

Ley de Gauss

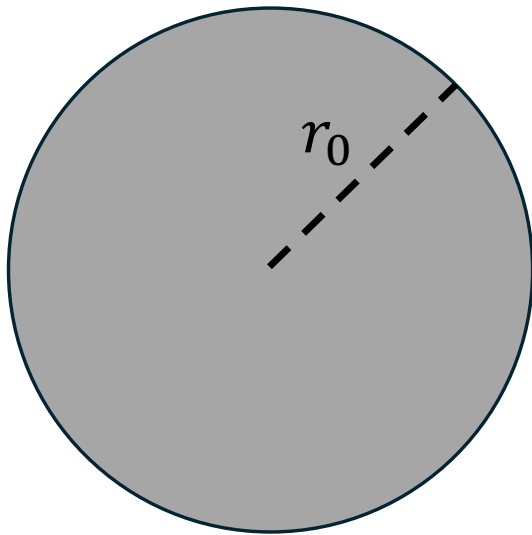
- Supongamos una **superficie cerrada** S que **encierra un volumen** V
- El flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho \, dV$$



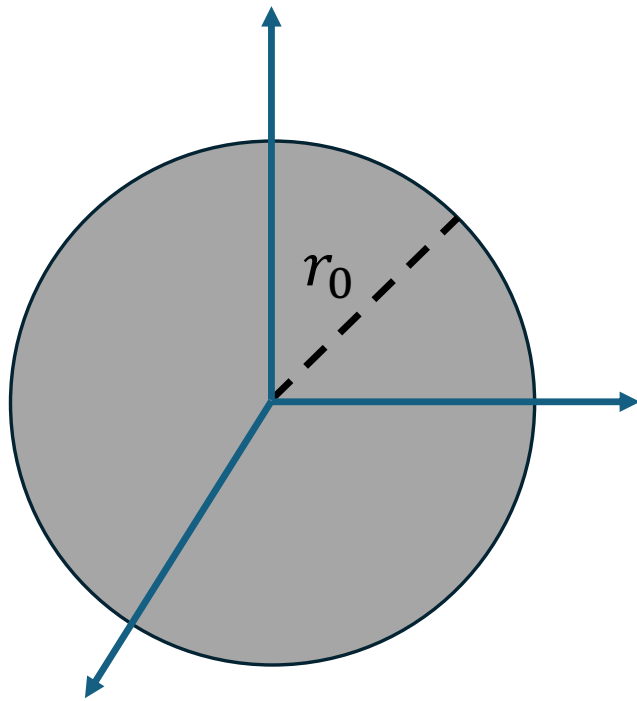
Carl Friederich
Gauss
(1777-1855)

Campo de una distribución esférica de carga



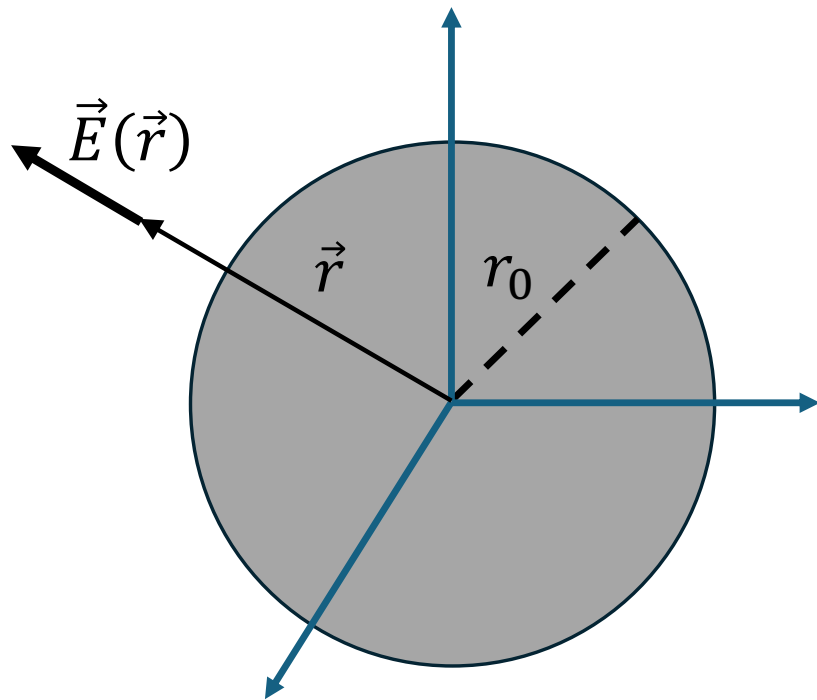
- Supongamos una distribución de carga esférica uniforme de radio r_0 .
- Esto quiere decir que la densidad de carga ρ vale lo mismo dentro de la esfera de radio r_0 .
- Fuera de la esfera, no hay cargas.
- Vamos a usar la Ley de Gauss para obtener el campo eléctrico $\vec{E}$ en todo el espacio.

Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la esfera alrededor del origen no cambia nada).
- Vamos a elegir un sistema de coordenadas esférico con origen en el centro de la esfera.
- De esta manera ρ es una constante entre $0 < r \leq r_0$ y $\rho = 0$ para $r > r_0$

Campo de una distribución esférica de carga



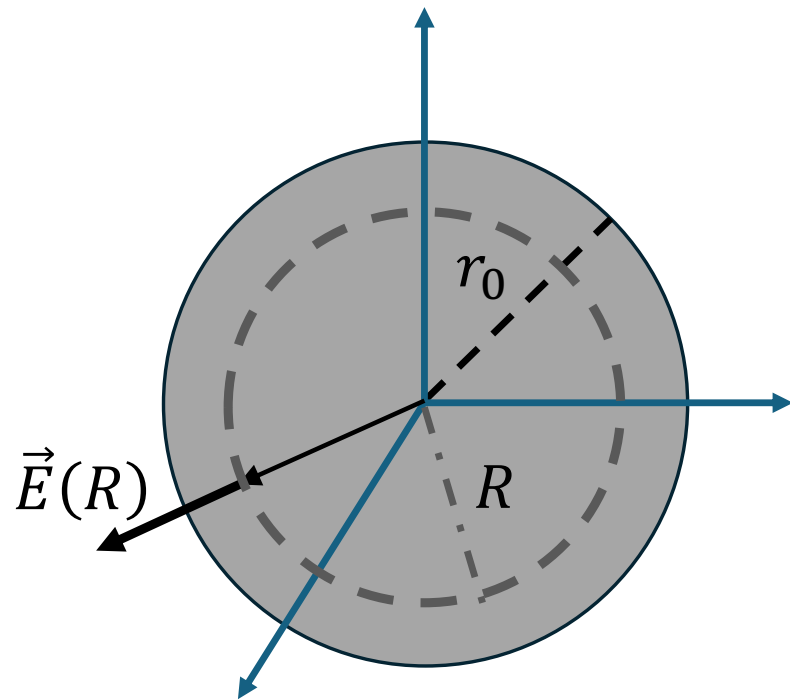
- Con esa simetría, esperamos que el vector campo eléctrico $\vec{E}$ solo tenga componente radial:

$$\vec{E} = E \hat{r}$$

- Además, esperamos que $\vec{E}$ solamente de la distancia radial r .

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

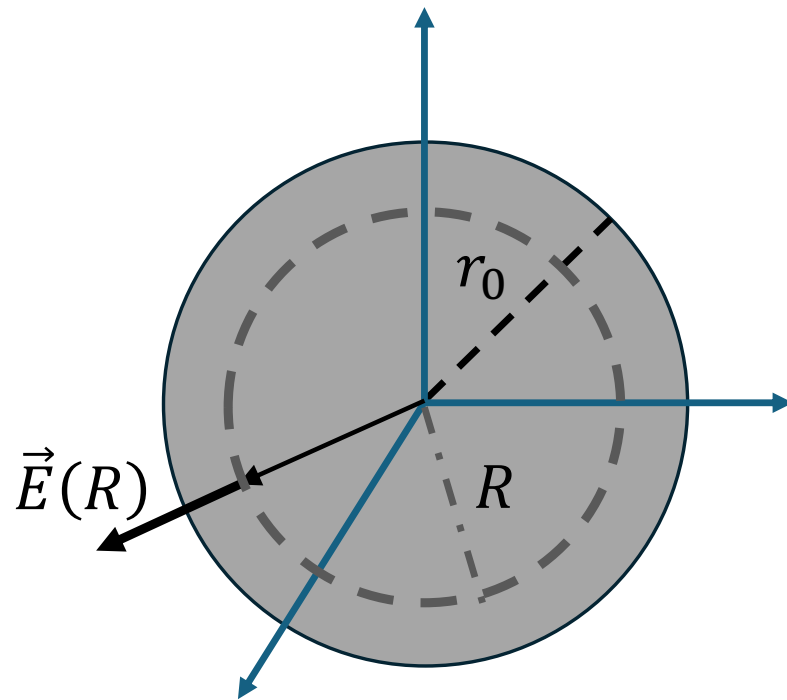
Campo de una distribución esférica de carga



- Separemos el problema en dos regiones: dentro ($0 < r \leq r_0$) y fuera de la esfera de carga ($r > r_0$).
- Planteemos la Ley de Gauss dentro de la esfera ($0 < r \leq r_0$).
- Tomemos como superficie cerrada una esfera de radio $R < r_0$ que llamaremos $S(R)$.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{d\vec{a}} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen Encerrado por } S(R)} \rho \, dV$$

Campo de una distribución esférica de carga



- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \iiint dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3$$

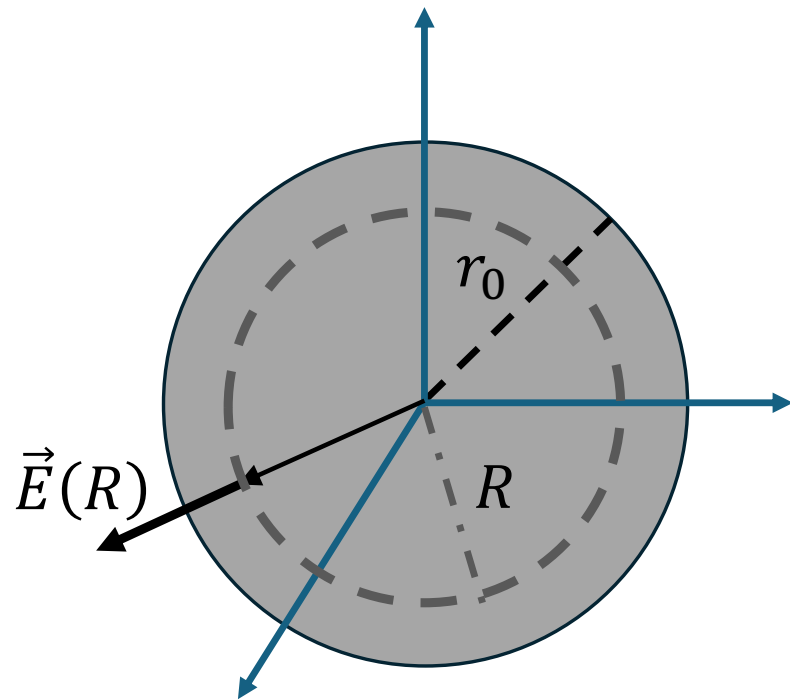
Volumen
Encerrado por

- El primer miembro es una integral hecha sobre la esfera de radio R . Sobre la esfera:

$$\vec{E} = E(R)\hat{r}$$

$$\overrightarrow{da} = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



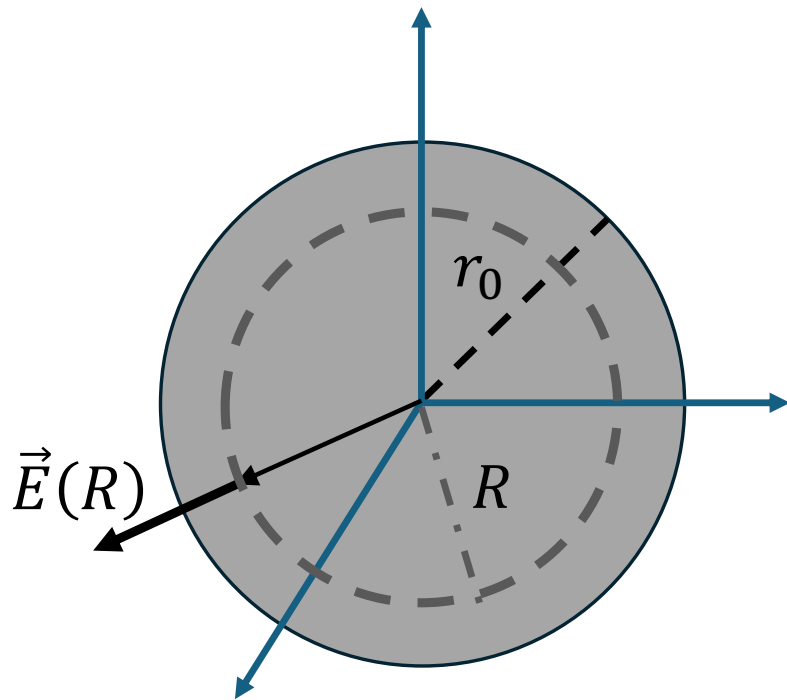
- El segundo miembro es fácil de calcular, ya que ρ dentro de la esfera de radio R es constante.

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(R) \hat{r} \cdot R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

- Como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$ tenemos

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi E(R) R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

Campo de una distribución esférica de carga



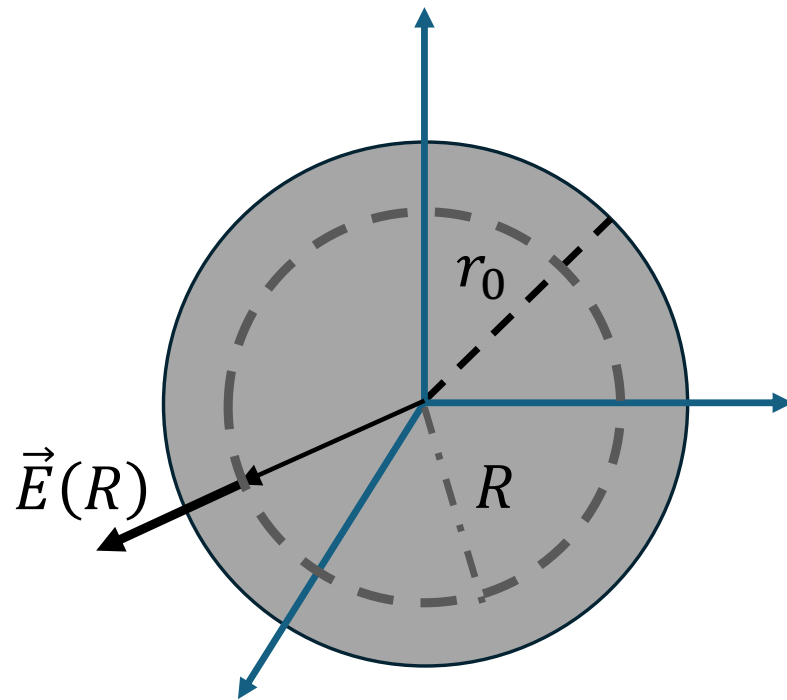
- Lo interesante es que por simetría, $E(R)$ vale lo mismo en toda la esfera. Por eso junto a R^2 salen afuera de la integral

$$\oiint_{S(R)} \vec{E} \cdot \vec{da} = E(R)R^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \, d\varphi$$

- Como vimos antes, la integral doble da 4π y entonces:

$$\oiint \vec{E} \cdot \vec{da} = E(R)4\pi R^2 = E(R)S(R)$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Entonces, juntando primer y segundo miembros:

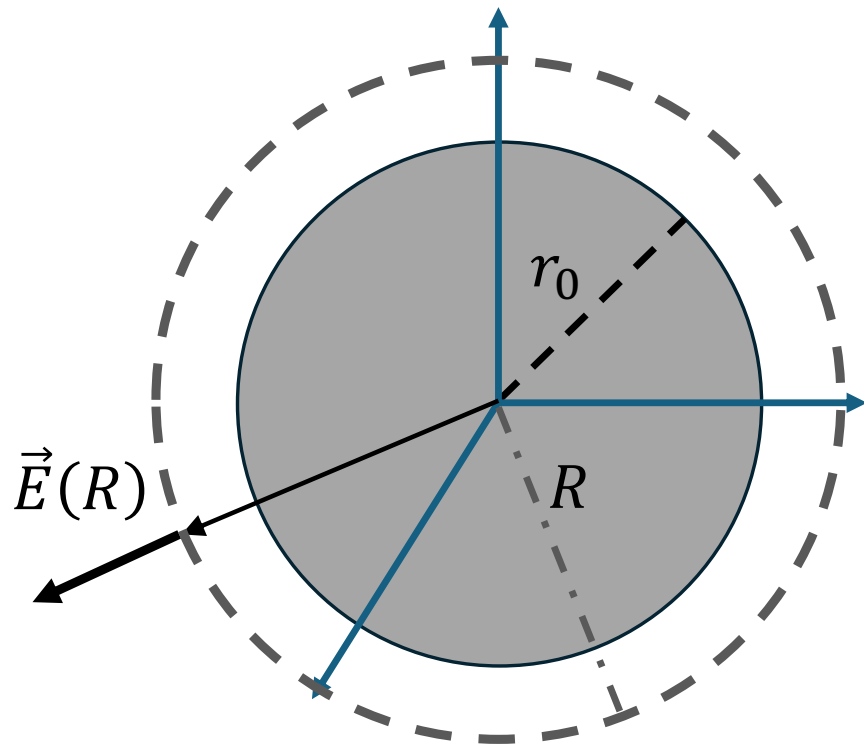
$$E(R)4\pi R^2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3$$

- De aquí despejamos $E(R)$

$$~~E(R)4\pi R^2~~ = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} R^3$$

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{R}{3}$$

Campo de una distribución esférica de carga



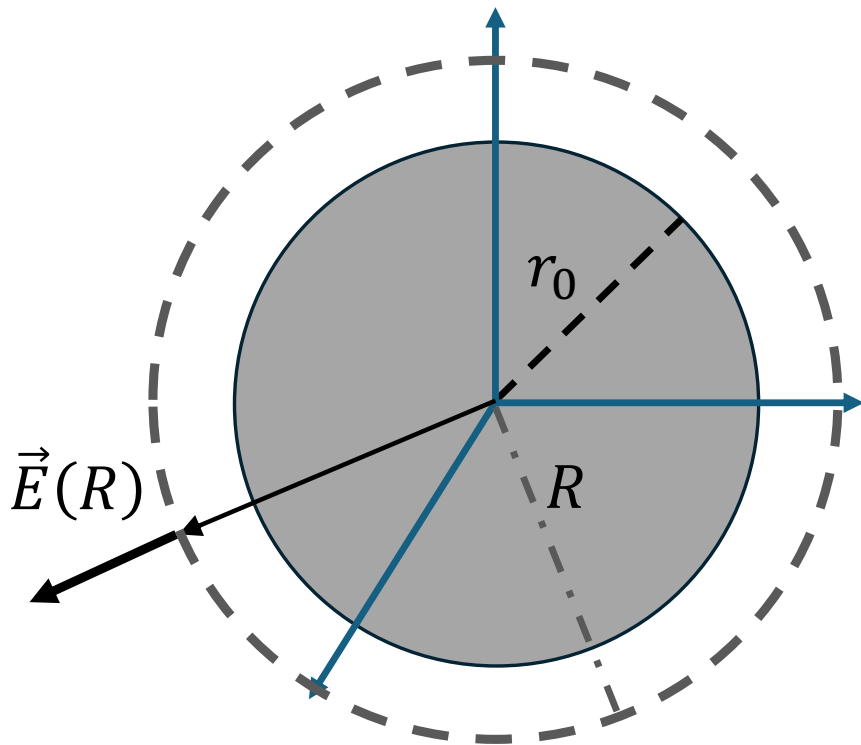
- Entonces, para $0 < r \leq r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{3} \hat{r}$$

- Para $r > r_0$ trazamos una esfera una esfera de radio $R > r_0$
- La forma del primer miembro queda igual. Es el módulo del campo por la superficie de la esfera

$$E(R)4\pi R^2$$

Campo de una distribución esférica de carga



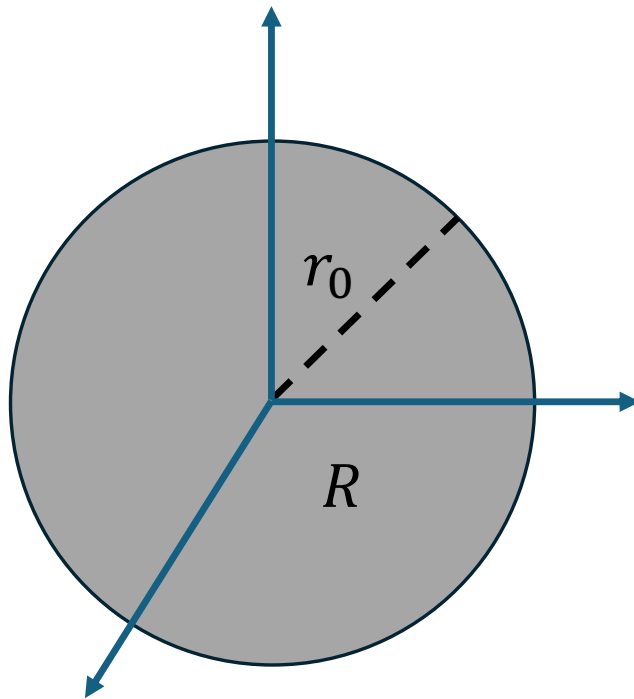
- En el segundo miembro hay que ver que para todo $R > r_0$ la cantidad de carga encerrada permanece igual y es la carga total:

$$\iiint_{\substack{\text{Volumen de carga} \\ \text{Encerrado por} \\ S(R)}} \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{4\pi}{3} r_0^3$$

- Entonces sobre la esfera de radio $R > r_0$:

$$E(R) = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r_0^3}{3R^2}$$

Campo de una distribución esférica de carga



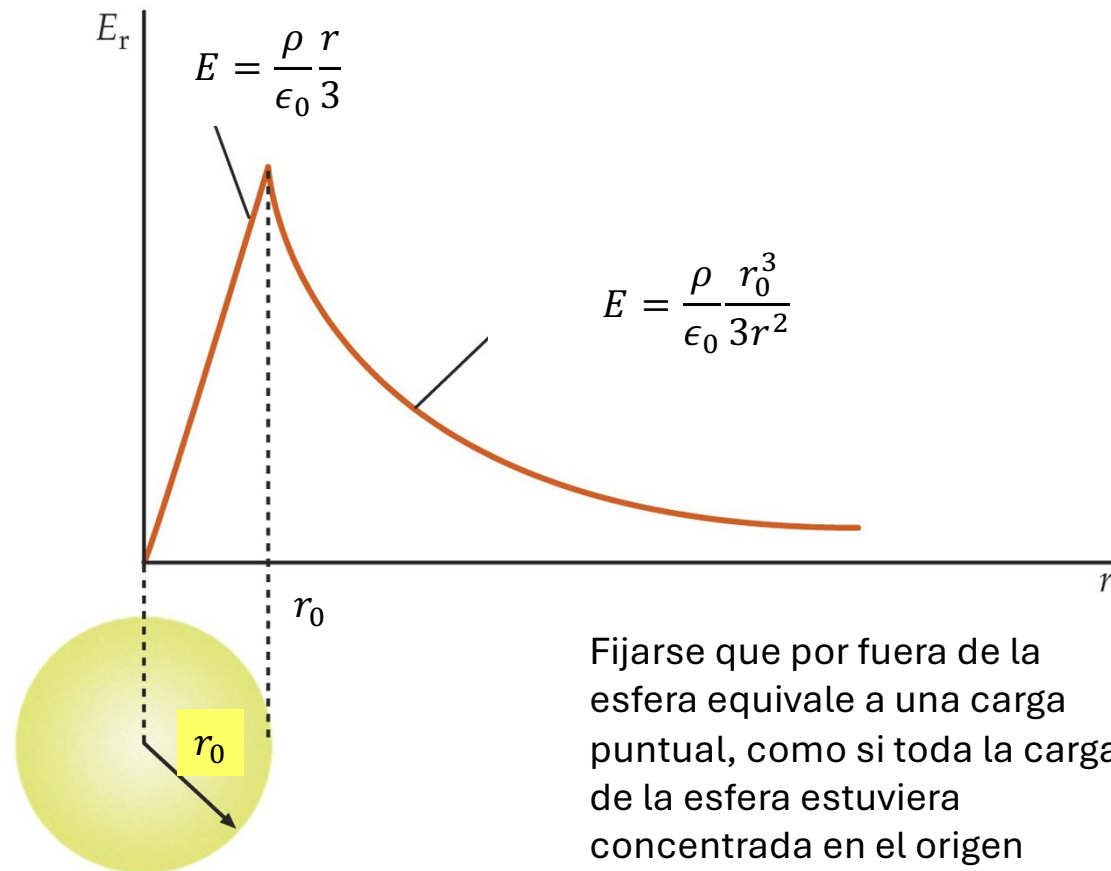
- La solución entonces para $r < r_0$:

$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r}{3} \hat{r}$$

- Y para $r > r_0$

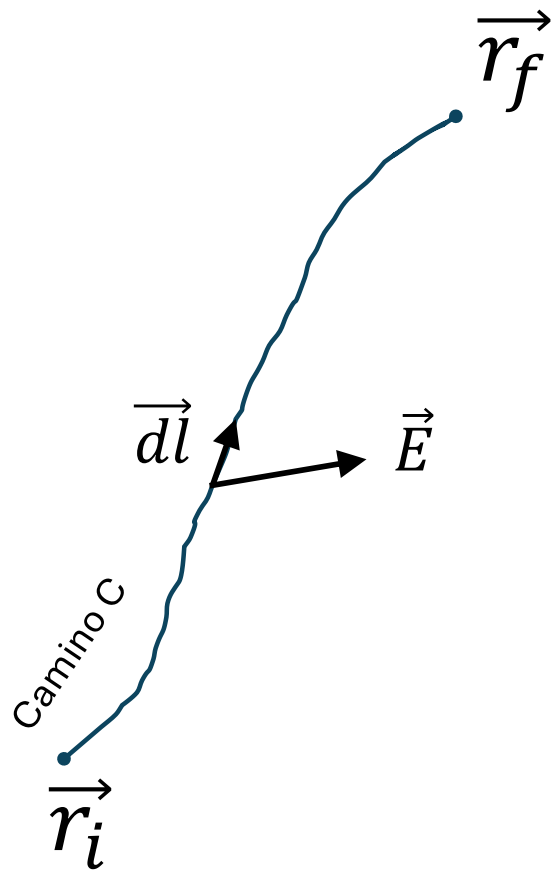
$$\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \frac{r_0^3}{3r^2} \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



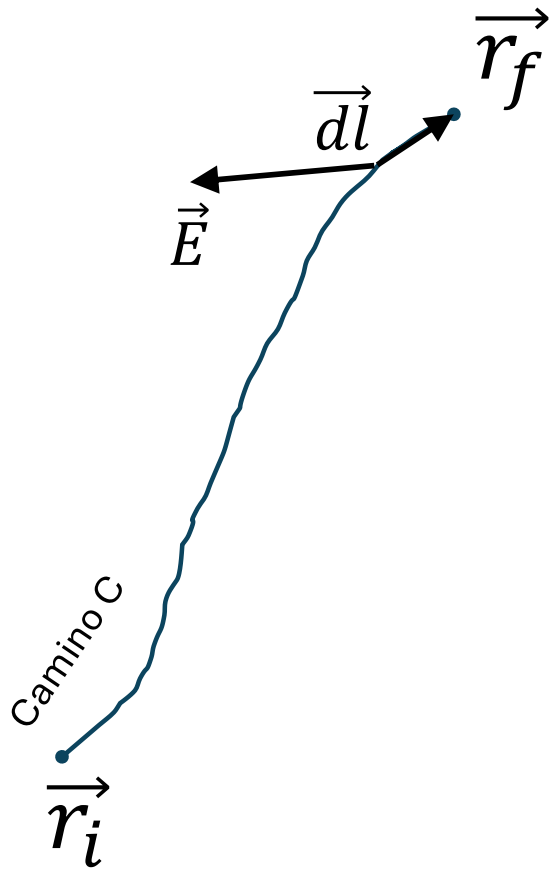
Diferencia de Potencial y función potencial en electrostática

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.

Integral de línea del campo



- Vimos antes el trabajo de la fuerza electrostática.
- Ahora nos interesa ver la integral de camino de un campo $\vec{E}$ entre dos puntos $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$.

$$\int_C^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Diferencia de potencial entre dos puntos

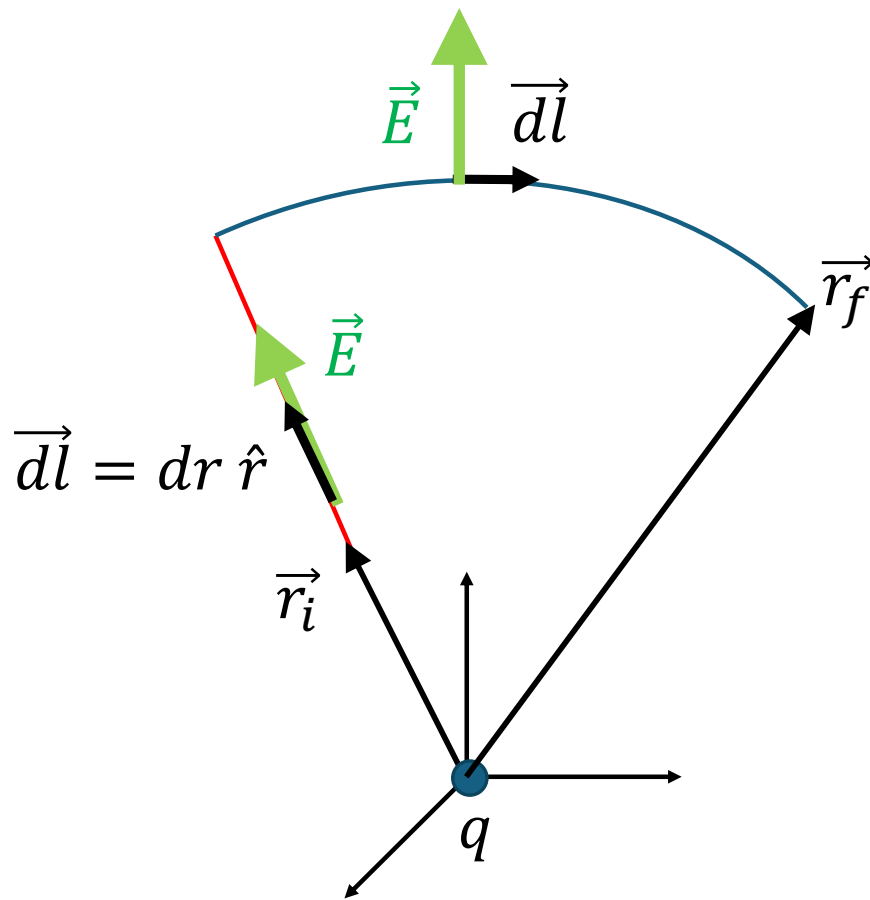
- Definimos la diferencia de potencial entre $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$ se define como:

$$\Delta\varphi = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- En campos electrostáticos (conservativos), **esta integral de línea no depende del camino y sólo de las posiciones de $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$** :

$$\Delta\varphi = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i)$$

Ejemplo: carga puntual



- Supongamos que el campo viene de una carga puntual q .

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

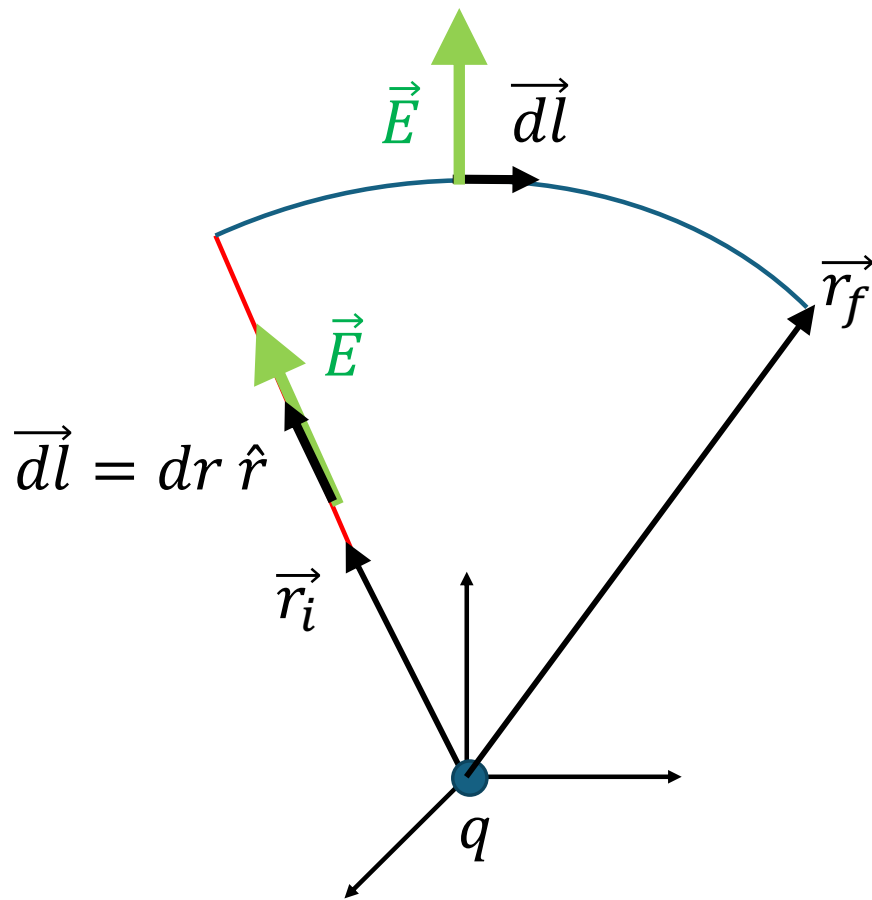
- Como puedo elegir cualquier camino, elijo un camino radial desde r_i a r_f + un arco a r_f constante) la integral entre $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$ da:

$$\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Camino radial Arco

Son perpendiculares!

Ejemplo: carga puntual



- Entonces, como en el primer término $\vec{E}$ es paralelo a $d\vec{l} = r\hat{r}$:

$$\begin{aligned} \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{r_i}^{r_f} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_f} \right] \end{aligned}$$

Generalización para campos electrostáticos

- Entonces la diferencia de potencial entre dos puntos $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$ es para este caso:

$$\varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_f} - \frac{1}{r_i} \right]$$

- Al igual que la energía potencial electrostática, la integral:
– $\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ es independiente del camino elegido.
- Es posible demostrar que esta propiedad se cumple para cualquier campo eléctrico en electrostática.

Diferencia de potencial de campos electrostáticos

- El teorema del gradiente dice que si la integral de línea de un campo $\vec{F}(\vec{r})$ es independiente del camino elegido, entonces existe una función escalar $\psi(\vec{r})$ tal que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = \vec{\nabla}\psi(\vec{r})$$

- Entonces:

$$\psi(\vec{q}) - \psi(\vec{p}) = \int_{\vec{p}}^{\vec{q}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{p}}^{\vec{q}} \vec{\nabla}\psi \cdot d\vec{l}$$

Para cualquier camino que vaya de un punto $\vec{p}$ a a otro $\vec{q}$

Diferencia de potencial de campos electrostáticos

- De manera análoga, la diferencia de potencial independiente del camino entre $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$

$$\varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Permite decir que:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$$

Esto quiere decir que en cada punto del espacio, $\vec{E}$ indica la dirección opuesta a la del crecimiento de la función potencial $\varphi(\vec{r})$

Función potencial

- La función $\varphi(\vec{r})$ quedará definida a menos de una constante.
- En otras palabras, si $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}\varphi(\vec{r})$ entonces la integral entre un punto de referencia $\vec{r}_0$ fijo y uno arbitrario $\vec{r}$ es:

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- Entonces:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + \varphi(\vec{r}_0)$$

Función potencial

- En particular, para una carga puntual,

$$\varphi(\vec{r}) - \varphi(\vec{r}_0) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r_0}$$

- Si, hacemos que r_0 esté muy lejos de la carga, es decir:

$$|\vec{r}_0| = r_0 \rightarrow \infty$$

- Entonces podemos hacer $\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}_0) = 0$ y entonces

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Es decir que podemos obtener la función $\varphi(\vec{r})$ una vez que definimos su valor en un punto fijo de referencia (en este caso, en el infinito).

Función potencial

- Como conclusión podemos decir que es posible obtener la función $\varphi(\vec{r})$ una vez que definimos su valor en un punto fijo de referencia (en este caso, en el infinito).
- Para distribuciones de cargas acotadas (que no haya cargas en el infinito), siempre podemos hacer:

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

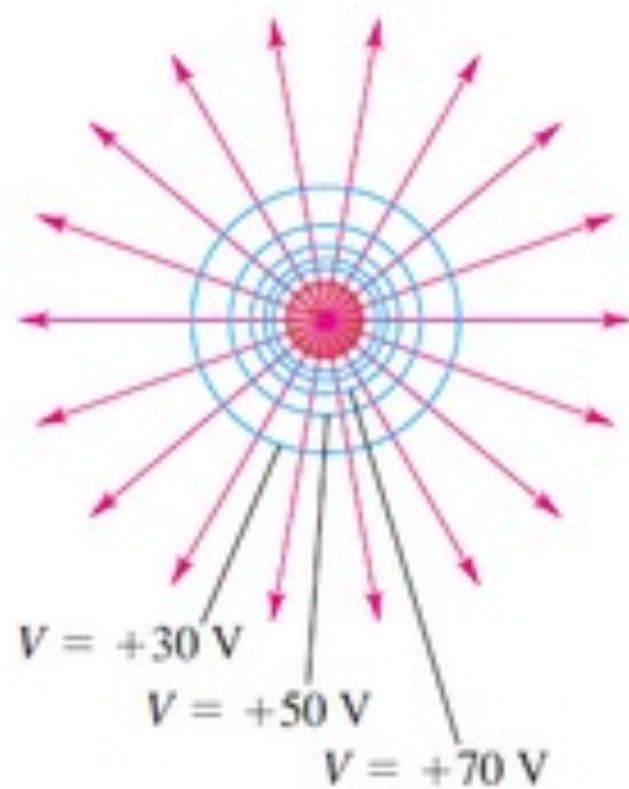
donde

$$\lim_{r_0 \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}_0) = 0$$

Superficies equipotenciales

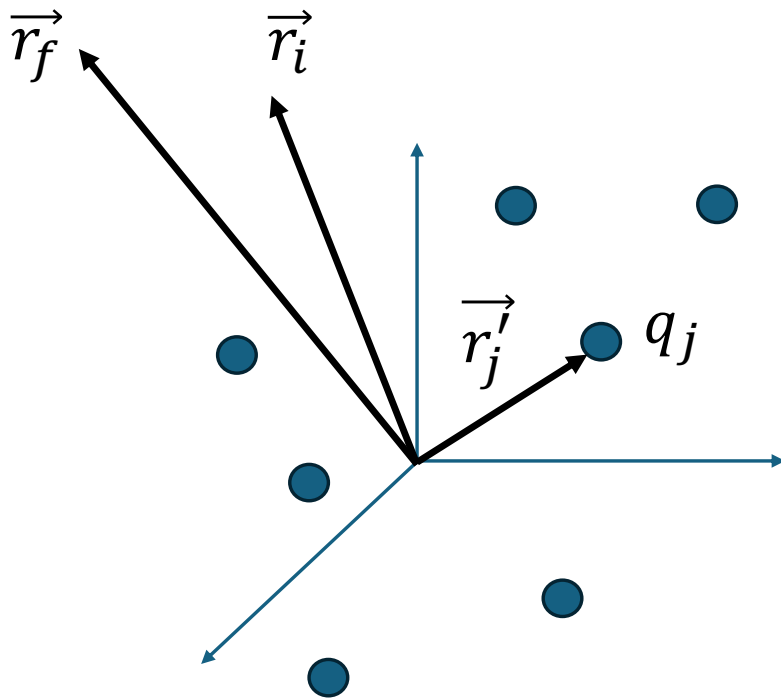
- Se llama equipotencial al conjunto de puntos del espacio que tienen el mismo valor de la función potencial (una vez determinado el potencial de referencia).
- ¿Qué forma tiene una equipotencial para el caso de una carga puntual?

(a) A single positive charge



Potencial de una distribución
(acotada) de cargas

Diferencia de potencial para N cargas puntuales



- Supongamos un sistema de N cargas puntuales $\{q_1 \dots q_j \dots q_N\}$ en posiciones $\{\vec{r}_1' \dots \vec{r}_j' \dots \vec{r}_N'\}$ acotadas.
- Evaluemos la diferencia de potencial entre dos puntos $\vec{r}_i$ y $\vec{r}_f$

$$\varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

- $\vec{E}(\vec{r})$ es el campo resultante de los campos generados por las cargas $\{q_1 \dots q_j \dots q_N\}$ en el punto $\vec{r}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r})$$

Diferencia de potencial para N cargas puntuales

- De manera análoga, para un sistema de N cargas $q_1 \dots q_N$ y por el principio de superposición.

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i) &= - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_N) \cdot d\vec{l} \\ &= - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} - \dots - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}_N \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$

- Centrándonos en cada carga:

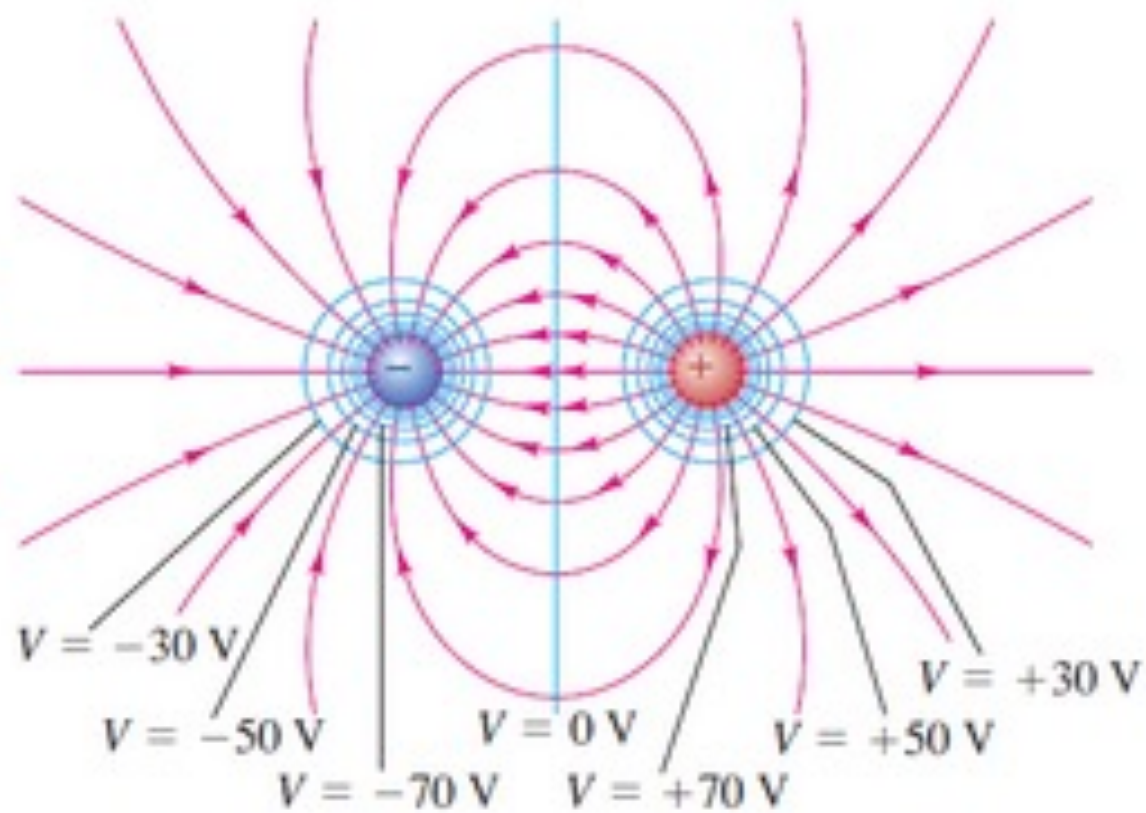
$$\varphi(\vec{r}_f) - \varphi(\vec{r}_i) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N q_j \left[\frac{1}{|\vec{r}_f - \vec{r}_j|} - \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \right]$$

Función potencial para N cargas puntuales

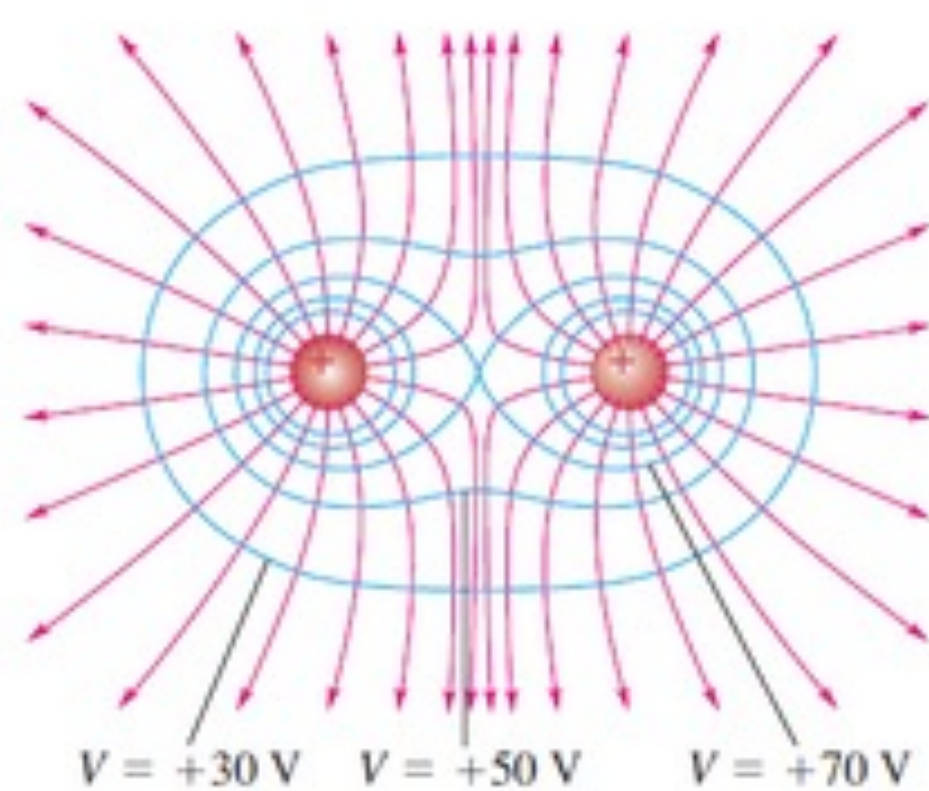
- Si la distribución es acotada en el espacio se puede poner como punto de potencial cero el infinito (es decir $\lim_{r_i \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}_i) = 0$) y entonces, tomando $\vec{r}_f = \vec{r}$, tenemos:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

(b) An electric dipole



(c) Two equal positive charges

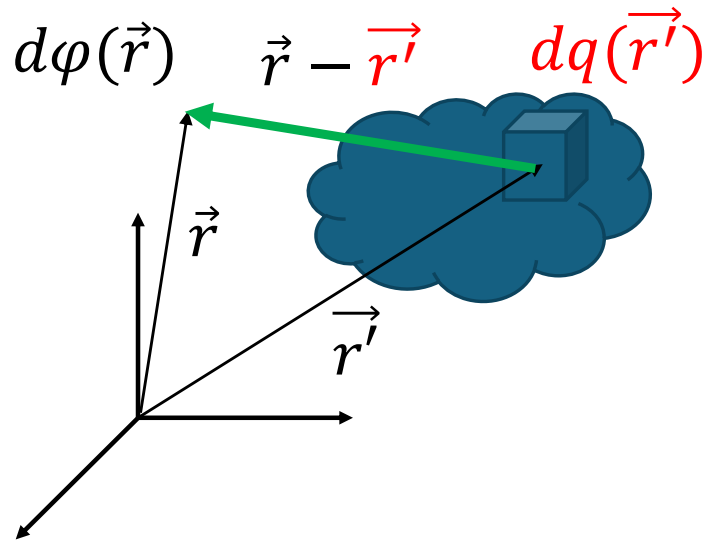


➔ Electric field lines — Cross sections of equipotential surfaces

Potencial de una distribución continua y acotada de carga

- Por estar el campo electrostático y el potencial relacionados por un gradiente, que es un operador lineal, el principio de superposición vale también para la función potencial siempre y cuando tengan el mismo potencial de referencia.
- Si la distribución de cargas es acotada en el espacio, es conveniente poner el potencial de referencia muy lejos ($r=\infty$) y con valor cero.
- Eso hacemos cuando calculamos el potencial de una carga al traer otra desde el infinito

Potencial de una distribución continua y acotada de carga



- La contribución de un pedacito de carga $dq(\vec{r}') = \rho(\vec{r}')dV'$ al potencial en $\vec{r}$ es:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Integrando sobre todo el volumen de la carga y tomando el potencial cero en el infinito:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Otras distribuciones:

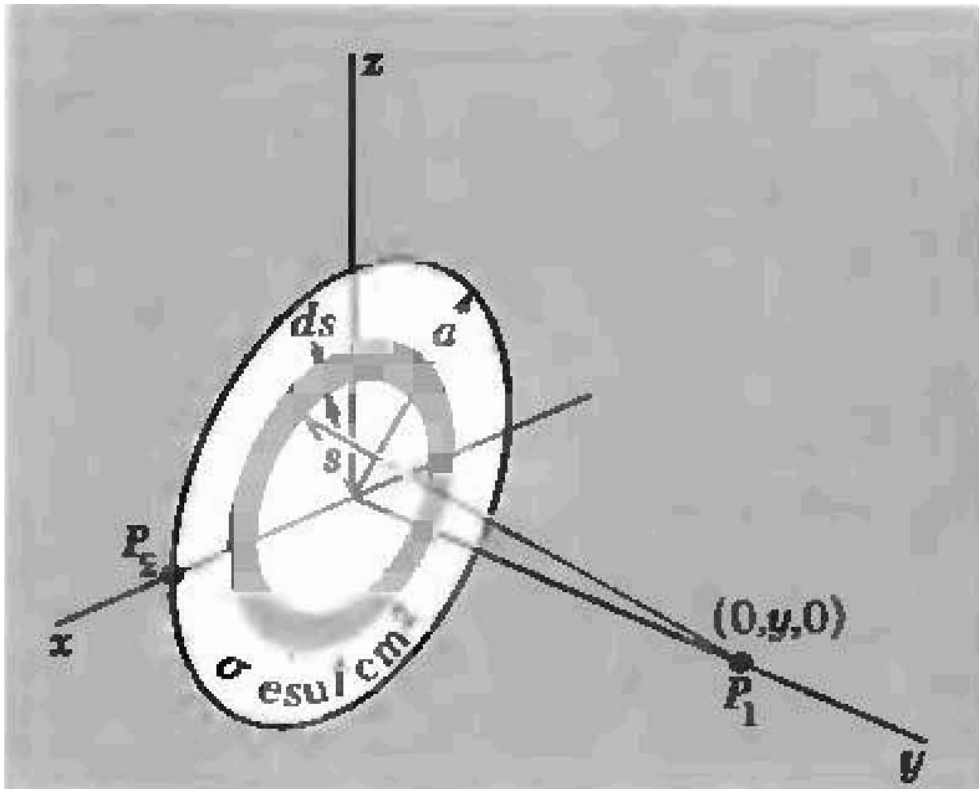
- Distribución lineal: $dq(\vec{r}') = \lambda(\vec{r}') dl'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Distribución superficial: $dq(\vec{r}') = \sigma(\vec{r}') da'$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\sigma(\vec{r}') da'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



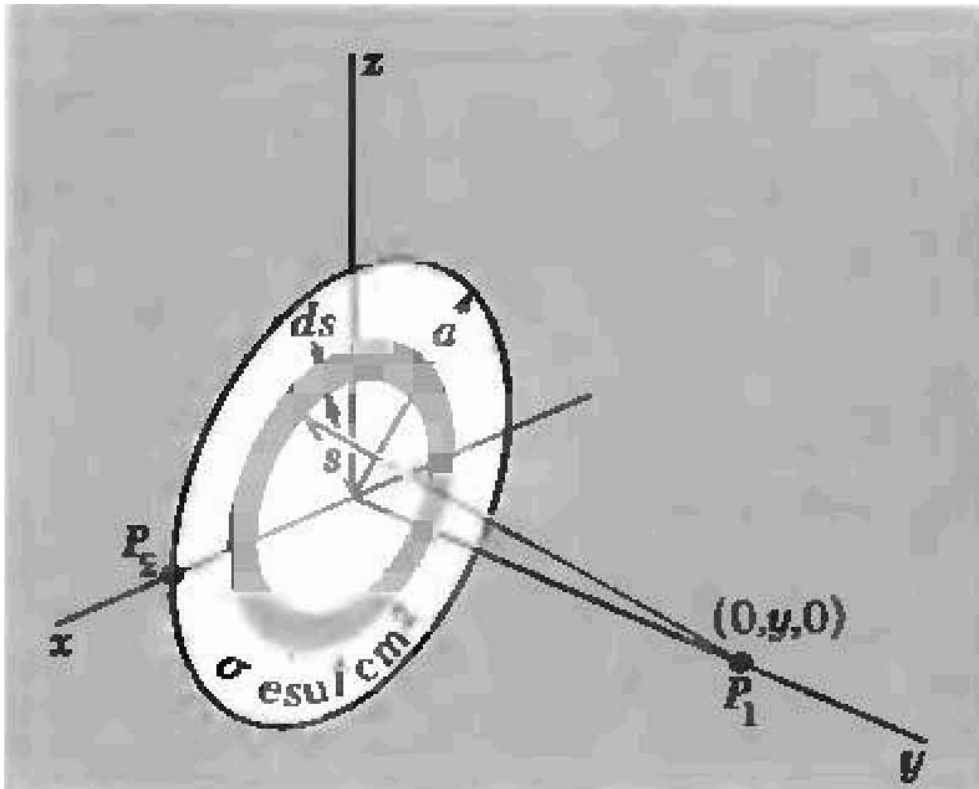
- Distribución acotada ✓
 - Radio a
 - Grosor despreciable
 - $\sigma = \text{constante } (\frac{C}{m^2})$
- Calculemos el potencial en el punto P_1 sobre el eje de simetría y .

$$dq = \sigma da'$$

$$da' = 2\pi s ds$$

(da' área de un anillo de radio s y ancho ds).

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La distancia del anillo al P_1 $(0, y, 0)$ es:

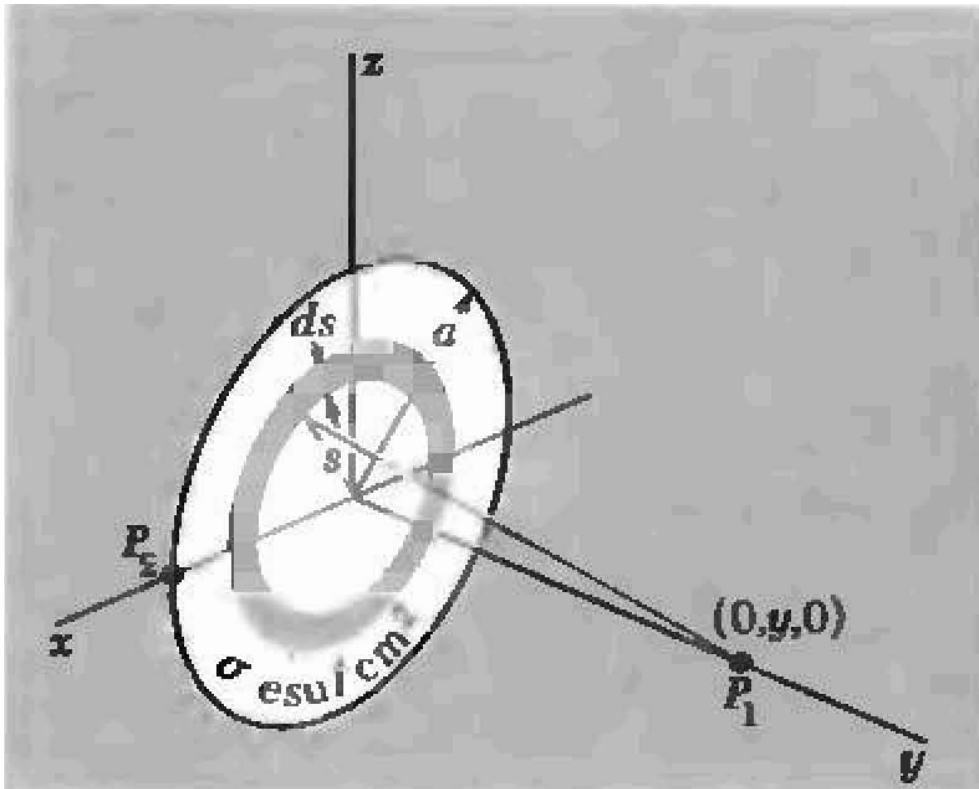
$$\sqrt{y^2 + s^2}$$

- Poniendo el cero de potencial en el infinito

$$\varphi(y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^a \frac{\sigma 2\pi s ds}{\sqrt{y^2 + s^2}}$$

Ejemplo: disco cargado uniformemente



- La integral queda

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \int_0^a \frac{2s \, ds}{\sqrt{y^2 + s^2}} =$$

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

Simetría respecto a $y = 0$