

Ley de Biot Savart para densidad de corrientes

- Si la posición de cada elemento de corriente y la posición en donde se evalúa \vec{B} desde un punto fijo es \vec{r}' y \vec{r} respectivamente, la Ley de Biot-Savart puede reescribirse como:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\text{cable}} \frac{I d\vec{l}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

- Para corrientes acotadas, es posible realizar una expansión multipolar del campo magnético a grandes distancias ($r \gg r'$)

Momento dipolar Magnético

- Como hasta ahora no existen monopolos magnéticos tenemos que

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

- Por lo tanto el momento monopolar magnético es nulo
- El momento dipolar magnético $\vec{\mu}$ es el primero no nulo y queda definido como:

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \iiint \vec{r}' \times \vec{J}(\vec{r}') dv'$$

Donde la integral es sobre todo el volumen donde hay corrientes

- En el caso de una corriente unidimensional tenemos

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int \vec{r}' \times I d\vec{l}$$

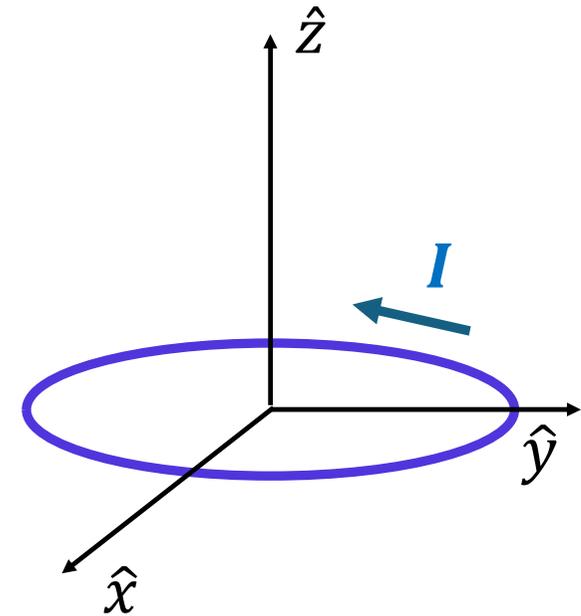
Momento dipolar Magnético

- Para una espira circular de radio a con corriente uniforme I tenemos, si ponemos un sistema de coordenadas cilíndricas (r', φ', z') centrada en el centro de la espira.

$$\begin{aligned}\vec{r}' &= a\hat{r} \\ \vec{dl}' &= a d\varphi' \hat{\varphi}\end{aligned}$$

- Entonces

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2} \int a\hat{r} \times Ia d\varphi' \hat{\varphi}$$



Momento dipolar Magnético

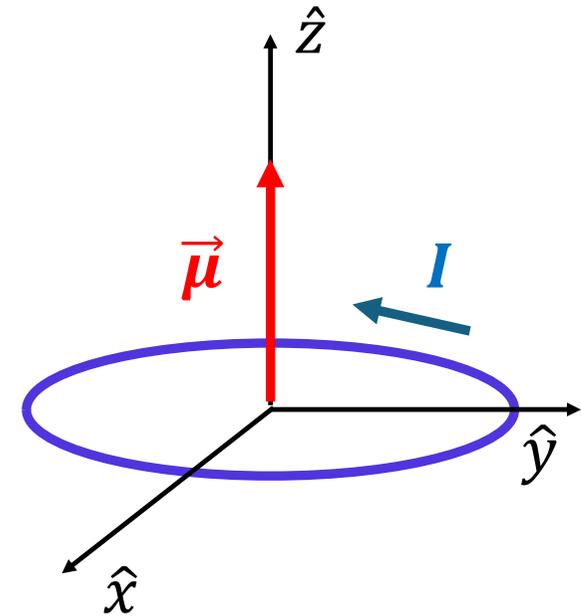
- Como $\hat{r} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, tenemos

$$\vec{\mu} = \frac{Ia^2}{2} \hat{z} \int d\phi'$$

- Entonces, como $\int d\phi' = 2\pi$

$$\vec{\mu} = I\pi a^2 \hat{z}$$

- Es la corriente por el área de la espira con la dirección proveniente de la regla de la mano derecha



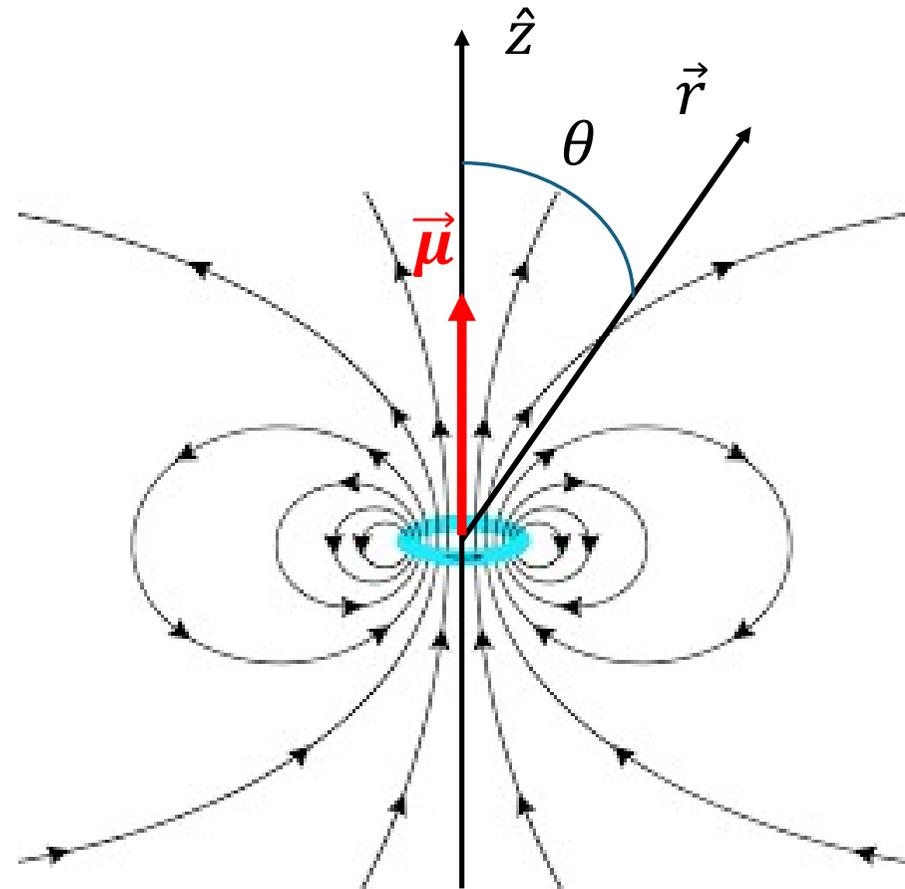
Momento dipolar Magnético

- El término dipolar del campo en esféricas queda:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \vec{\mu}) - \vec{\mu}}{r^3}$$

- Reemplazando $\vec{\mu} = \mu\hat{z}$ tenemos el campo de una espira a gran distancia.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\hat{r}(\hat{r} \cdot \mu\hat{z}) - \mu\hat{z}}{r^3}$$



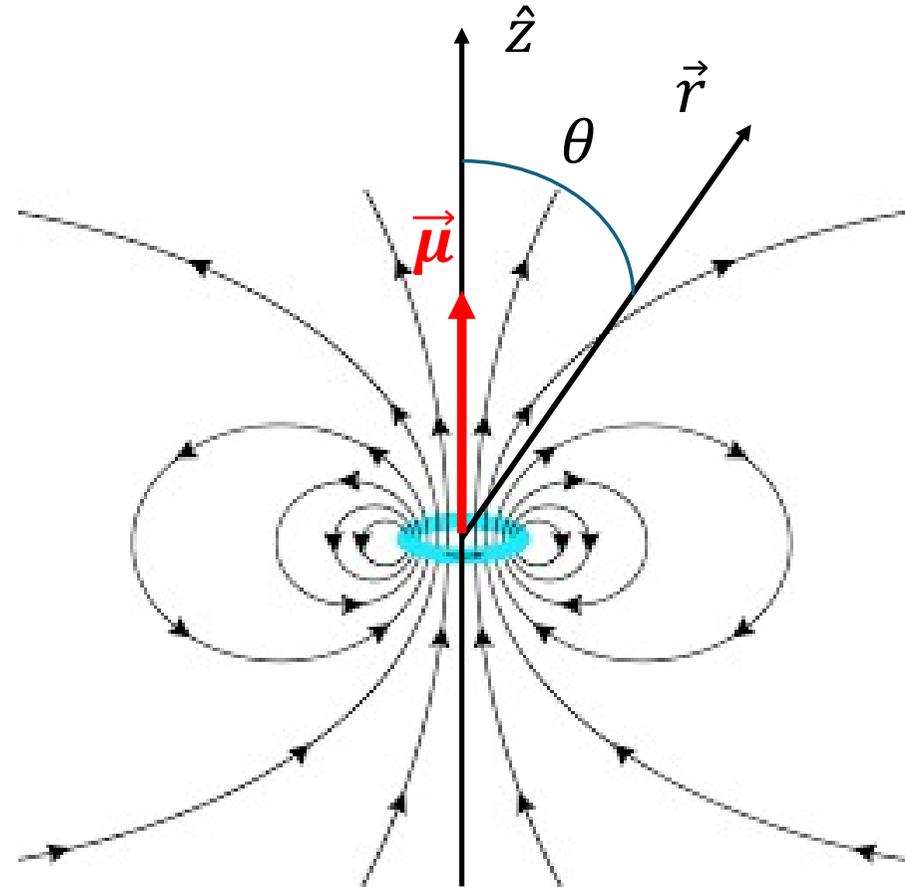
Momento dipolar Magnético

- Sabiendo que $\hat{r} \cdot \mu \hat{z} = \mu \cos \theta$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu \cos \theta \hat{r} - \mu \hat{z}}{r^3}$$

- A lo largo del eje \hat{z} tenemos $\hat{r} = \hat{z}$; $\theta = 0$; $r = z$. Entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \hat{z}}{|z|^3}$$



Momento dipolar Magnético

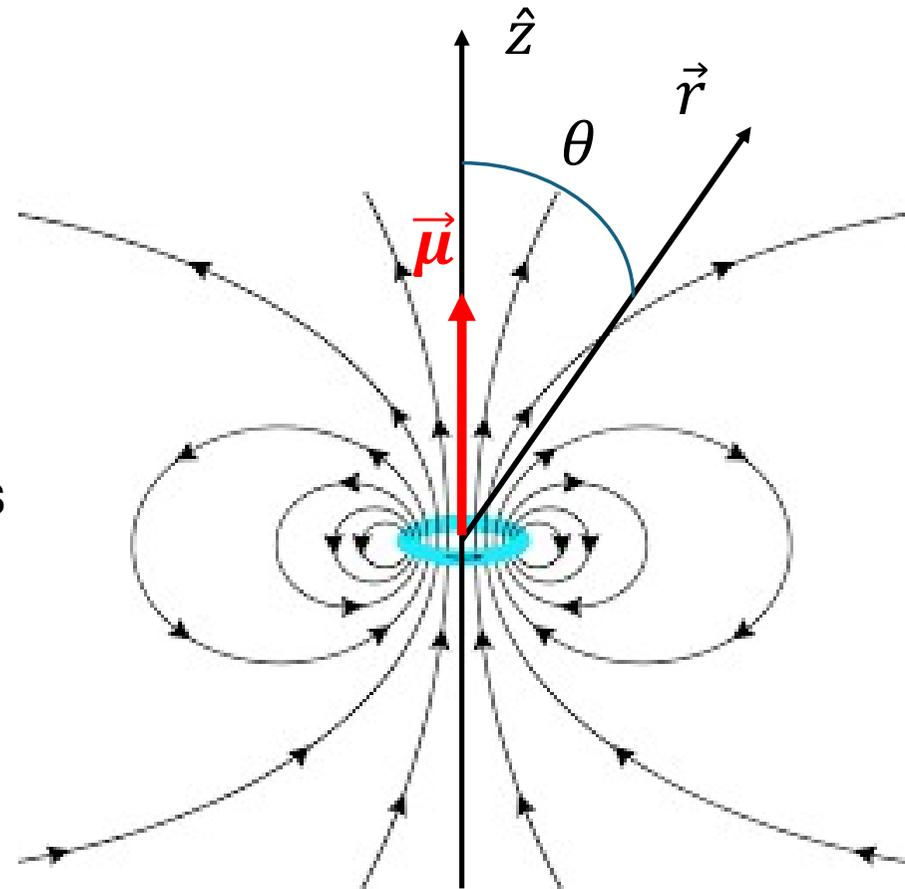
- Sabiendo que $\hat{r} \cdot \mu \hat{z} = \mu \cos \theta$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\mu \cos \theta \hat{r} - \mu \hat{z}}{r^3}$$

- Por ejemplo, a lo largo del eje \hat{z} tenemos $\hat{r} = \hat{z}$; $\theta = 0$; $r = z$. Entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\mu \hat{z}}{|z|^3}$$

Recordar que este valor se aplica a grandes distancias

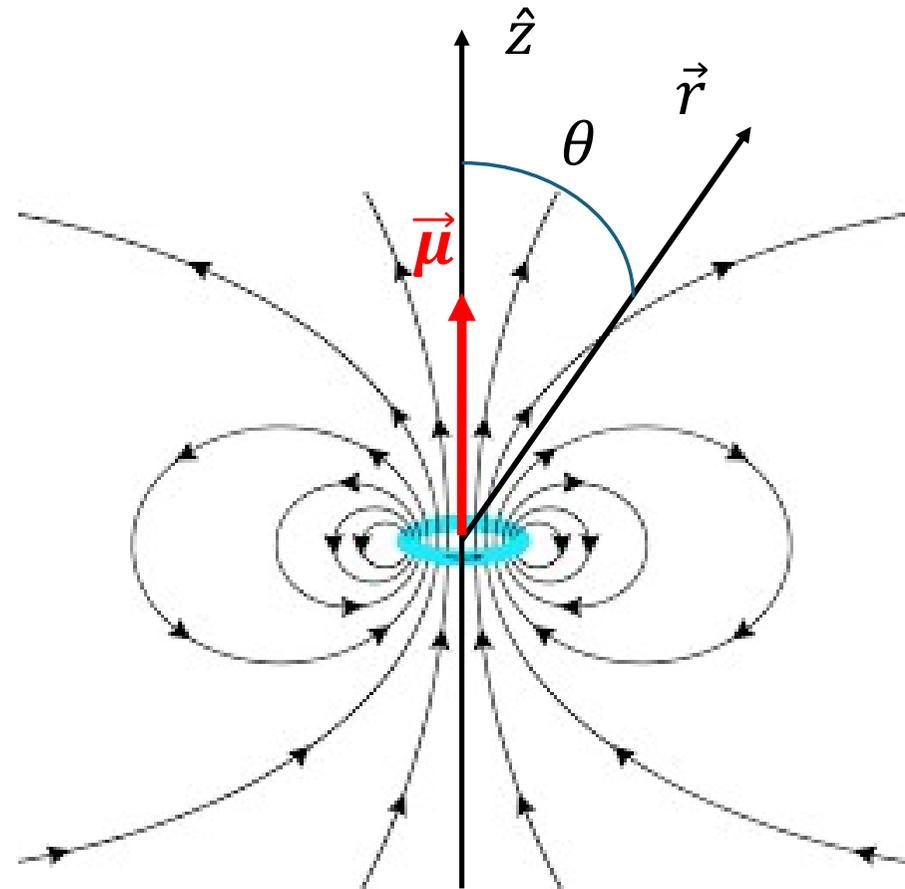


Momento dipolar Magnético

- En el plano ecuatorial ($z = 0$) tenemos
 $\theta = \pi; r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Entonces

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu \hat{z}}{|\sqrt{x^2 + y^2}|^3}$$

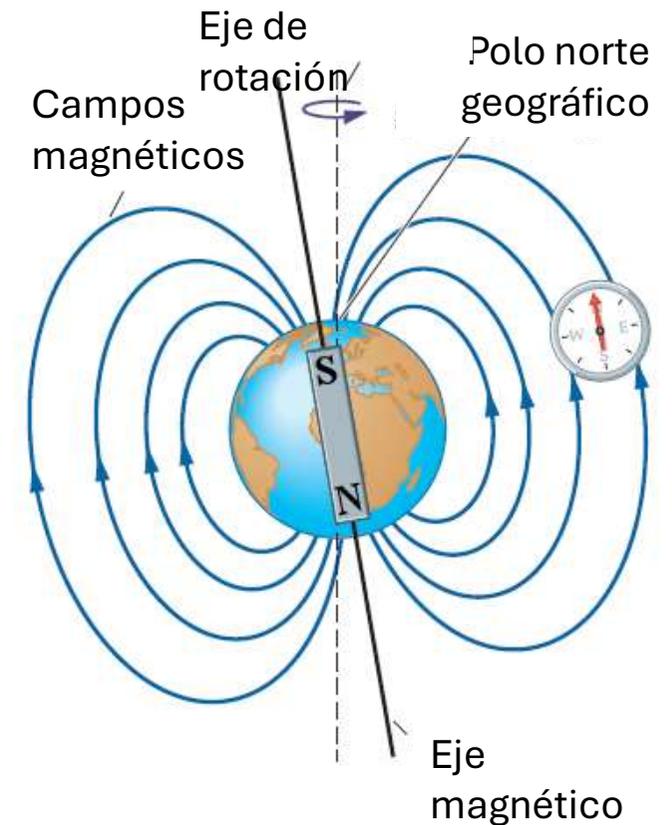
Recordar que este valor se aplica a grandes distancias



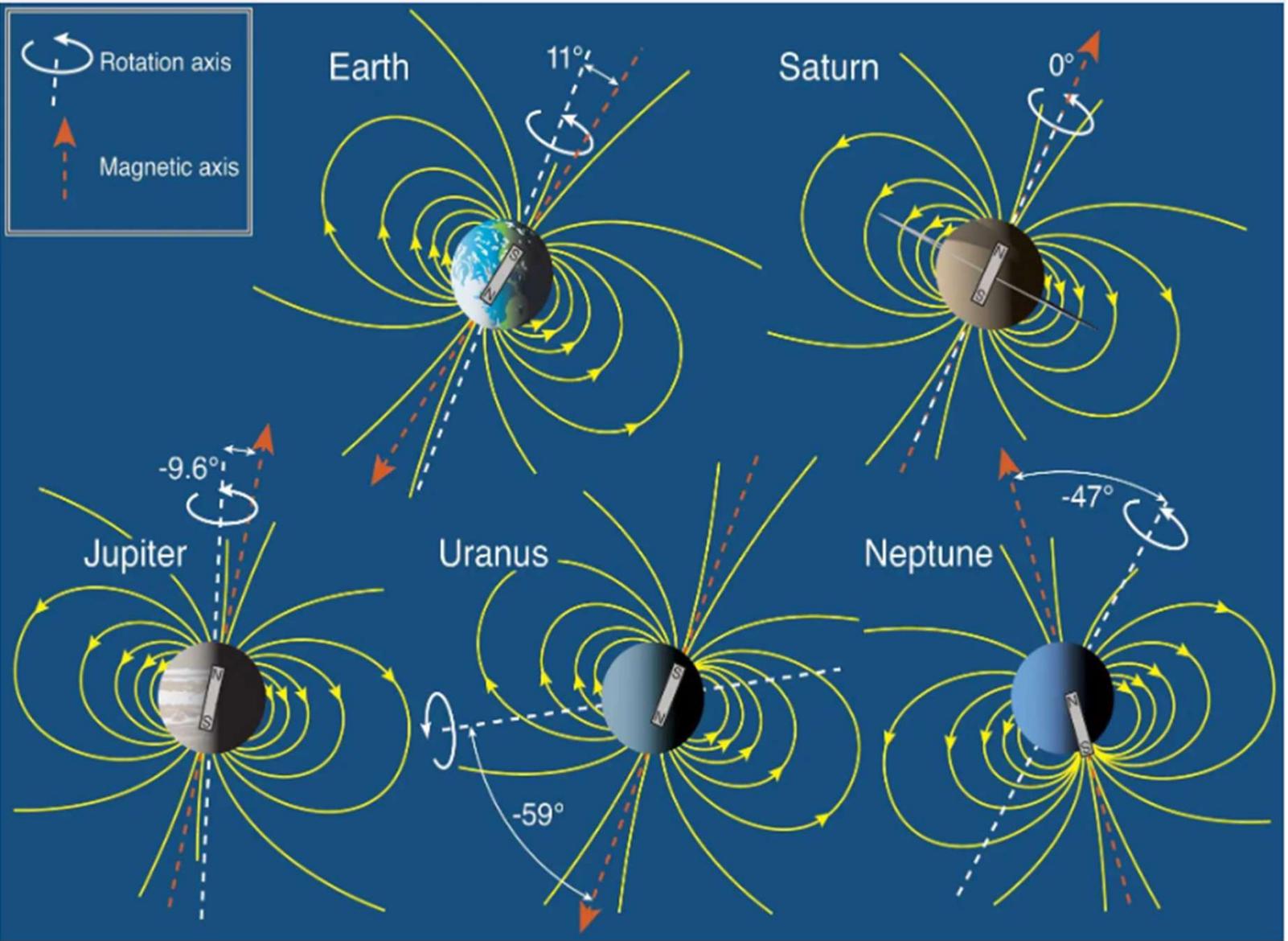
Ejemplo de campo dipolar: El campo geomagnético

<https://www.ngdc.noaa.gov/geomag/calculators/magcalc.shtml#igrfwmm>

| Model Used: | WMM-2020 | | | | | | |
|--------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------|---------------------------|--------------------------|------------------------------|-------------|
| Latitude: | 34° 36' 32" S | | | | | | |
| Longitude: | 58° 22' 23" W | | | | | | |
| Elevation: | 0.0 km Mean Sea Level | | | | | | |
| Date | Declination (+ E - W) | Inclination (+ D - U) | Horizontal Intensity | North Comp (+ N - S) | East Comp (+ E - W) | Vertical Comp (+ D - U) | Total Field |
| 2024-10-07 | -10° 4' 15" | -41° 10' 56" | 17,021.9 nT | 16,759.7 nT | -2,976.5 nT | -14,892.2 nT | 22,616.9 nT |
| Change/year | -0° 9' 55"/yr | -0° 13' 41"/yr | -81.9 nT/yr | -89.2 nT/yr | -34.0 nT/yr | -48.1 nT/yr | -30.0 nT/yr |
| Uncertainty | 0° 25' | 0° 13' | 128 nT | 131 nT | 94 nT | 157 nT | 145 nT |



$$1\mu\text{T} = 10^{-2} \text{ Gauss}$$



Bagenal, 2013

Table 6-2

Planetary magnetic fields

| | Ganymede | Mercury | Earth | Jupiter | Saturn | Uranus | Neptune |
|--|----------|---------|-----------|----------|---------|--------|---------|
| $B_{\text{Dipole}}^{\text{a}}$ (nT) | 719 | 195 | 30,600 | 430,000 | 21,400 | 22,800 | 14,200 |
| Maximum/minimum ^b | 2 | ~2 | 2.8 | 4.5 | 4.6 | 12 | 9 |
| Dipole tilt and sense ^c | -4° | <+3° | +9.92° | -9.4° | -0.0° | -59° | -47° |
| Dipole offset ^d (R_p) | | ~0.2 | - | 0.119 | 0.038 | 0.352 | 0.485 |
| Obliquity ^e | 0° | 0° | 23.5° | 3.1° | 26.7° | 97.9° | 29.6° |
| Range in solar wind angle ^f | 90° | 90° | 67 – 114° | 87 – 93° | 64–117° | 8–172° | 60–120° |

^aSurface field at dipole equator. Values derived from modeling the magnetic field as an offset, tilted dipole (OTD)

^bRatio of maximum surface field to minimum (equal to 2 for a centered dipole field). This ratio increases with larger non-dipolar components and tends to increase with the planet's oblateness

^cAngle between the magnetic and rotation axes. Positive values correspond to magnetic field directed north at the equator

^dValues for the giant planets come from dipole (OTD) models of Connerney (1993, 2007). The Earth's dipole is from the International Geomagnetic Reference Field, while the magnetic dip poles of the Earth's field are located (in 2010) at 85°N and 64°S latitudes and moving over 10° per century (Finlay et al. 2010). Mercury's magnetic field is from Anderson et al. (2011)

^eThe inclination of a planet's spin equator to the ecliptic plane

^fRange of angle between the radial direction from the Sun and the planet's rotation axis over an orbital period. In Ganymede's case, the angle is between the corotational flow and the moon's spin axis



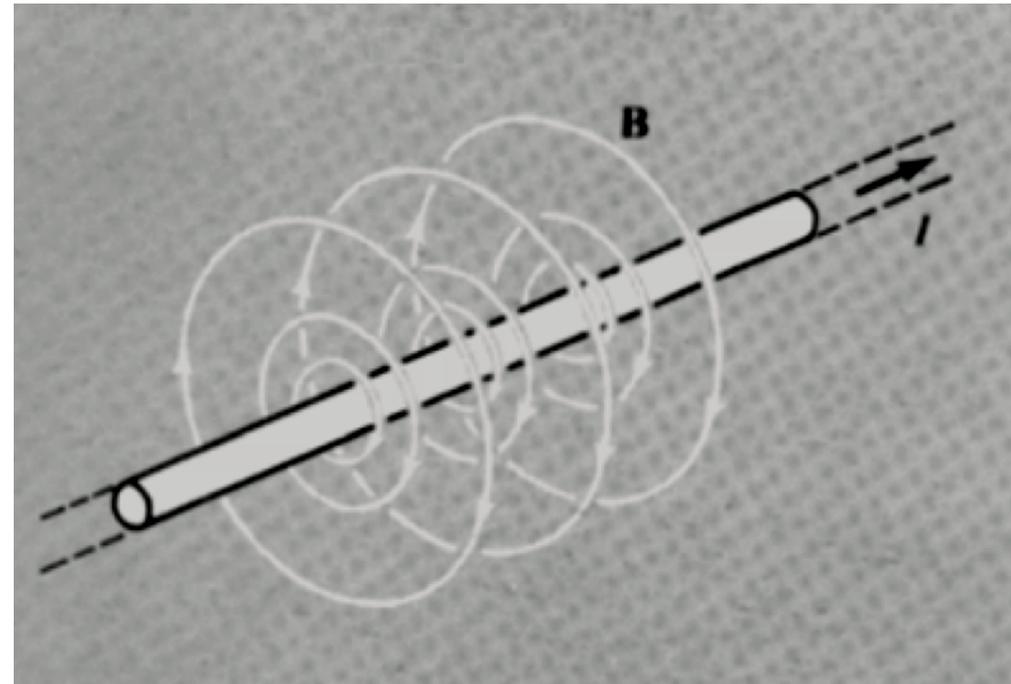
André – Marie Ampère (1775-1836)

Ley de Ampère

Campo magnético y corriente

- Supongamos un hilo rectilíneo de corriente I .
- Veamos cuánto vale la integral de camino cerrado del campo magnético.
- Tomando una curva en el plano de las líneas de campo

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

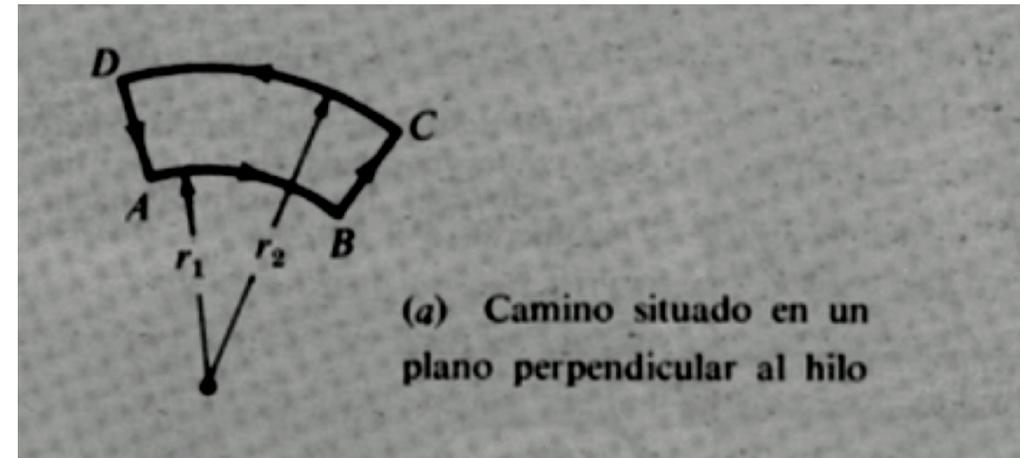


Campo magnético y corriente

Plano de las líneas de campo

- Para caminos que no encierran la corriente, como el (a), como el campo varía como $\frac{1}{r}$ la integral de camino sobre AB es igual y opuesta a la CD.
- Además como en los tramos BC y DA \vec{B} es perpendicular a $d\vec{l}$ por lo que la integral es nula.
- Entonces

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{CD} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



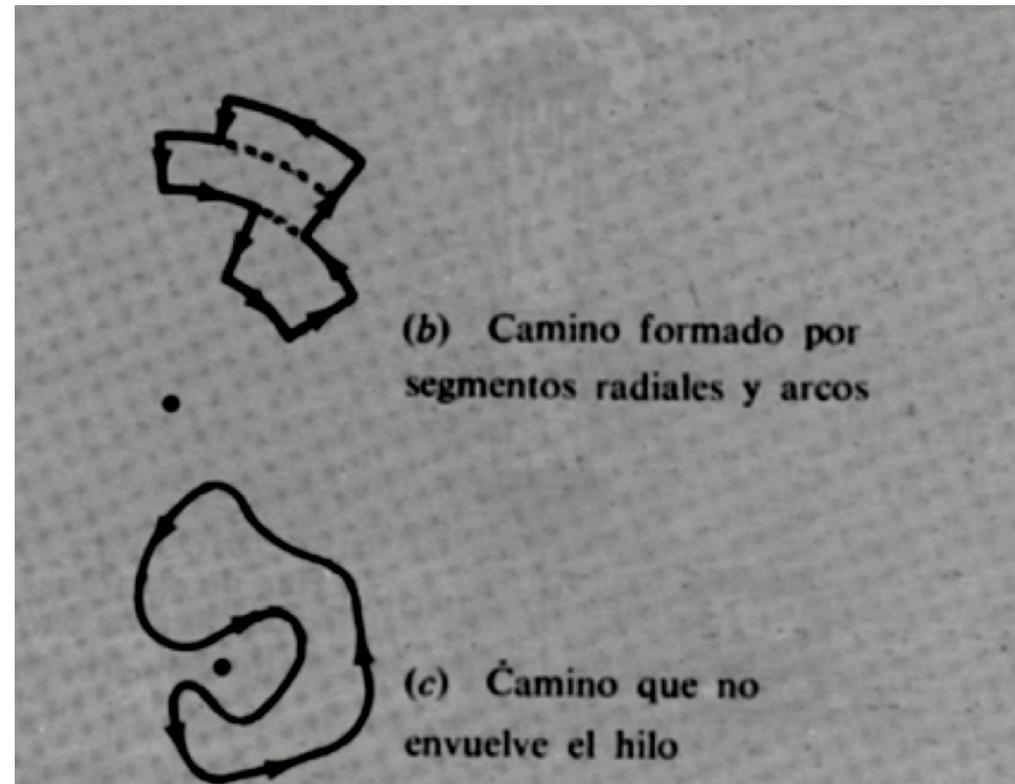
Campo magnético y corriente

- Para un camino como el (b) puedo hacer tres caminos cerrados como el (a), con lo cual también:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

- De la misma manera yo puedo aproximar cualquier camino (c) por una sucesión de segmentos infinitesimales radiales y a r constante (arco).

Plano de las líneas de campo

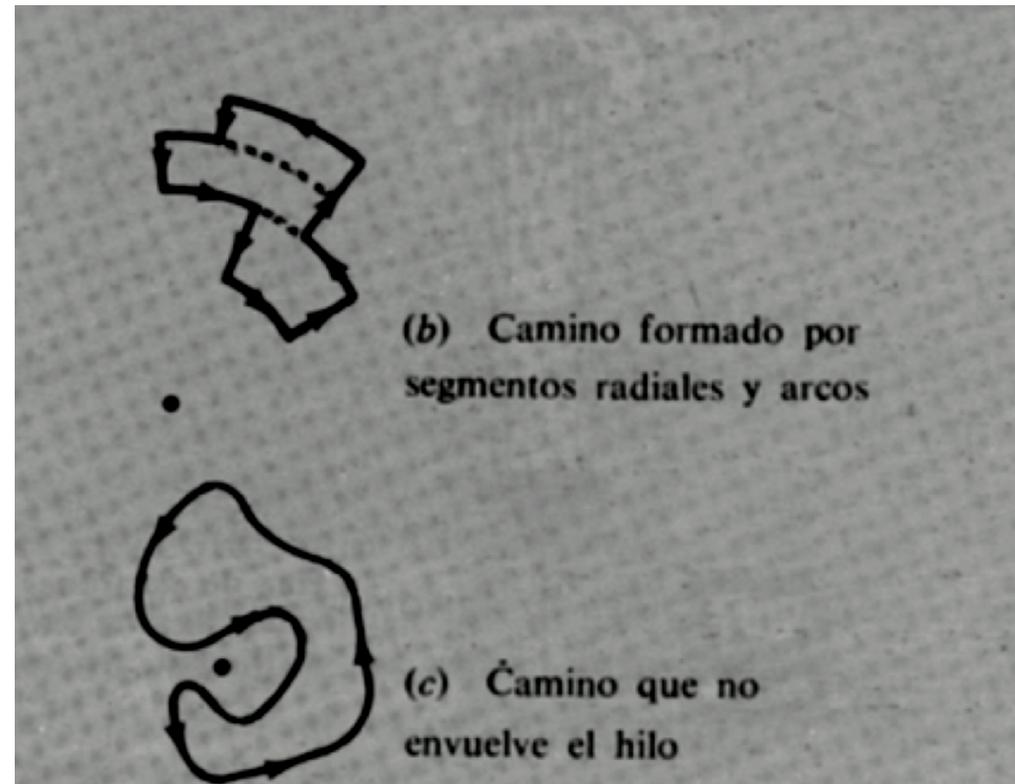


Campo magnético y corriente

- Entonces podemos concluir que para todo camino que no encierre la corriente:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Plano de las líneas de campo



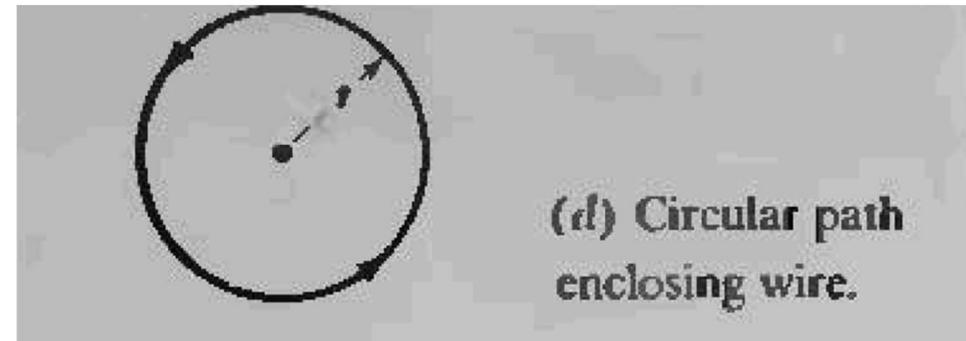
Campo magnético y corriente

- Para caminos como el círculo de radio r que encierra la corriente (d), \vec{B} es paralelo a \vec{dl} y entonces la integral de camino cerrado da:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{dl} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2\pi r = \mu_0 I$$

Donde I es la corriente encerrada por la curva

Plano de las líneas de campo



Campo magnético y corriente

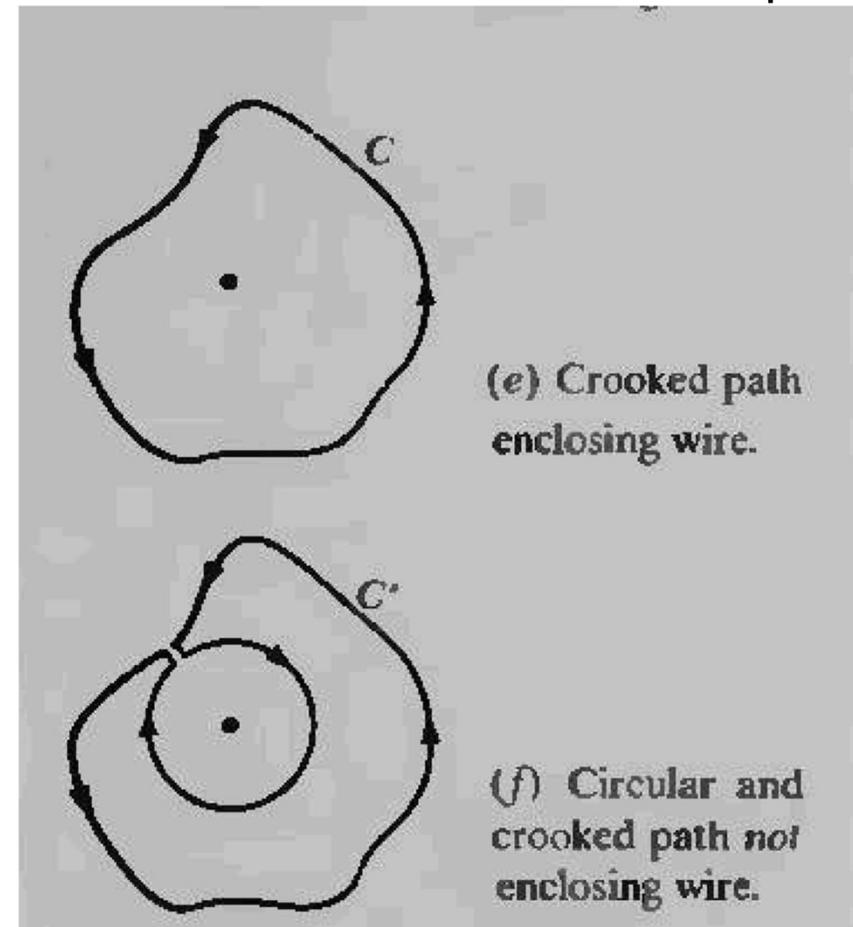
- Para caminos irregulares C como el (e), podemos pensar en un camino C' que no encierre a la corriente que es la suma de C y de un círculo **en sentido inverso** (f) unidos por un tramo muy estrecho de ida y vuelta que no suma.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} + \oint_{\text{Circulo}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

- Entonces para todo camino C

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\text{Circulo}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

Plano de las líneas de campo



Campo magnético y corriente

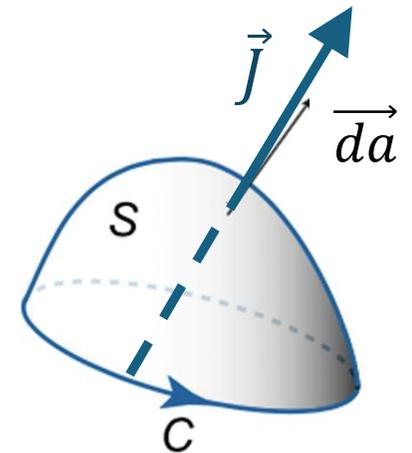
- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \text{ Corriente encerrada}$$

Campo magnético y corriente

- Entonces, en general se puede demostrar que la integral de camino cerrado del campo magnético es igual a la permeabilidad magnética por la corriente que queda encerrada por ese camino.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \text{ Corriente encerrada}$$



- La corriente encerrada I puede ser vista como el flujo de densidad de corriente \vec{J} a través de cualquier superficie S encerrada por C .

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{a}$$

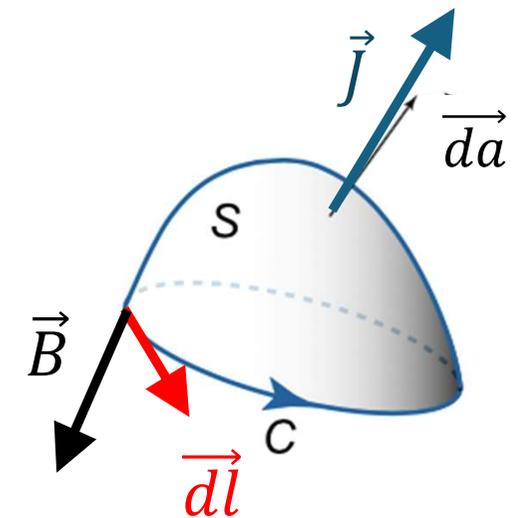
Ley de Ampère

- Entonces reemplazando I por $\iint_S \vec{J} \cdot \vec{da}$ tenemos la Ley de Ampère.

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \vec{da}$$

- Según el Teorema de Stokes esto equivale a escribir:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

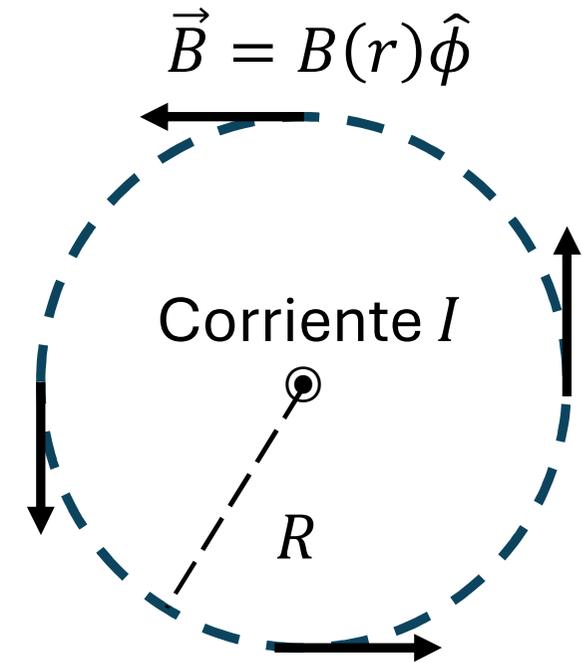


Importante !

El sentido de recorrido del camino C y \vec{da} se relacionan por la regla de la mano derecha

Aplicaciones de la ley de Ampère: hilo de corriente I

- Problema con simetría de traslación a lo largo del hilo
- El campo \vec{B} es tangente a los círculos concéntricos centrados en el hilo.
- El módulo de \vec{B} depende sólo de la distancia r .

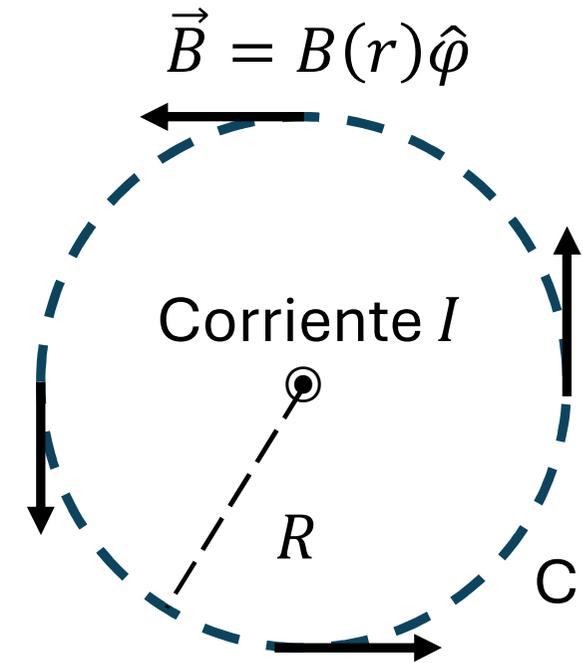


Aplicaciones de la ley de Ampère: hilo de corriente I

- Tomemos C como la circunferencia de radio R recorrida en sentido antihorario con la corriente hacia afuera de la pantalla.

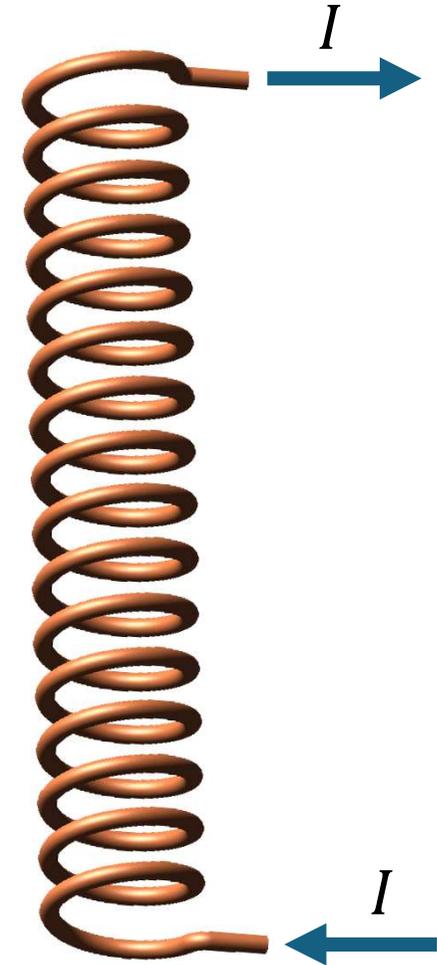
- Tomando $\vec{dl} = R d\varphi \hat{\phi}$ la integral queda

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{dl} = \oint B(R) \hat{\phi} \cdot R d\varphi \hat{\phi} = \mu_0 I$$
$$B(R)R \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi B(R)R = \mu_0 I$$
$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$



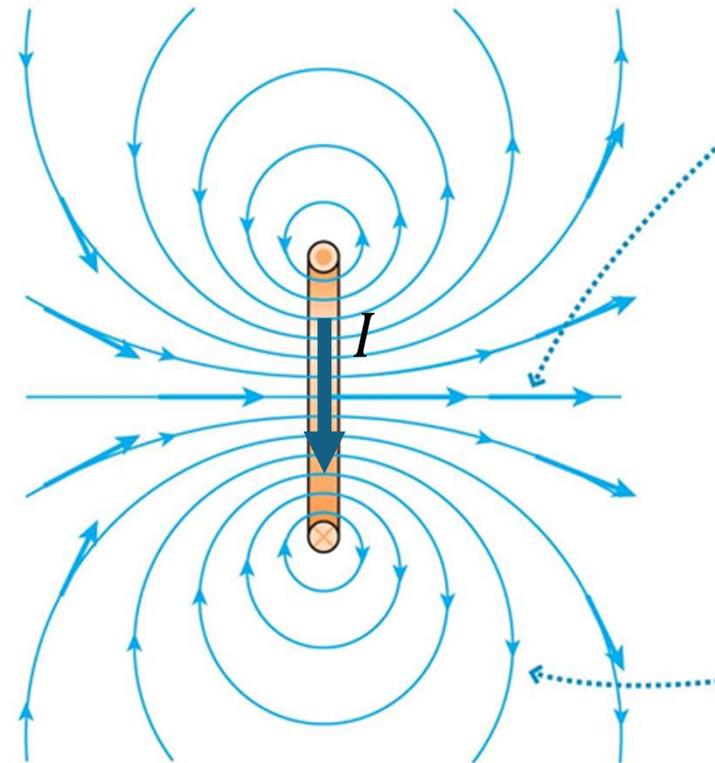
Solenoides

- La ley de Ampère se puede usar para obtener el campo magnético dentro de un solenoide.
- Un solenoide es un cable enrollado alrededor de un cilindro.
- Supongamos que por él circula una corriente I



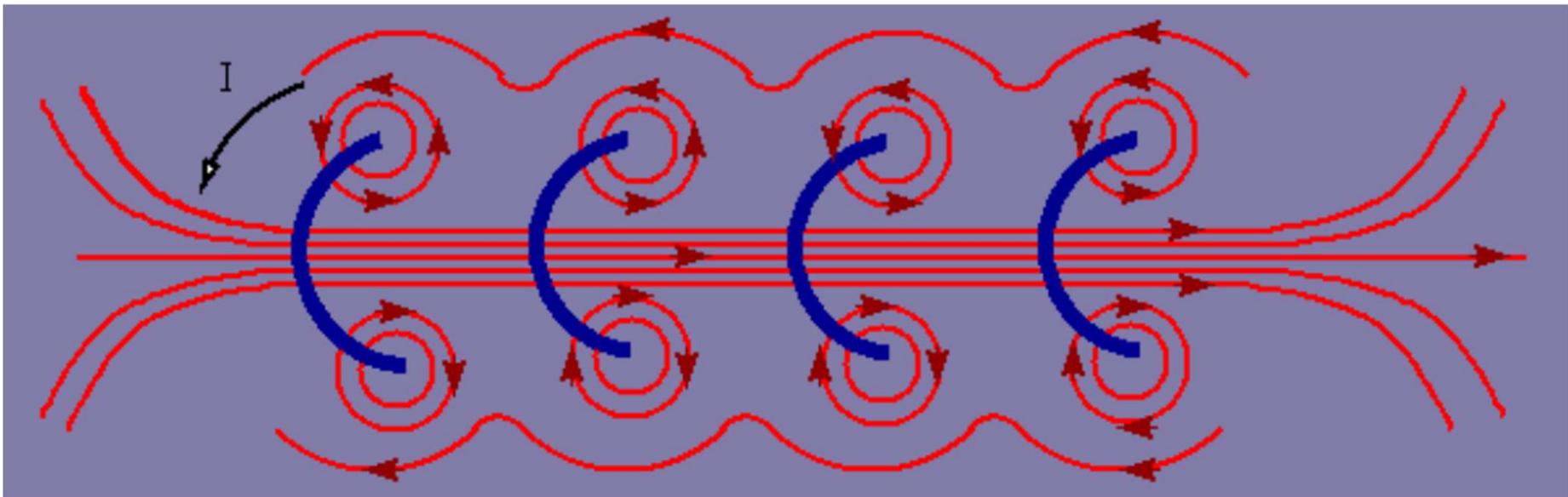
Solenoides

- Para aproximar el campo de un solenoide veamos el campo de una espira circular.
- El campo es simétrico alrededor del eje como lo vemos en la figura.



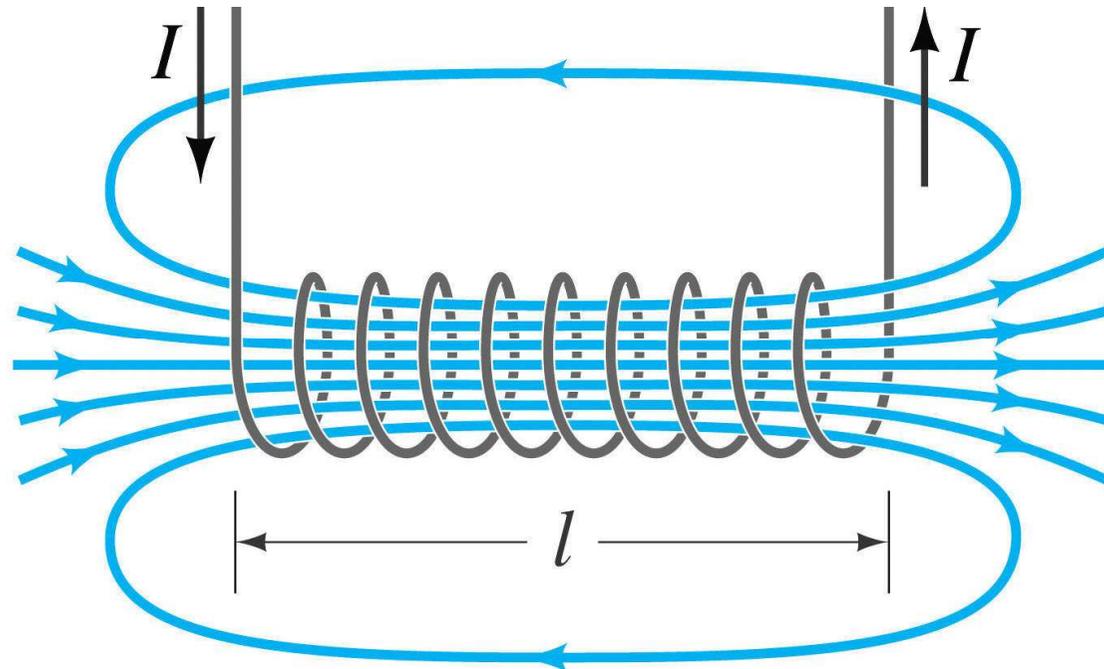
Solenoides

- Cuando sumamos los campos de varias espiras paralelas coaxiales, el campo en el interior comienza a ser uniforme mientras que se debilita en el exterior.



Solenoides

- Si el devanado es denso (muchas vueltas por unidad de longitud), el campo en el interior es uniforme a lo largo del eje, mientras que se aproxima a cero en el exterior.



Solenoides infinitos

- La aproximación en la que ignoramos los efectos de borde del solenoide se llama 'solenoides infinitos'.
- Suponiendo que tenemos muchas vueltas N a lo largo de una distancia l , llamamos n al número de vueltas por unidad de distancia.

$$n = \frac{N}{l}$$

- En esa aproximación, para $n \gg 1$ tenemos que el campo en el interior es uniforme y apunta a lo largo del eje de simetría

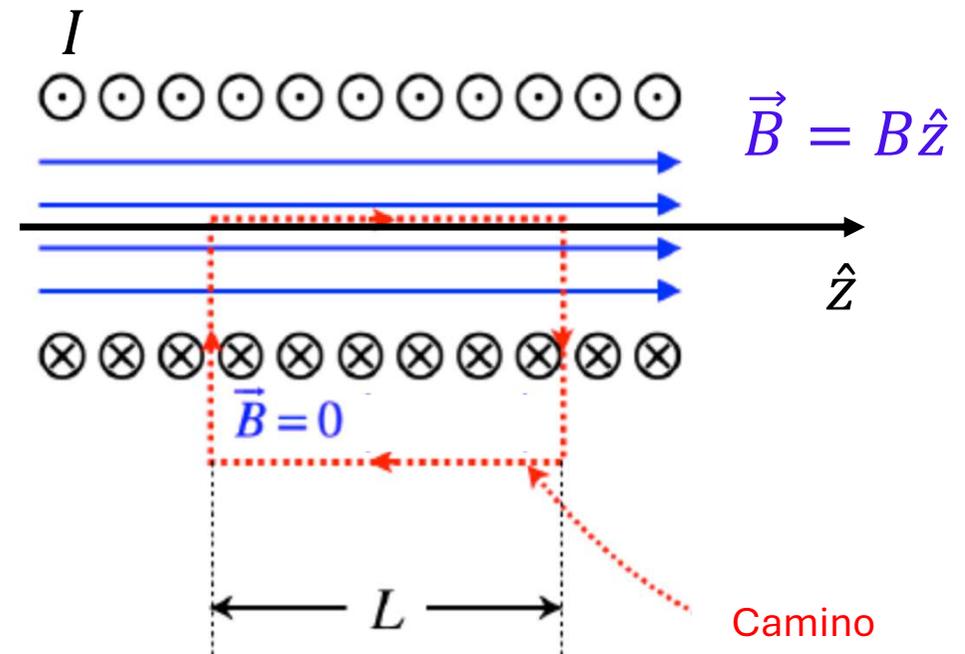
Solenoides infinito

- Entonces, planteamos el siguiente camino rectangular de lado L paralelo al eje \hat{z} .
- Planteamos la ley de Ampère:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{encerrada}$$

- De la integral, el único término no nulo es el del tramo en el interior.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$



Solenoides infinito

- Por otro lado, el camino cerrado encierra una cantidad de vueltas igual a nL

- Entonces,

$$I_{encerrada} = InL$$

- Por lo tanto, la ley de Ampère queda

$$BL = \mu_0 InL$$

- Simplificando

$$B = \mu_0 In$$

