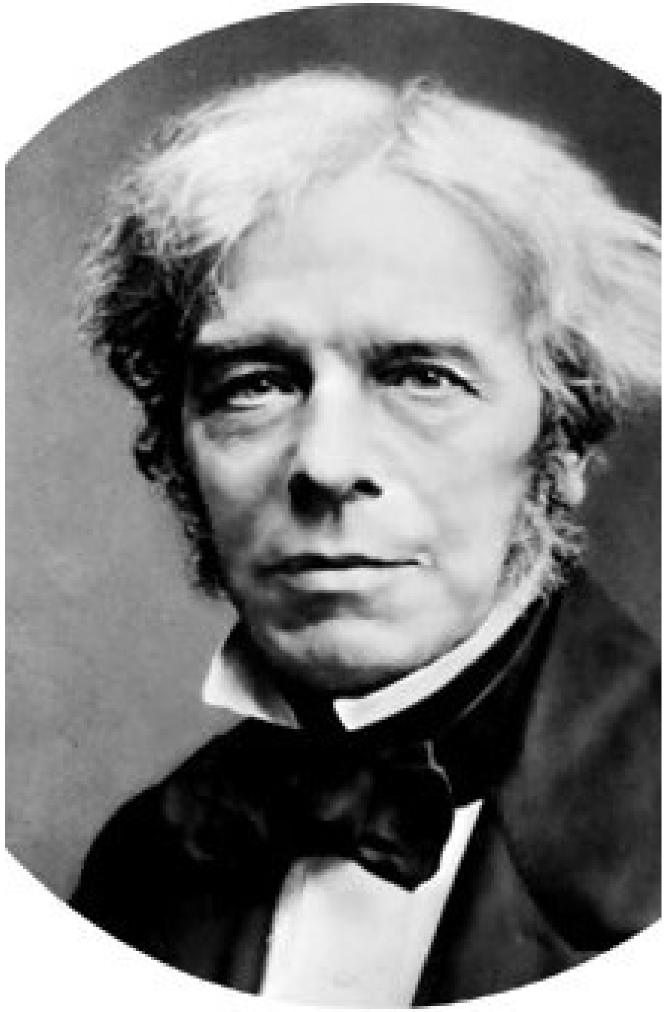
Inducción electromagnética

Conexión entre electricidad y magnetismo

✓ Oersted (1819) demuestra que una corriente estacionaria puede generar un campo magnético.

x Faraday sugiere que un campo magnético estacionario podría generar una corriente, pero sus experimentos no tuvieron éxito.

Hans Christian Oersted



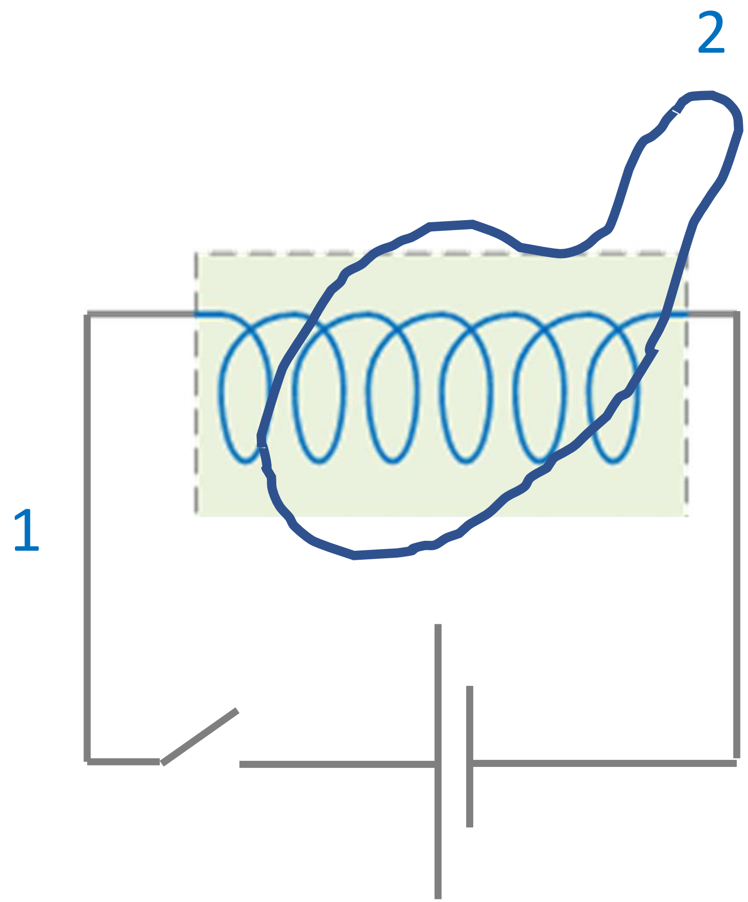
Michael Faraday

Experimento de Faraday

- Conectó una fuente a un solenoide.

- Consideró 2 espiras

1. El circuito
2. Una espira que envuelva al solenoide



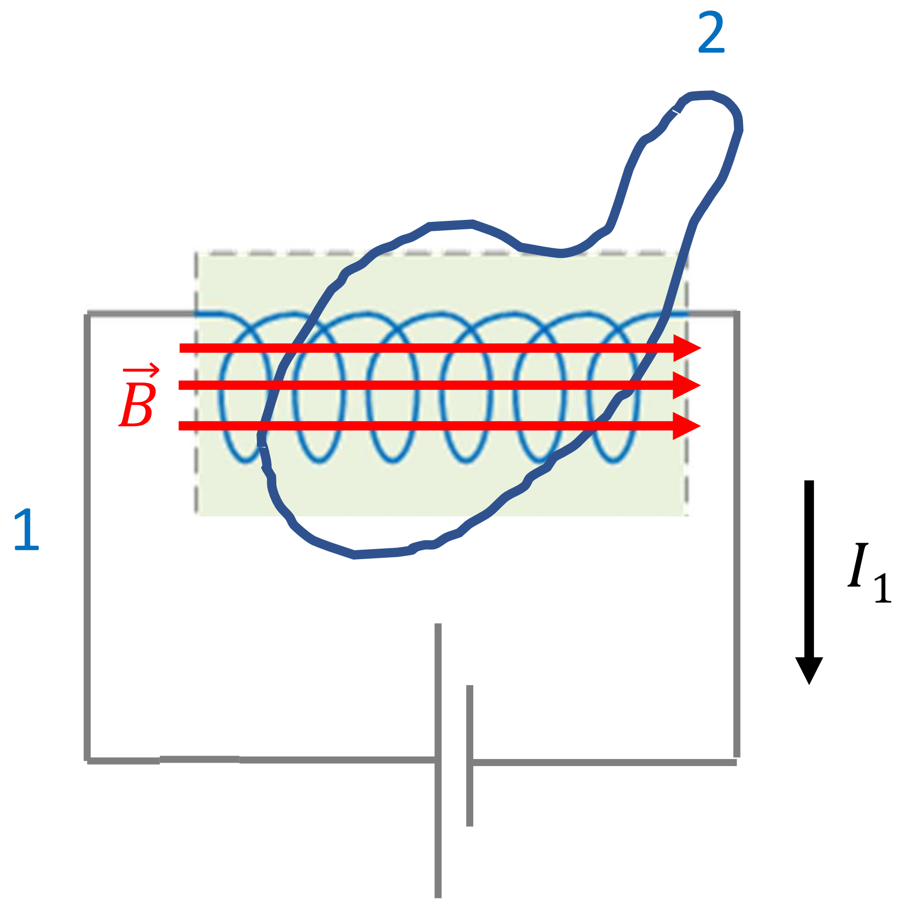
No hay corriente en ninguno

Experimento de Faraday

- Conectó una fuente a un solenoide.

- Consideró 2 espiras

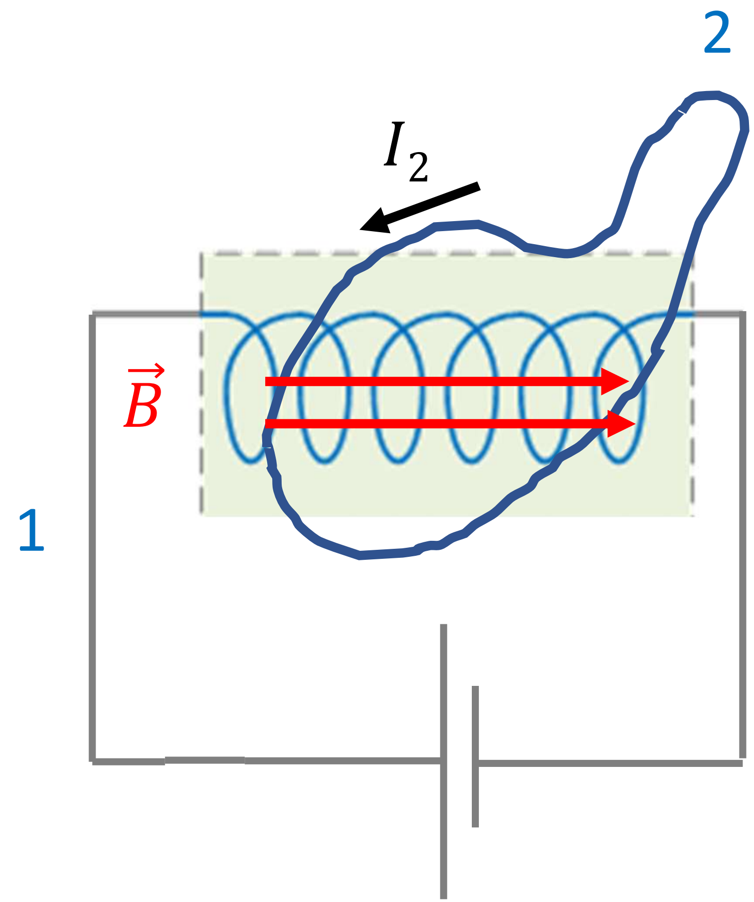
1. El circuito
2. Una espira que envuelva al solenoide



Hay corriente en 1

Experimento de Faraday

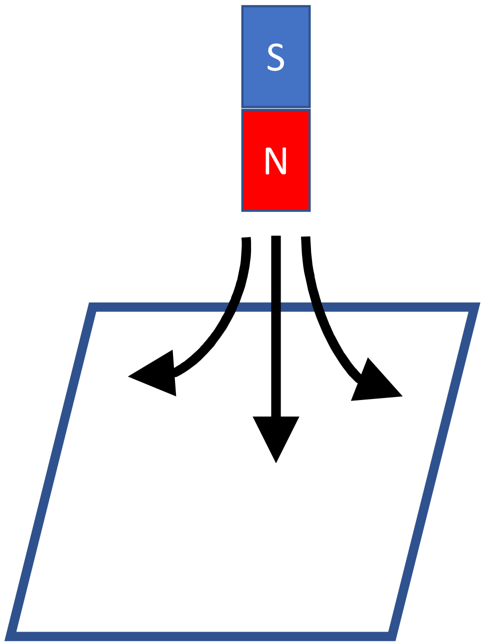
- Pero justo al cerrar el switch o al abrirlo una corriente transitoria circulaba en 2.
- En otras palabras cuando el campo magnético cambiaba (crecia o decrecía), había corriente en 2
- Faraday concluyó que la **variación de $\vec{B}$** crea un campo eléctrico.



Recién cerrado el switch

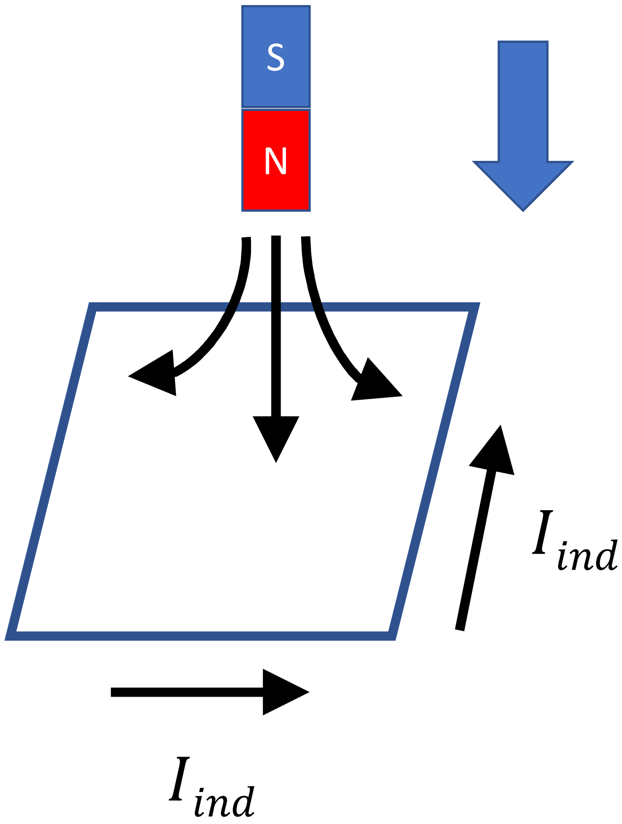
Ley de Lenz

- Otro hecho experimental:
- La corriente inducida fluye en el sentido opuesto al sentido de variación del flujo magnético.



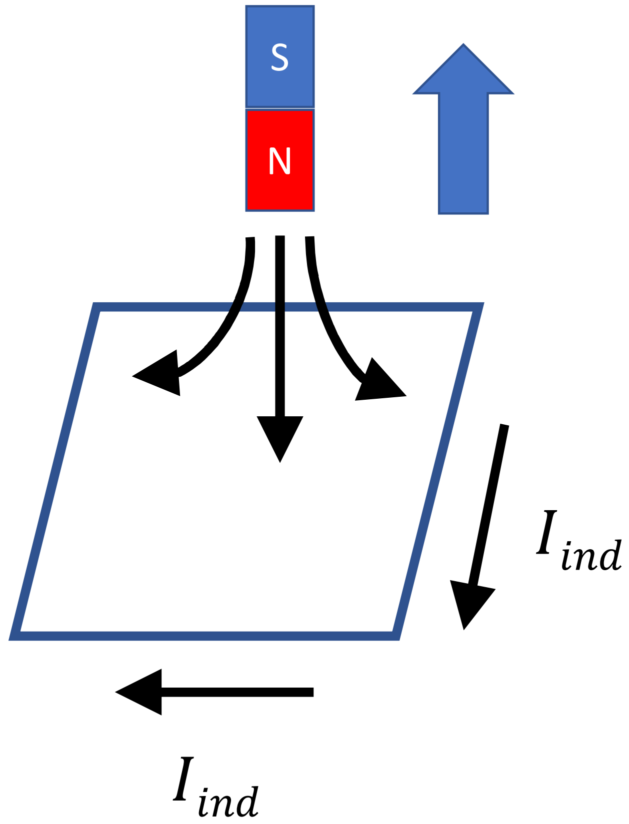
Ley de Lenz

- Otro hecho experimental:
- La corriente inducida fluye en el sentido opuesto al sentido de variación del flujo magnético.
- Al crecer el flujo la corriente I_{ind} fluye para oponerse al cambio (crecimiento).



Ley de Lenz

- Otro hecho experimental:
- La corriente inducida fluye en el sentido opuesto al sentido de variación del flujo magnético.
- Al crecer el flujo la corriente I_{ind} fluye para oponerse al cambio (crecimiento).
- Al decrecer el flujo, la corriente I_{ind} fluye al reves.



FEM Inducida

- La I_{ind} se relaciona con una FEM_{ind} a través de la resistencia de la espira en donde se induce la corriente.

$$FEM_{ind} = I_{ind}R$$

- Faraday halló que la FEM_{ind} era proporcional al cambio de $\vec{B}$ y al área de la espira en la que se induce la corriente.

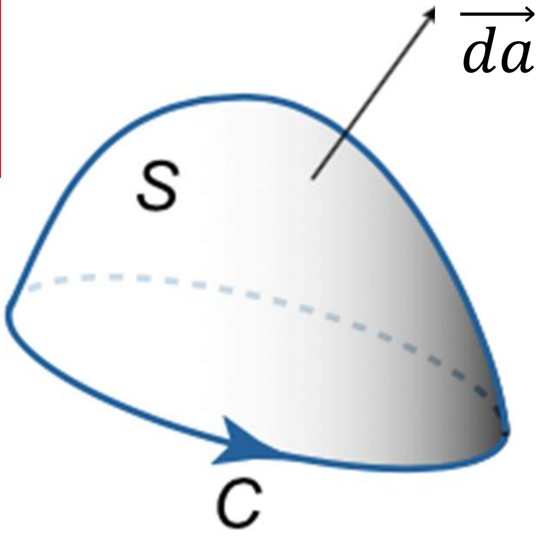
$$FEM_{ind} \propto \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad FEM_{ind} \propto Area$$

Ley de Faraday

- Concluyó que la FEM_{ind} depende de la variación del flujo magnético

$$FEM_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{da}$$

Ley de Faraday



- El menos viene de la Ley de Lenz.
- S es cualquier superficie limitada por la espira.

Ley de Faraday

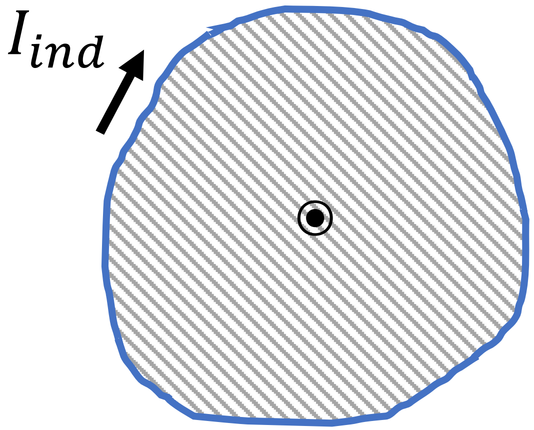
- Retomemos la Ley de Faraday

$$FEM_{ind} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{da}$$

- La integral es sobre una superficie S abierta limitada por el circuito C.

- La corriente inducida I_{ind} se opone la dirección asociada al crecimiento del flujo magnético Φ_B

Circuito C

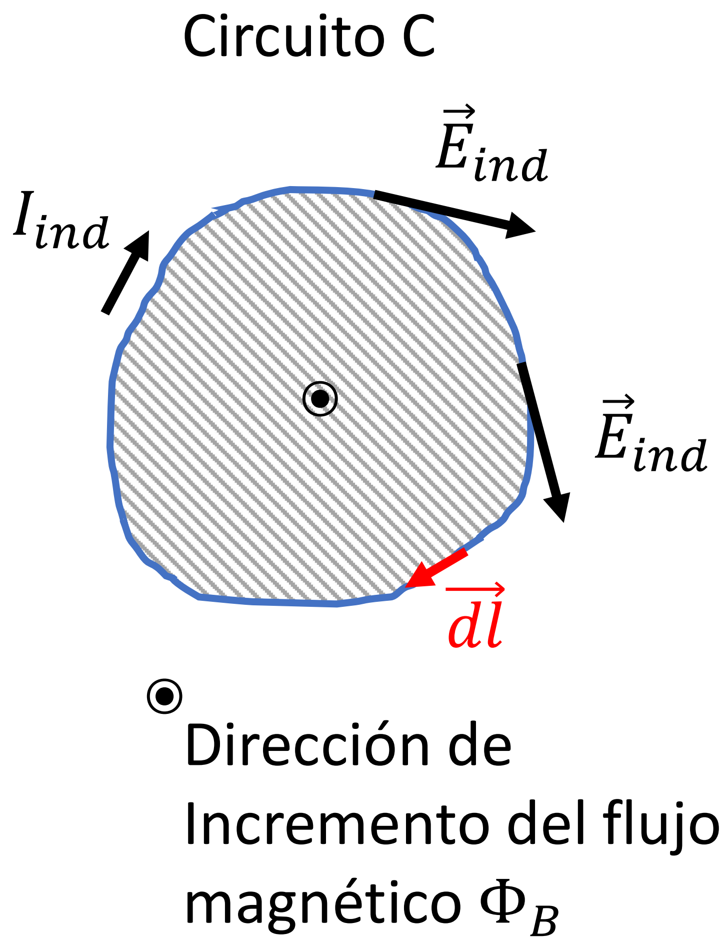



Dirección de Incremento del flujo magnético Φ_B

Ley de Faraday

- La corriente I_{ind} es impulsada por un campo eléctrico $\vec{E}_{ind}$ inducido.
- Entonces, la integral de camino cerrado de $\vec{E}_{ind}$ sobre C debe ser igual a la FEM_{ind}
- Entonces

$$FEM_{ind} = \oint_{C} \vec{E}_{ind} \cdot \overrightarrow{dl} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{da}$$



Ley de Faraday

- Recordemos el teorema de Stokes aplicado a $\vec{E}_{ind}$ que reemplazamos por $\vec{E}$:

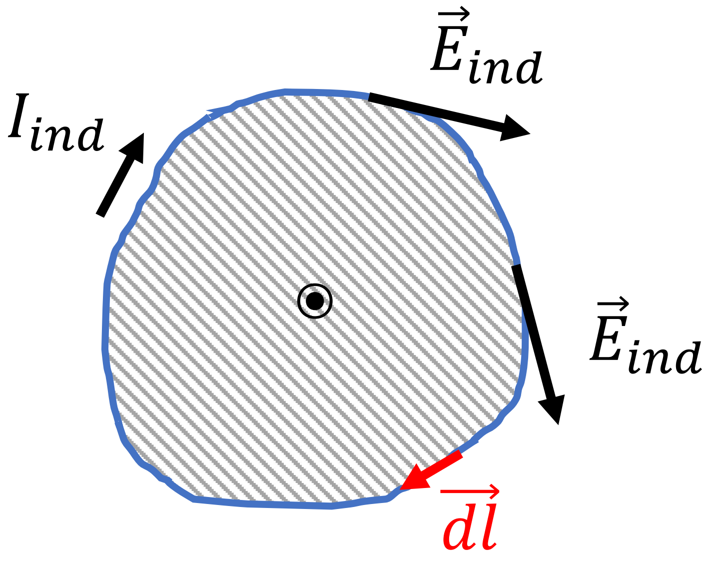
$$\oint_C \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \cdot \overrightarrow{da}$$

- Entonces:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ley de Faraday en forma diferencial

Circuito C



⊙ Dirección de Incremento del flujo magnético Φ_B

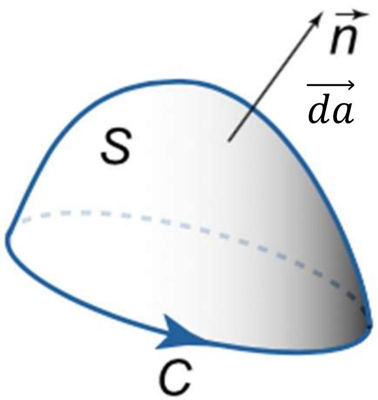
Otra manera de ver la Ley de Kirchhoff

- La **ley de Kirchhoff de los voltajes para corrientes estacionarias** equivale a decir que la integral de camino cerrado C en un lazo del campo eléctrico es cero:

$$\sum_{\text{lazo cerrado}} V_i = \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = 0$$

- Según el teorema de Stokes la expresión anterior es igual al flujo del rotor de $\vec{E}$ a través de cualquier superficie abierta S cuyo borde sea la curva cerrada C:

$$\oint_{C} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = \iint_{S} \vec{\nabla} \times \vec{E} \cdot \overrightarrow{da} = 0$$



Leyes de Kirchhoff y Faraday

- Entonces, esto dice que el rotor del campo **eléctrico electrostático** es cero:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

- La Ley de Faraday es más general, y nos dice que $\boldsymbol{\vec{\nabla} \times \vec{E}}$ **ya no es cero cuando hay una variación temporal del flujo magnético**, es decir, cuando hay corrientes variables.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Campos no conservativos

- En otras palabras, la Ley de Faraday nos dice que el campo eléctrico inducido no es más conservativo, por que ya no es más verdad que su integral de línea en un camino cerrado sea cero.

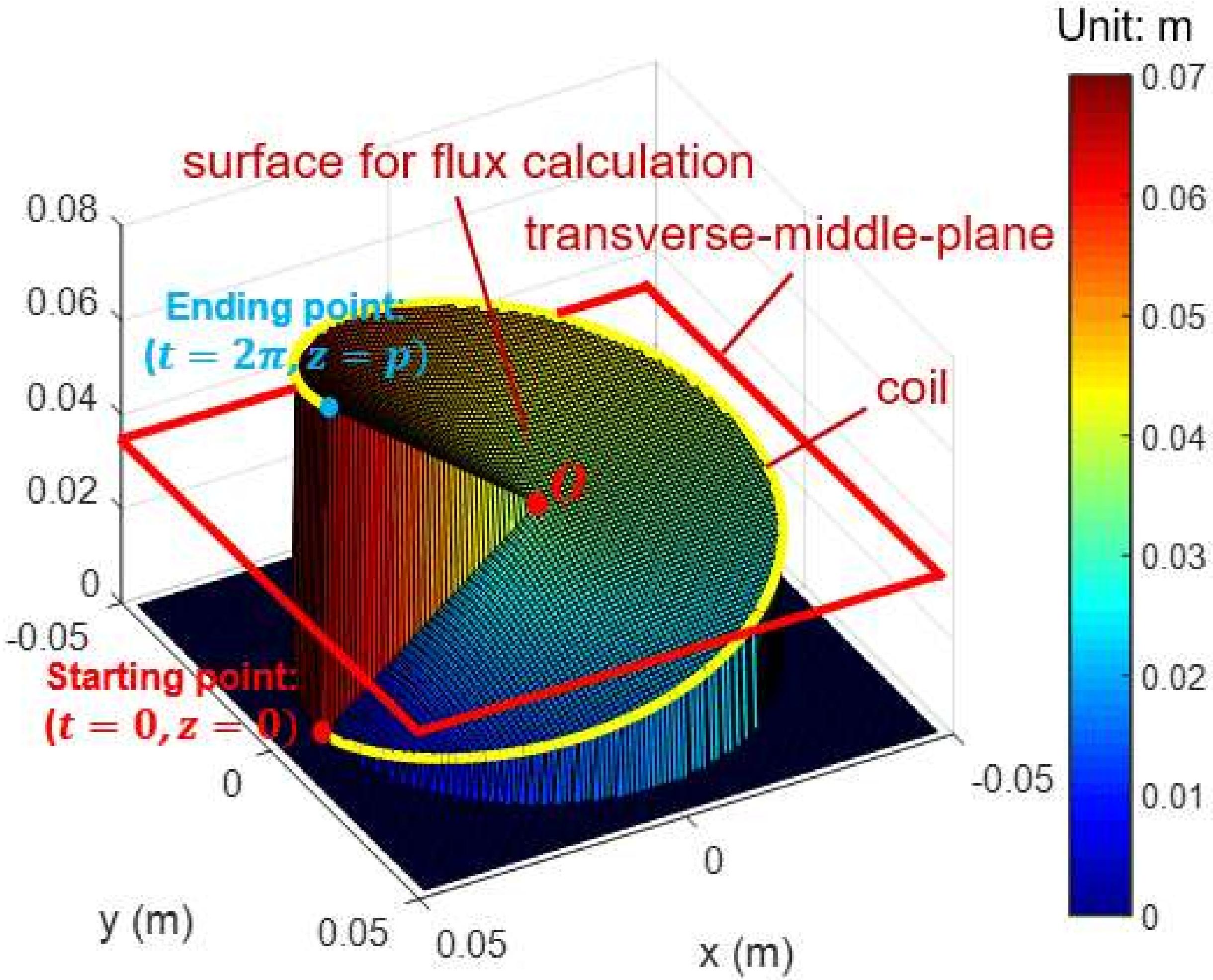
- Tampoco que la integral de línea entre dos puntos no dependa del camino.

Flujos en solenoides

- Los solenoides permiten multiplicar el flujo de campo magnético y acumular FEM
- La superficie sobre la que se calcula el flujo se asemeja al de la figura y es casi la misma que la de las espiras individuales sumadas si están bien apretadas.

$$FEM_{ind} = -N\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}$$

N: número de vueltas



Inductancias

Formas de almacenar energía electromagnética en un circuito

Capacitancia
Almacenamiento de
energía eléctrica

Inductancia
Almacenamiento de
energía magnética

Autoinductancia

- Cuando la corriente en un circuito varía, hay una variación del flujo a través del propio circuito C_1.
- Entonces se induce una FEM que llamaremos $\mathcal{E}_{11}$.

$$\mathcal{E}_{11} = -\frac{d\Phi_{11}}{dt}$$

- Por ley de Ampère sabemos que Φ_{11} es proporcional a la corriente, entonces:

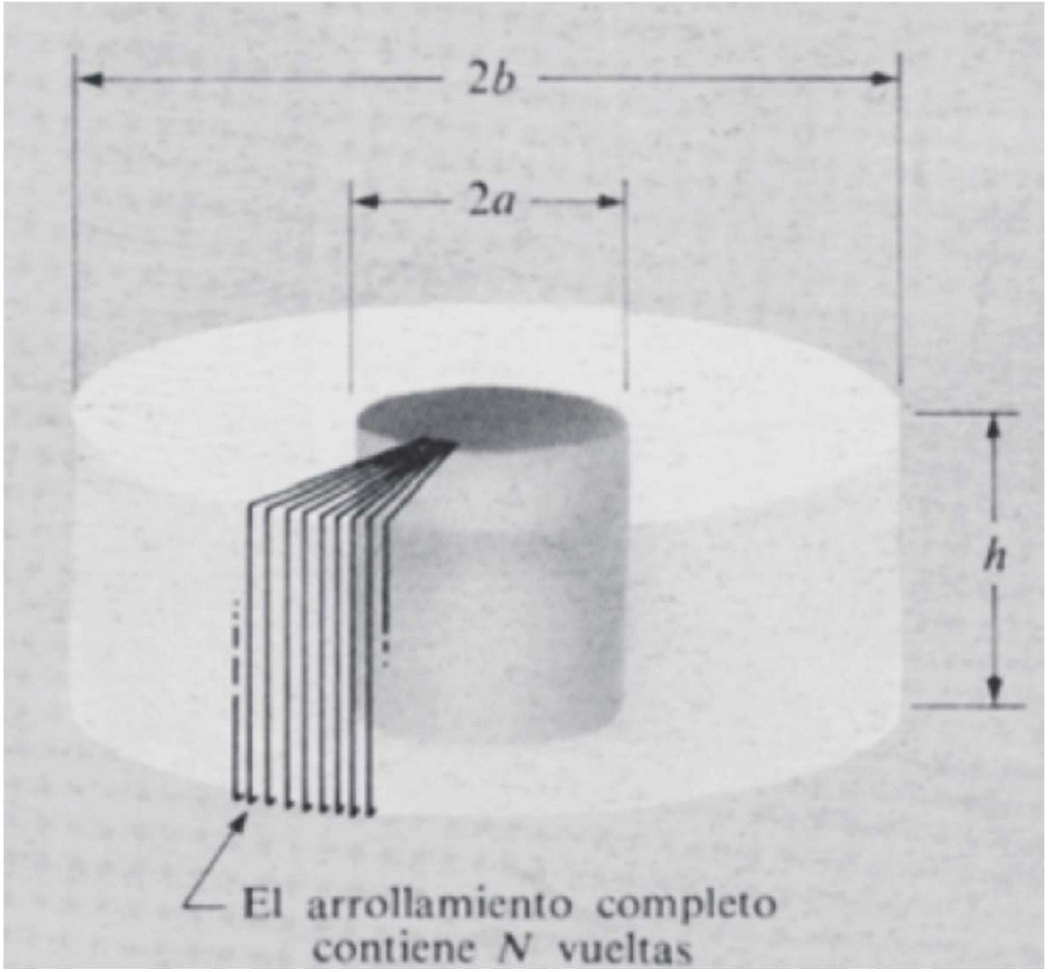
$$\mathcal{E}_{11} = -L_1 \frac{dI_1}{dt}$$

- Donde L_1 es la llamada autoinductancia

Ejemplo: bobina toroidal

- Consideremos una bobina toroidal rectangular de N vueltas de radio interior a y radio exterior b por la que circula una corriente I
- Por Ampère podemos saber que a una distancia r el campo es azimutal y vale

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



Ejemplo: bobina toroidal

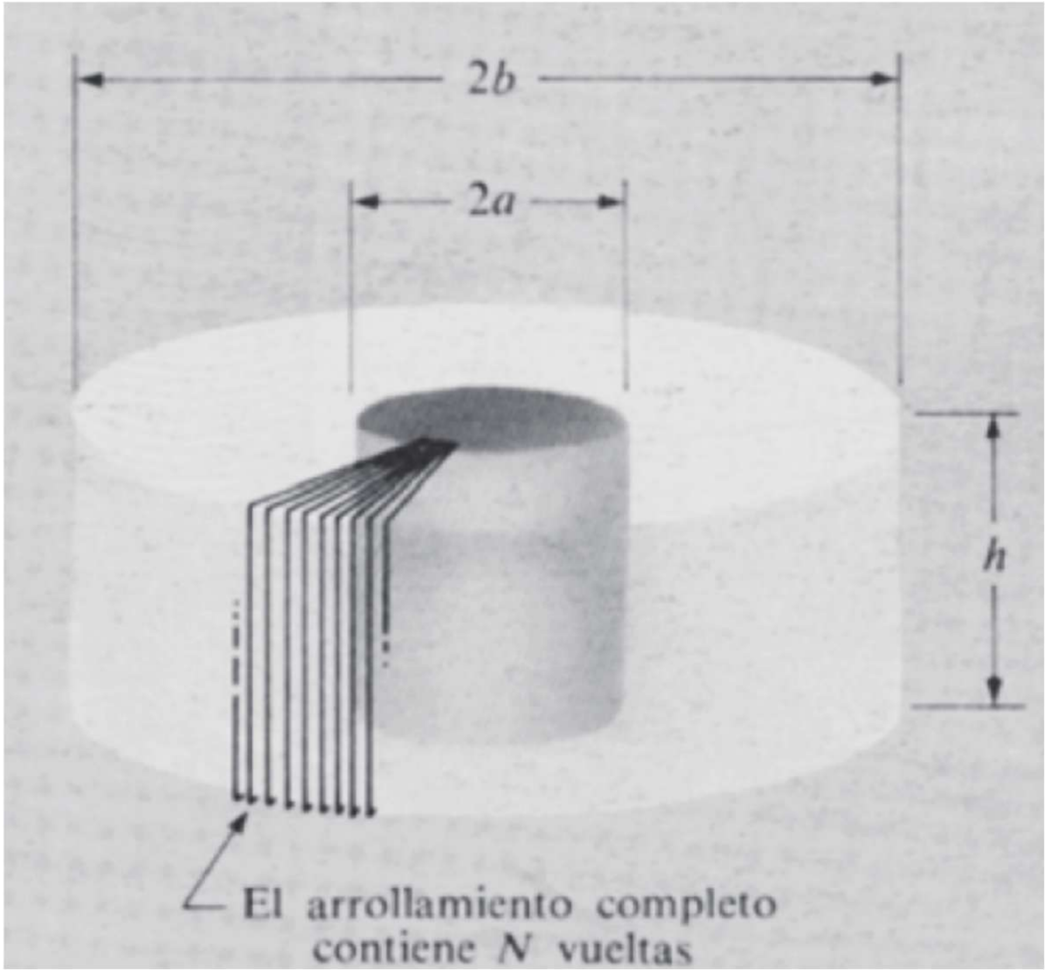
- El flujo a través de **una espira** es:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{da} = h \int_a^b \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} dr$$

$$\Phi_B = \frac{h\mu_0 N I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

A través de N espiras:

$$\Phi_B = \frac{h\mu_0 N^2 I}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



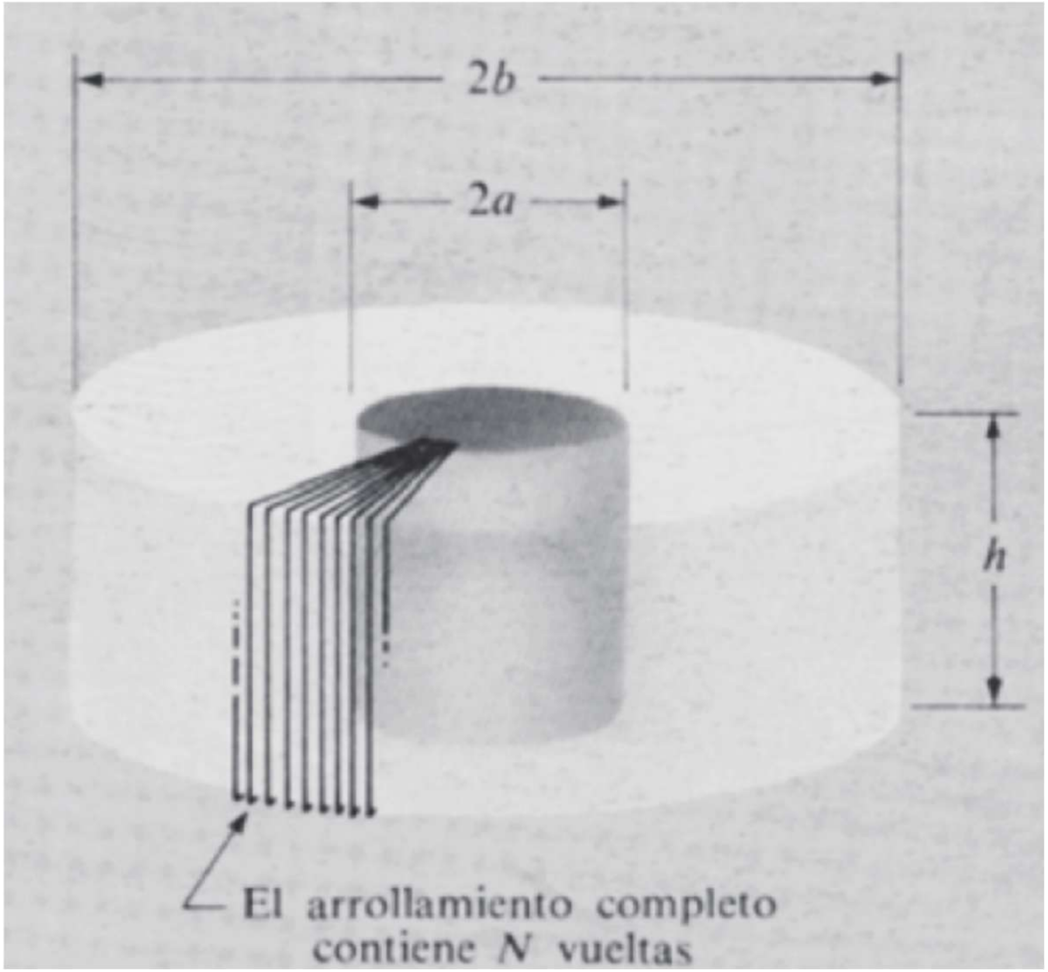
Ejemplo: bobina toroidal

- Entonces, la FEM inducida es:

$$-\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\frac{h\mu_0 N^2}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)\frac{dI}{dt}$$

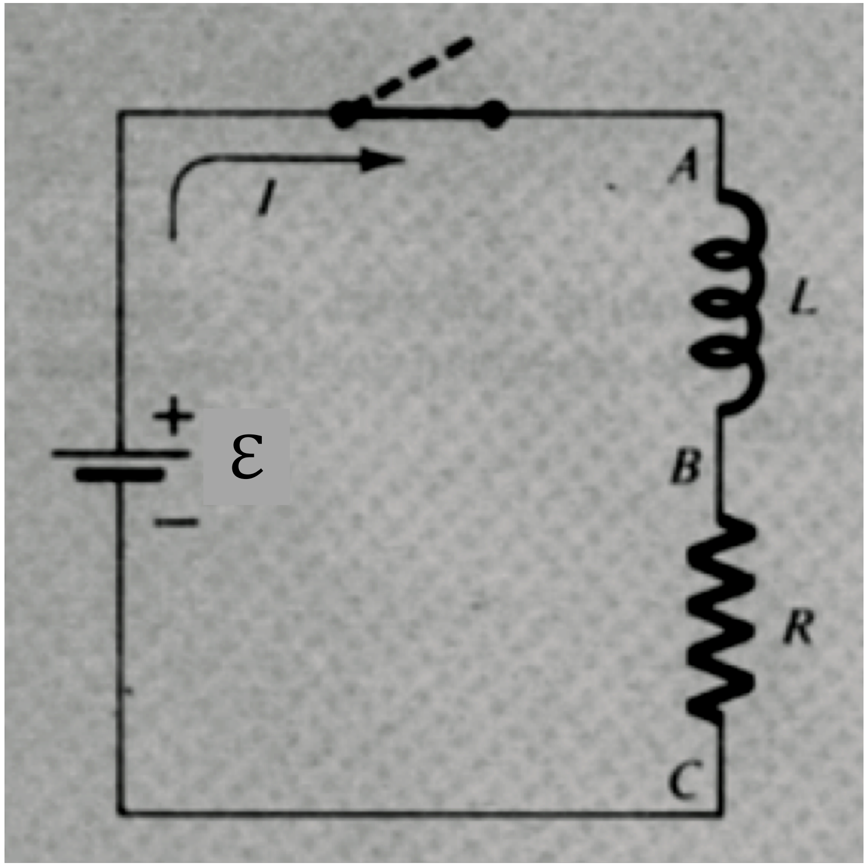
- Entonces la autoinductancia da:

$$L = \frac{h\mu_0 N^2}{2\pi}\ln\left(\frac{b}{a}\right)$$



Circuitos con autoinductancias

- Supongamos el siguiente circuito que consta de una autoinductancia L y una resistencia R en serie.
- La resistencia R puede ser la de todo el circuito, no importa donde la ubique.
- L puede representar la autoinductancia de la bobina más la del circuito. No tiene resistencia.
- Un switch permite prender o apagar la corriente I.
- La batería tiene una FEM de valor $\mathcal{E}$



Circuitos con autoinductancias

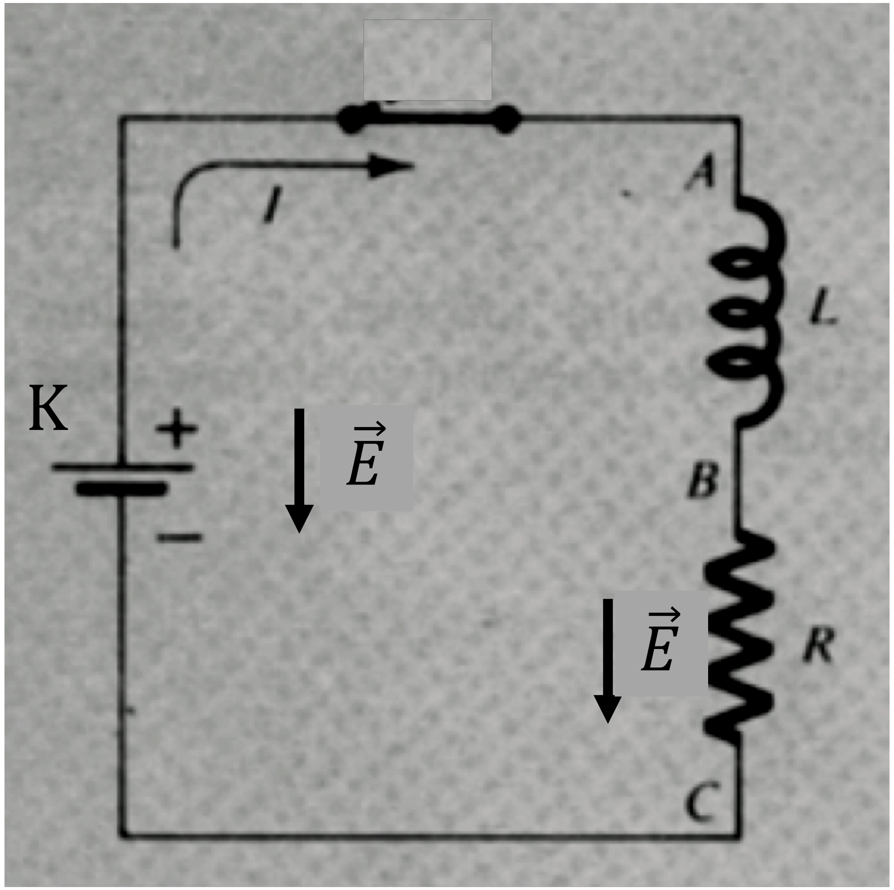
- Cerramos el switch.
- Si la corriente varía de la manera $\frac{dI}{dt}$ se inducirá una $FEM_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$.

- Entonces, la ley de Faraday queda:

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente tenemos:

$$-\boldsymbol{\varepsilon} + IR \ = -L\frac{dI}{dt}$$



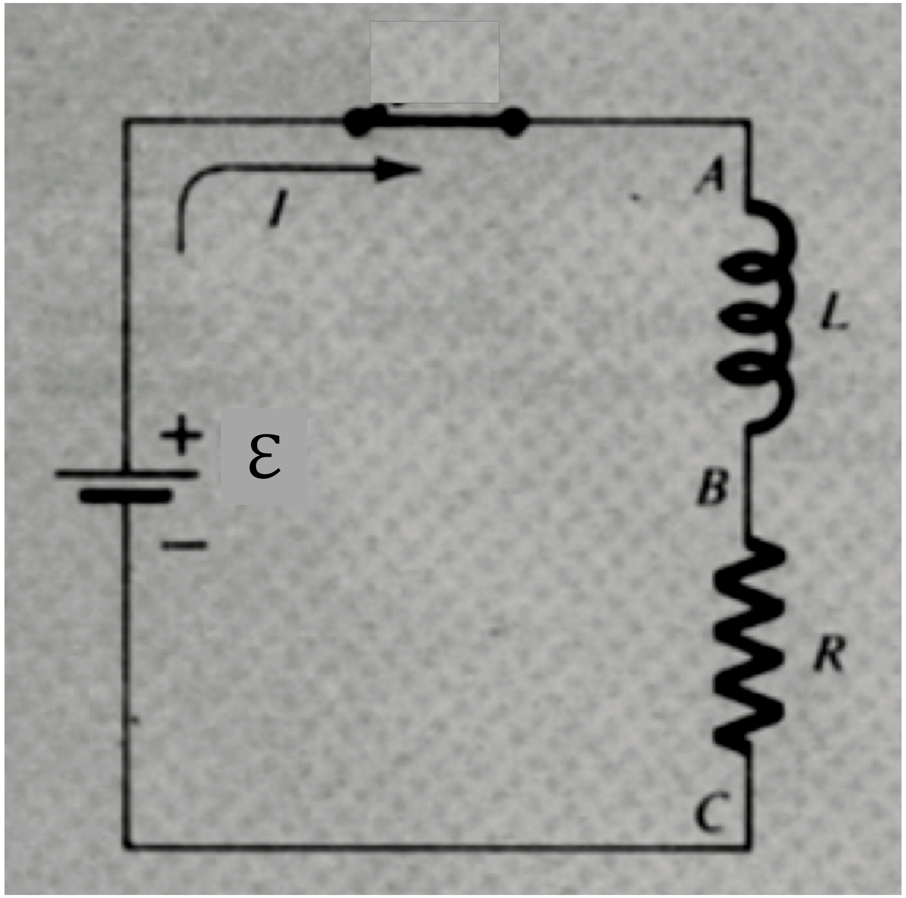
Circuitos con autoinductancias

- Formalmente esto es como una ley de Kirchhoff pero con los signos cambiados y ahora con un término dependiente de L.
- Multiplicando por -1 tenemos

$$\mathcal{E} - IR = L\frac{dI}{dt}$$

o bien

$$\mathcal{E} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$



Circuitos con autoinductancias

- La ecuación diferencial ordinaria de primer orden inhomogénea

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$

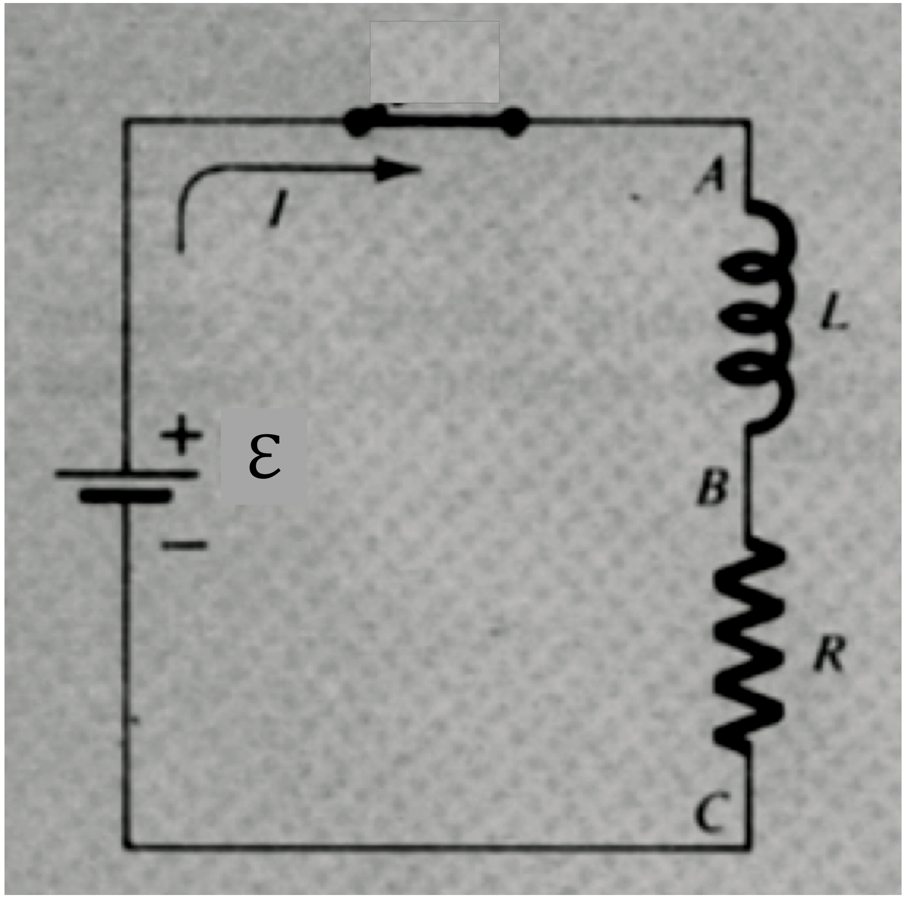
tiene como solución la suma de la solución general de la homogénea

$$\frac{dy_h}{dx} = ay_h$$

más una solución de la inhomogénea

$$y = y_h + y_i$$

donde $y_i = -\frac{b}{a}$



Circuitos con autoinductancias

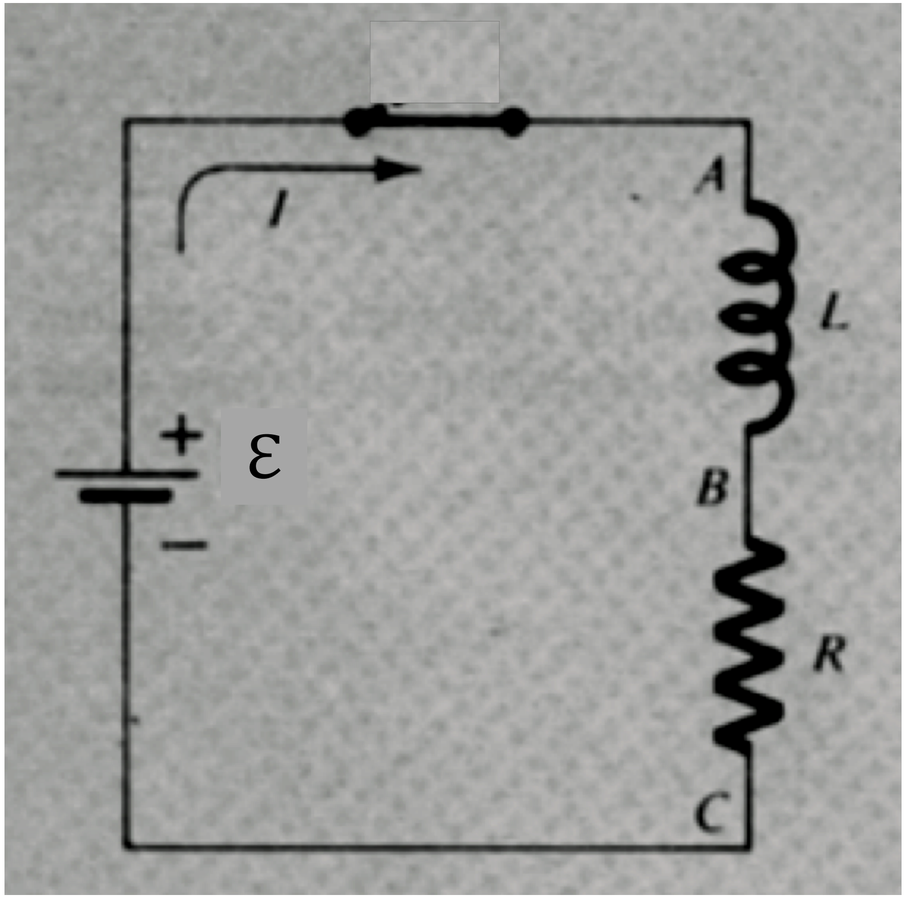
- En nuestro caso: $I = y, t = x, a = -\frac{R}{L}, b = \frac{\mathcal{E}}{L}$

La homogénea es

$$\frac{dI_h}{dt} = -\frac{R}{L} I_h$$

entonces

$$I_h = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$



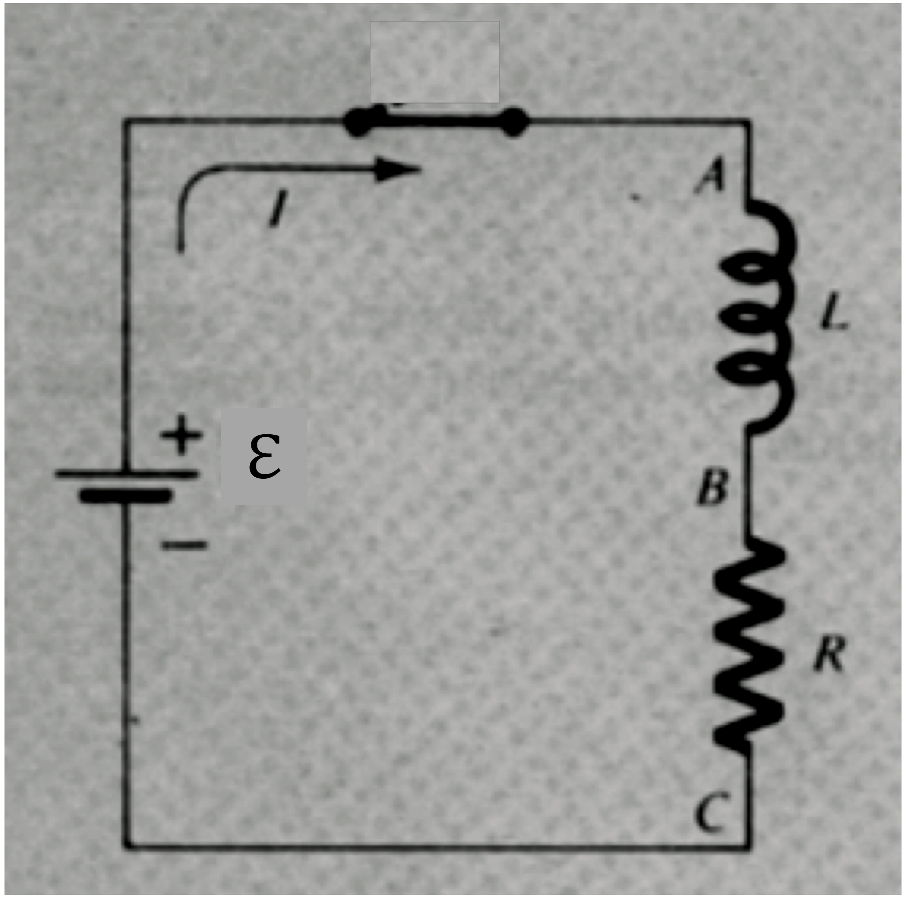
Circuitos con autoinductancias

- Por otro lado, una particular de la inhomogénea puede ser una constante:

$$I_i = -\frac{\frac{\mathcal{E}}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

entonces

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}$$



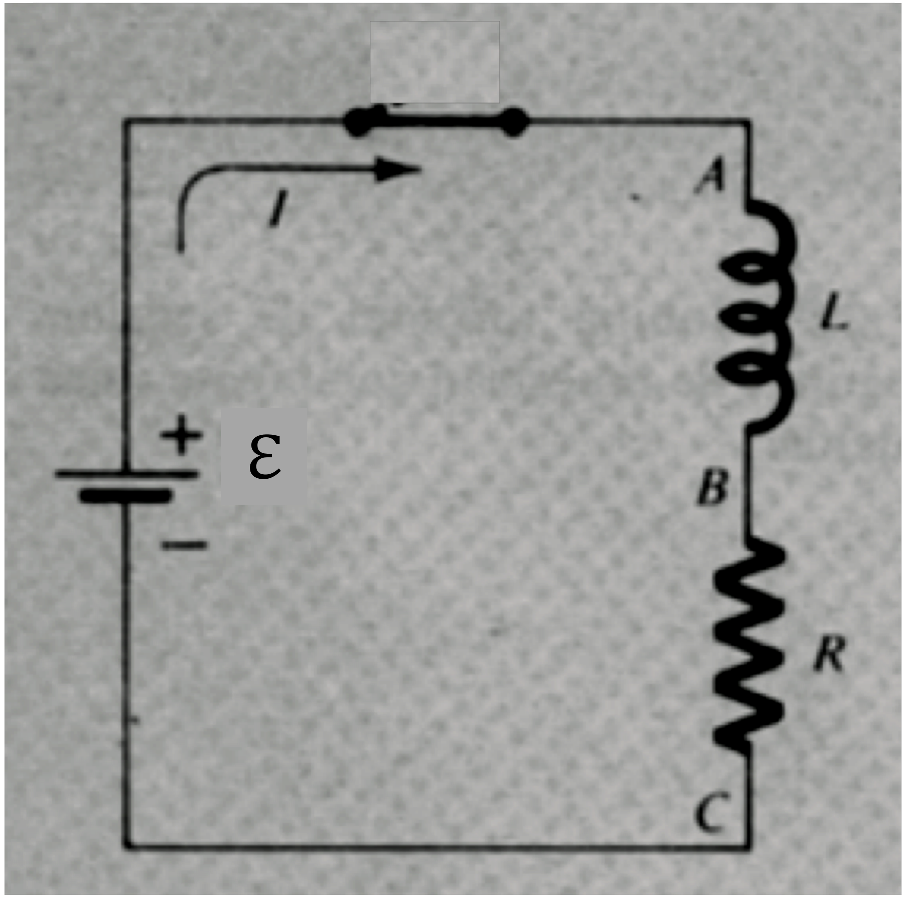
Circuitos con autoinductancias

- Apliquemos las condiciones iniciales para despejar C
- En $t = 0$ cerramos el switch y todavía no hay corriente

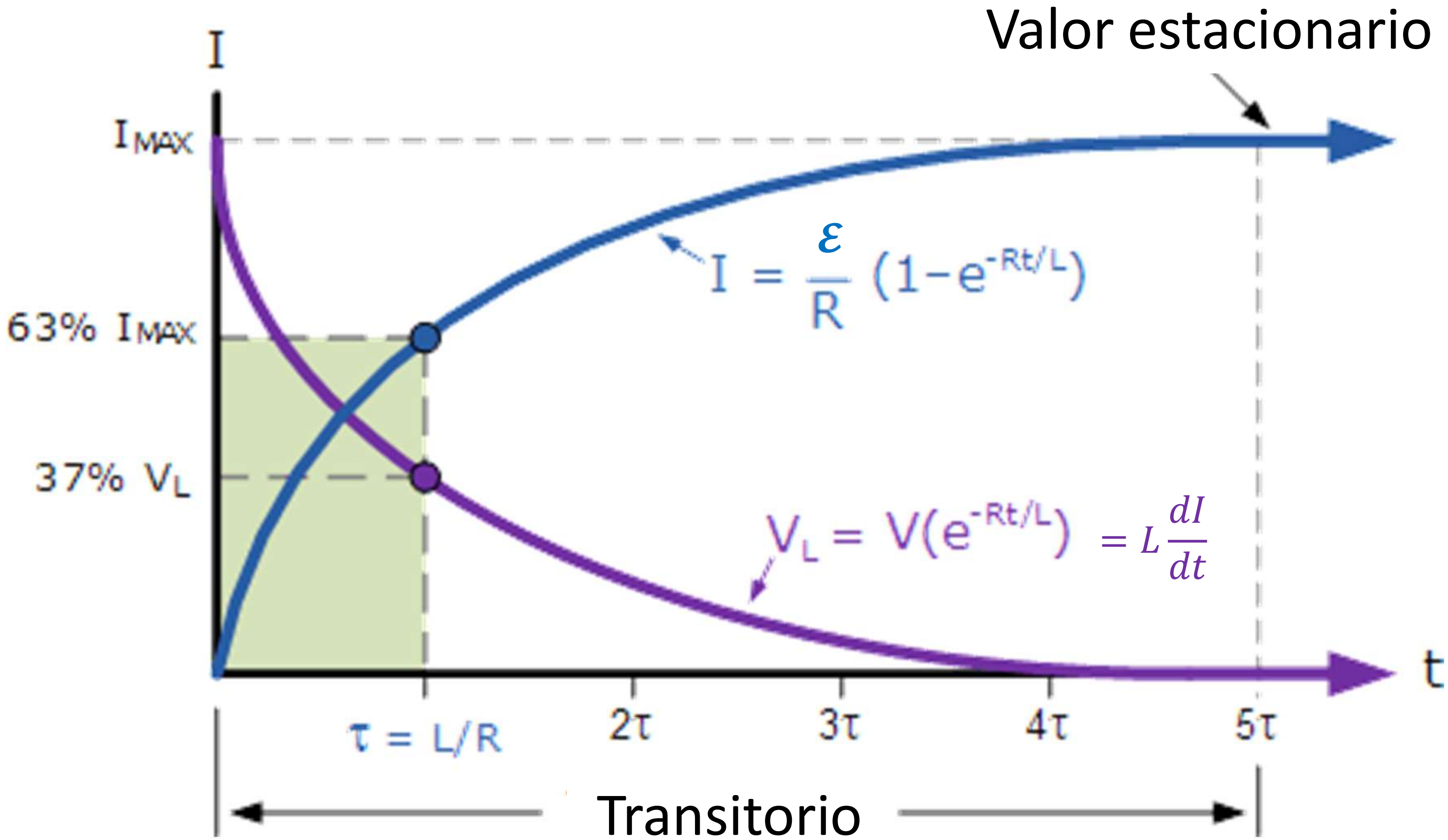
$$I(0) = 0 = C + \frac{\mathcal{E}}{R}$$
$$C = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Entonces la solución final es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Circuitos con autoinductancias



Circuitos con autoinductancias

- Tras cerrar el switch, el circuito demora en alcanzar el valor estacionario de la corriente $\frac{\mathcal{E}}{R}$
- Esta demora viene dada por $\frac{L}{R}$, cuanto más grande es este cociente, más se demora.
- Esto es porque la bobina se opone via ley de Faraday a que circule la corriente que la induce.
- Esta oposición también se puede ver como una FEM inducida que se opone a $\mathcal{E}$ a medida que el flujo crece en la bobina a una tasa $L\frac{dI}{dt}$ almacenando energía.