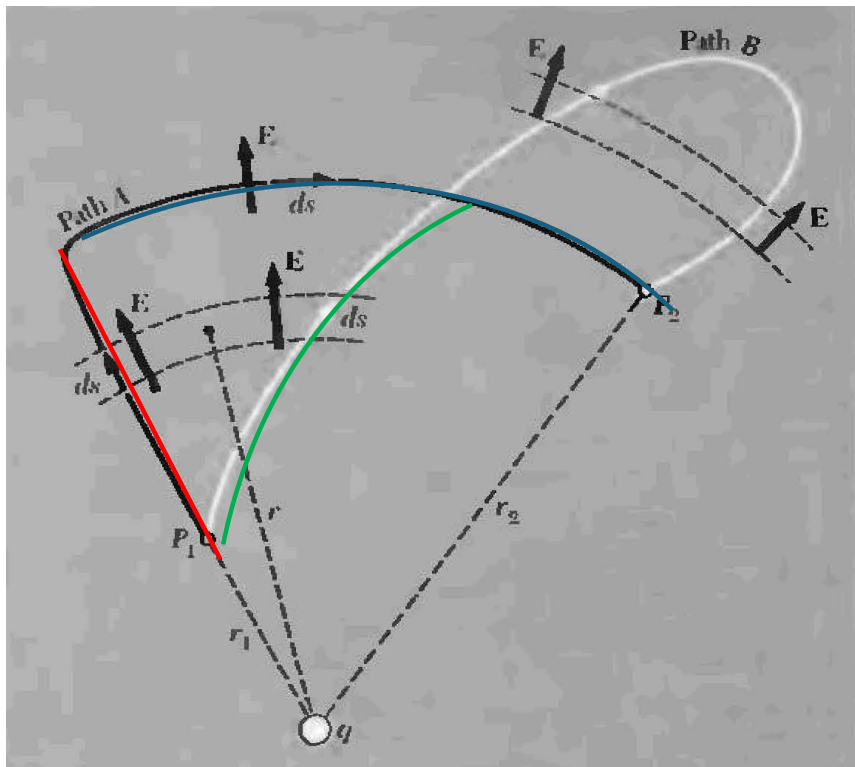
$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

Camino A

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Camino A

# Diferencia de potencial en carga puntual

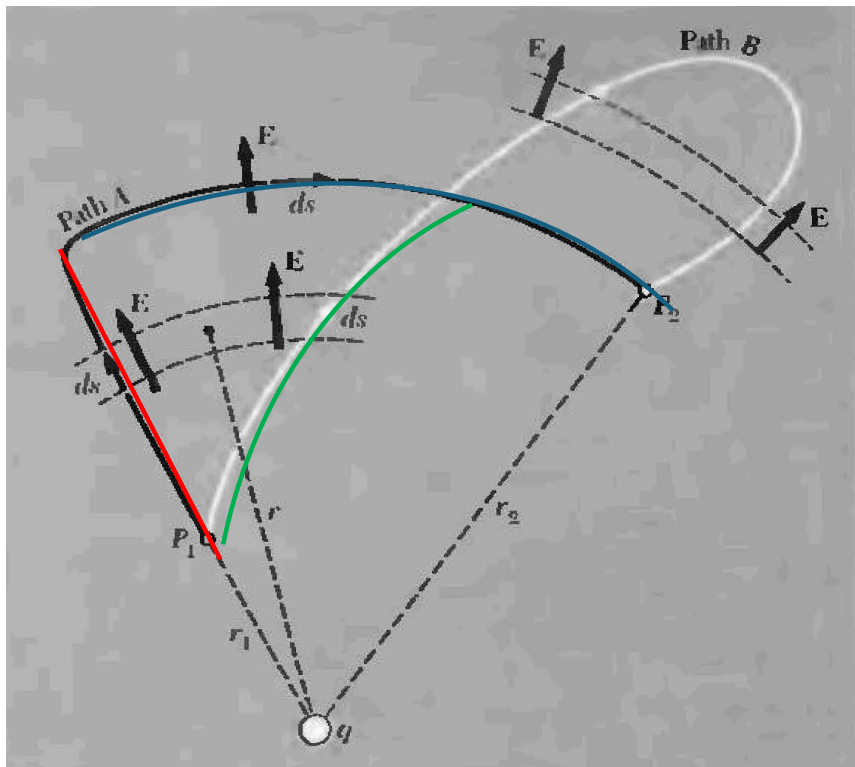


- Al ser  $\vec{E}$  radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Camino B  
Tramo verde

# Diferencia de potencial en carga puntual



- Al ser  $\vec{E}$  radial, la integral por el tramo verde del Camino B vale lo mismo que la integral del camino A.

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

Camino B  
Tramo verde

- Mientras que el lazo blanco no contribuye.

# Diferencia de potencial en carga puntual

- Como el camino B no tiene nada especial, **la integral no depende del camino y para  $P_1$  y  $P_2$  fijos siempre vale:**

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right]$$

- **La diferencia de potencial entre  $P_1$  y  $P_2$  se define como:**

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds}$$

- En electrostática no depende del camino
- Solo depende del punto inicial y el final

# Función potencial para una carga puntual

- La diferencia de potencial entre dos puntos es para este caso:

$$\phi_{21} = - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right]$$

- Se puede definir una función potencial  $\phi(r)$  si coloco un potencial de referencia común para todo el sistema. Podemos hacerlo en  $r_1 = \infty$  (muy lejos de la distribución) con lo cual:

$$\phi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Función potencial de una carga puntual con potencial cero en el infinito

# Pregunta

- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial.
- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso que acabamos de ver?

(a) A single positive charge

