

El potencial lejos de una distribución

- Volvamos al caso de un disco uniformemente cargado. El potencial a lo largo del eje de simetría daba:

$$\varphi(y) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{y^2 + a^2} - |y| \right]$$

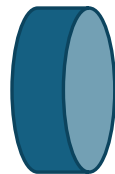
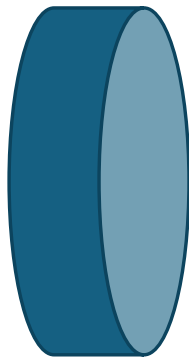
- Nos interesa saber a qué se parece el potencial a distancias grandes. Para $|y| \gg a$ podemos aproximar por serie de Taylor el término

$$\begin{aligned} \sqrt{y^2 + a^2} - y &= y \left[\sqrt{1 + \frac{a^2}{y^2}} - 1 \right] \\ &= y \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{y^2} \right) \dots - 1 \right] \approx \frac{a^2}{2y} \end{aligned}$$

El potencial lejos de una distribución

- Reemplazando la aproximación, tenemos

$$\varphi(0,y,0) \approx \frac{a^2\sigma}{4\epsilon_0 y} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 y} \text{ para } y \gg a$$



$$\bullet \quad q = \sigma\pi a^2$$

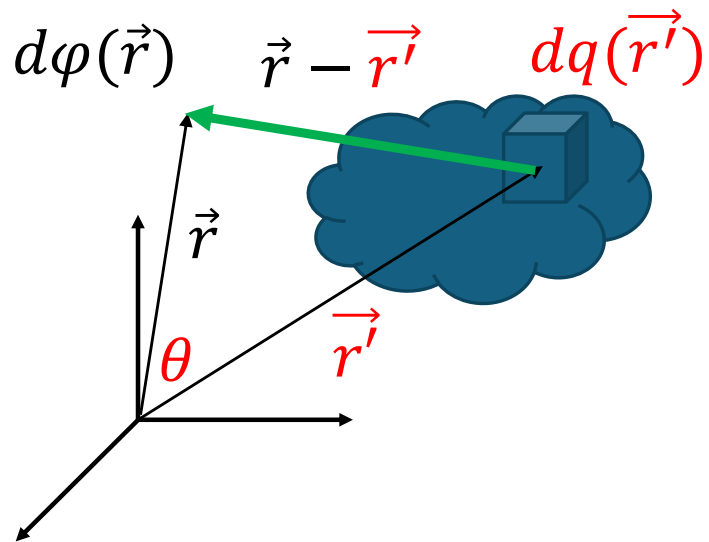


De lejos sólo se ve
una carga puntual

Momentos de una distribución de carga

- Un átomo o molécula consta de cargas en disposiciones complejas en volúmenes del orden de 10^{-24} cm.
- ¿Qué aspectos de la estructura de la carga son los más importantes cuando vemos el potencial/campo a grandes distancias de las distribuciones de carga?

Momentos de una distribución de carga



- Supongamos una distribución acotada $\rho(\vec{r}')$ y un punto $\vec{r}$ exterior a la distribución.

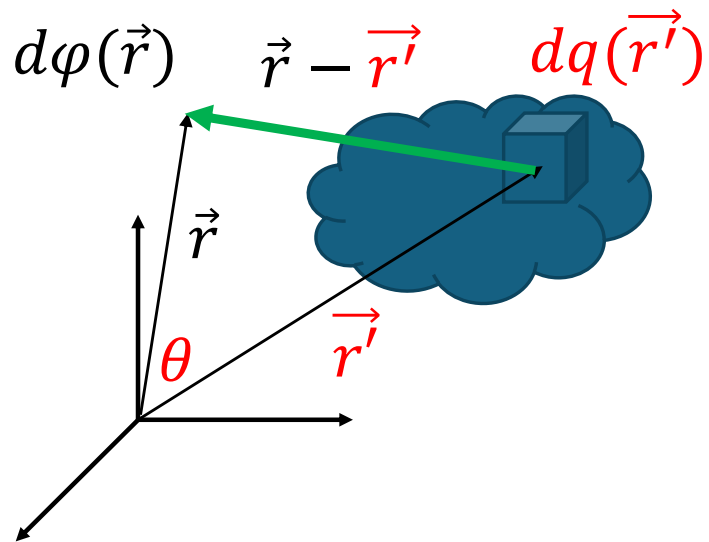
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Tomemos la distancia R tal que:

$$R = |\vec{r} - \vec{r}'|$$

Momentos de una distribución de carga

- Reescribiendo tenemos:



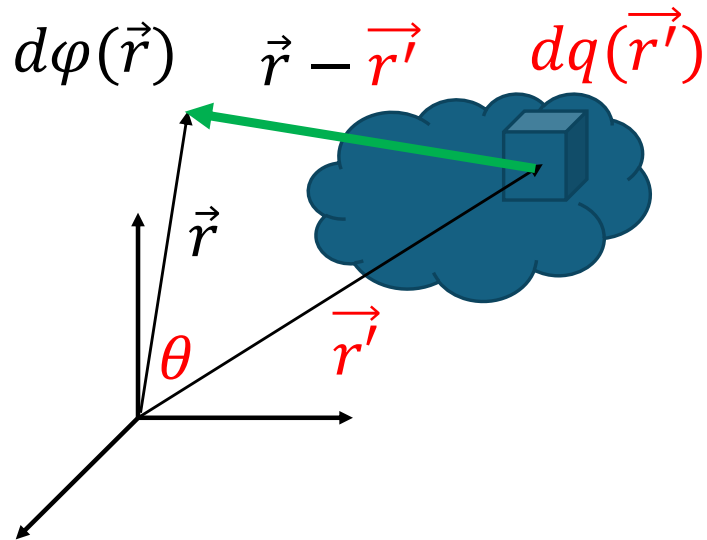
$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{R}$$

- Expresamos R en función de las distancias r y r' desde el origen del sistema de coordenadas. Por el teorema del coseno

$$R = [r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{1/2}$$

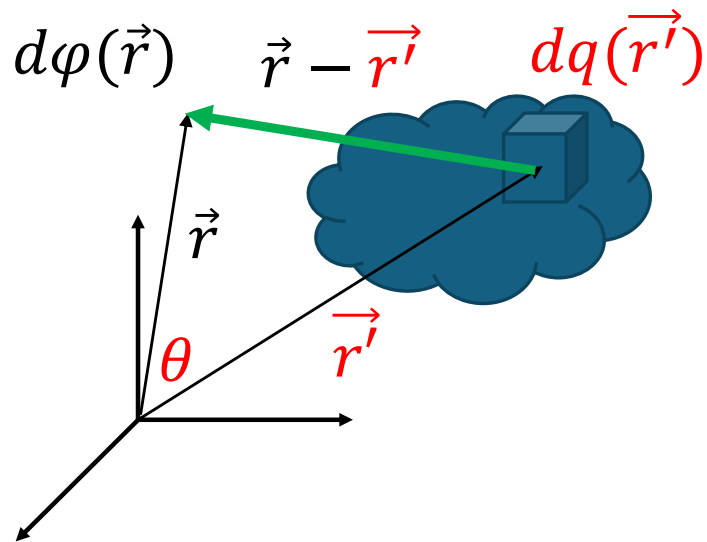
Momentos de una distribución de carga

- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor R^{-1} :



$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

Momentos de una distribución de carga



- La idea es ver qué pasa cuando $r \gg r'$.
Veamos un poco el factor R^{-1} :

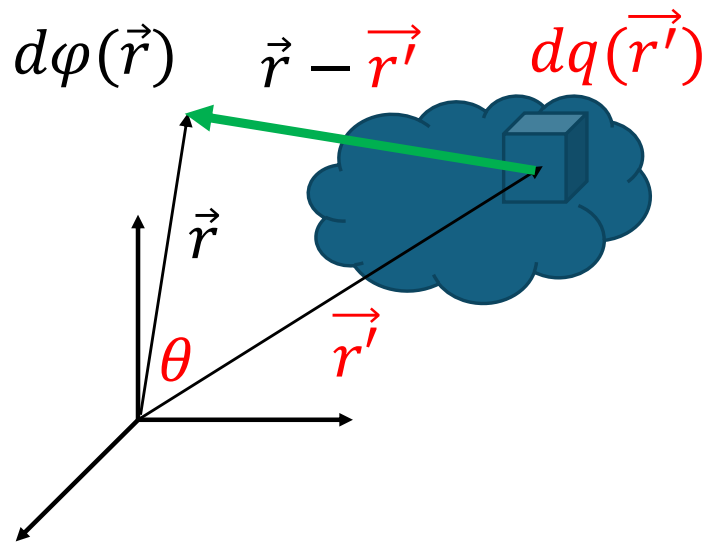
$$[r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \theta]^{-1/2} = \frac{1}{r} \left[1 + \left(\frac{r'^2}{r^2} - \frac{2r'}{r} \cos \theta \right) \right]^{-1/2}$$

- Podemos hacer el desarrollo en Taylor de R^{-1} para $r'/r \ll 1$. Tomando el desarrollo

$$(1 + \delta)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}\delta + \frac{3}{8}\delta^2 \dots$$

para $\delta \ll 1$

Momentos de una distribución de carga



- Tomando esta expansión el factor R^{-1} queda:

$$= \frac{1}{r} \left[1 + \frac{r'}{r} \cos \theta + \left(\frac{r'}{r} \right)^2 (3 \cos^2 \theta - 1) + \left(\begin{array}{c} \text{términos de} \\ \text{grado superior} \end{array} \right) \right]$$

más grande >>>>>>>>>> más chico

- Entonces, reemplazando en $\varphi(\vec{r})$

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r} \int \rho dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r^2} \int r' \cos \theta \rho dv'}_{K_1} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\frac{1}{r^3} \int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho dv'}_{K_2} + \dots \end{aligned}$$

Momentos de una distribución de carga

- Entonces $\varphi(\vec{r})$ lejos de la distribución puede escribirse como una serie de términos de importancia decreciente (fijarse el exponente de $1/r$)

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) = & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \underbrace{\int \rho \, dv'}_{K_0} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \underbrace{\int r' \cos \theta \, \rho \, dv'}_{K_1} \\ & + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \underbrace{\int r'^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \rho \, dv'}_{K_2} + \dots\end{aligned}$$

- La clave es calcular los coeficientes K_0 , K_1 , K_2 , etc. Cada término se denomina momento.

Momentos de una distribución de carga

- ¿Hace falta calcular todos los K_i ?
- No! El comportamiento del potencial a grandes distancias de la fuente estará determinado por el **primer término no nulo** de la serie:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{K_0}{r} + \frac{K_1}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right]$$

Los coeficientes K_0 y K_1

- $K_0 = \int \rho(\vec{r}') dv'$ es simplemente la carga total de la distribución (da cero para moléculas y átomos neutros).

- Si $K_0 = 0$, calcularemos

$$K_1 = \int r' \cos \theta \rho(\vec{r}') dv'$$

Momento dipolar

Los coeficientes K_0 y K_1

- Para simplificar esta expresión consideremos el vector

$$\vec{p} = \int \vec{r'} \rho(\vec{r'}) dv'$$

- Entonces:

$$\begin{aligned} \hat{r} \cdot \vec{p} &= \hat{r} \cdot \int \vec{r'} \rho(\vec{r'}) dv' = \int \hat{r} \cdot \vec{r'} \rho(\vec{r'}) dv' = \\ &= \int r' \cos \theta \rho(\vec{r'}) dv' = K_1 \end{aligned}$$

- Por lo tanto: $K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p}$

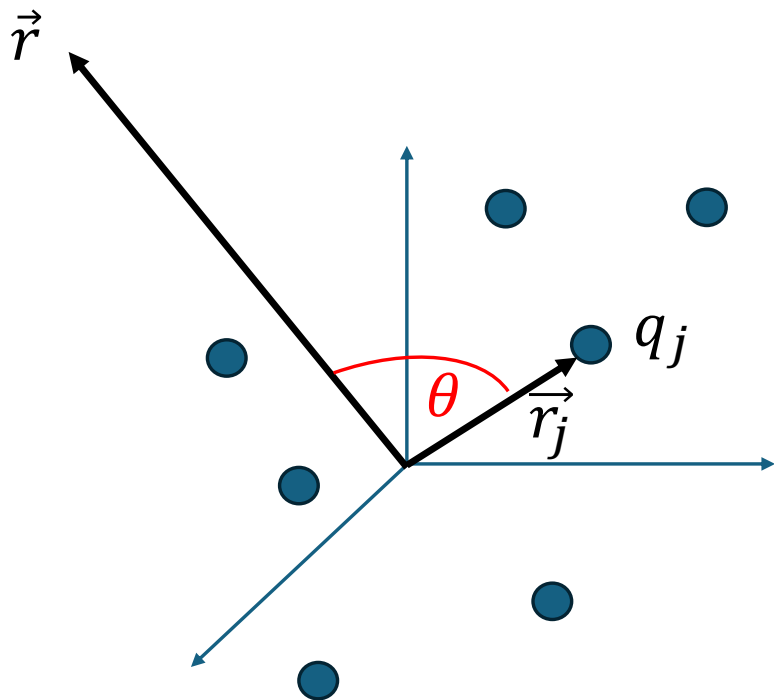
Los coeficientes K_0 y K_1

- Resumiendo, para un punto en dirección $\hat{r}$ y a una distancia r de una distribución acotada $\rho(\vec{r}')$, el potencial viene dado por:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \frac{K_2}{r^3} + \dots \right]$$

- Donde $Q = K_0 = \int \rho(\vec{r}') dv'$ y $\vec{p} = \int \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv'$

Función potencial para N cargas puntuales



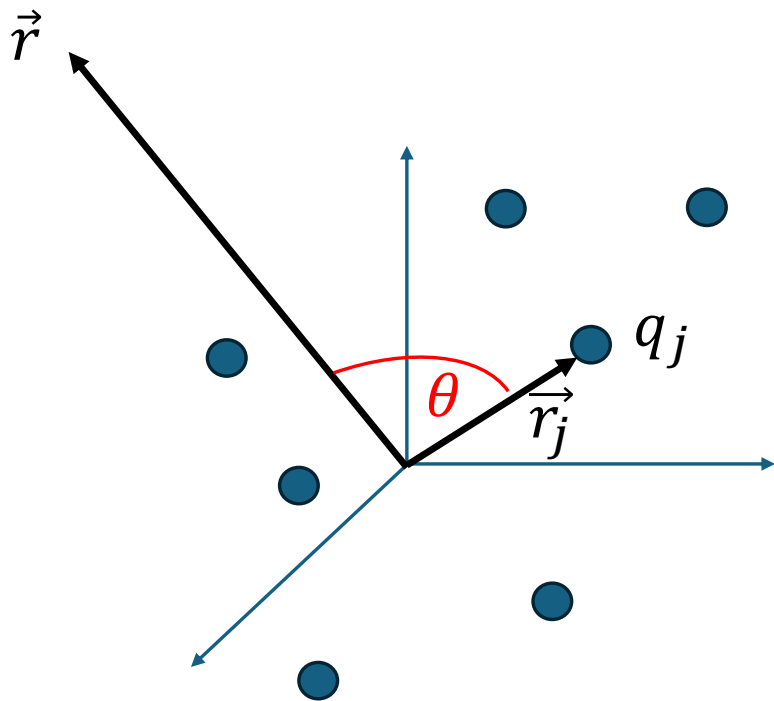
- Si la distribución es acotada en el espacio se puede poner como punto de potencial cero el infinito (es decir $\lim_{r_i \rightarrow \infty} \varphi(\vec{r}_i) = 0$) y entonces, tomando $\vec{r}_f = \vec{r}$, y quitando tildes:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j}{|\vec{r} - \vec{r}_j|}$$

- Donde por el teorema del coseno:

$$|\vec{r} - \vec{r}_j| = R_j = \sqrt{r^2 + r_j^2 - 2rr_j \cos \theta}$$

Potencial lejano para cargas puntuales



- De la misma manera que antes, para $\frac{r_j}{r} \ll 1$ aproximamos:

$$\frac{1}{R_j} \cong \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{r_j^2}{r^2} - \frac{2r_j}{r} \cos \theta \right)}}$$

Potencial lejano para cargas puntuales

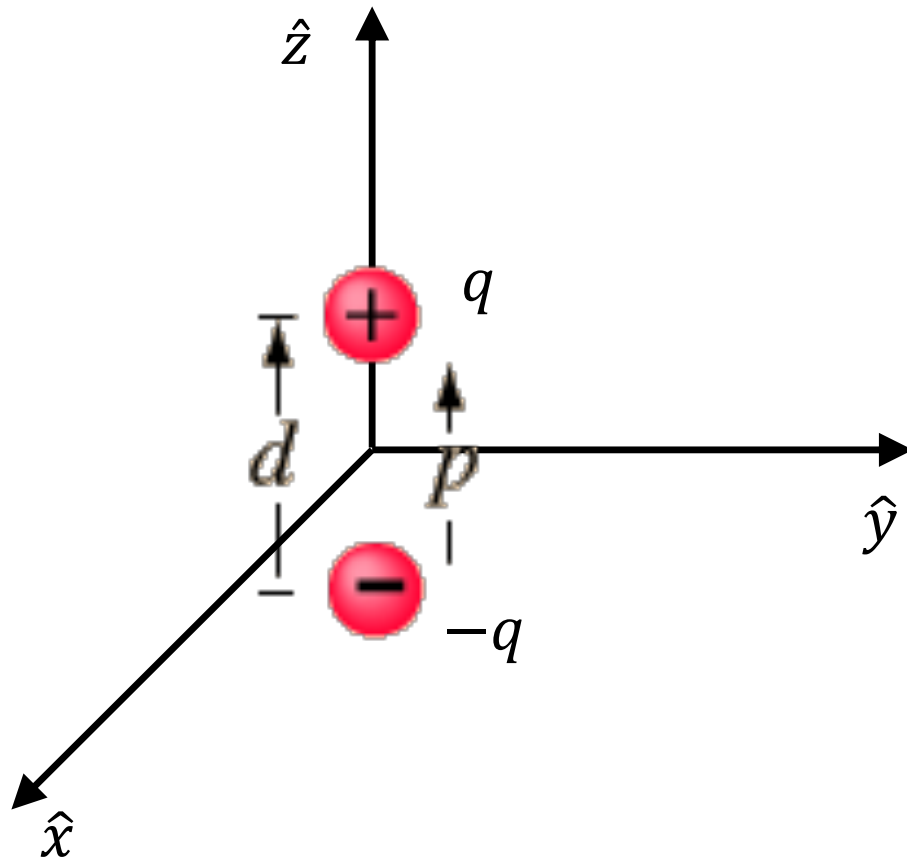
- Entonces:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{Q}{r} + \frac{\hat{r} \cdot \vec{p}}{r^2} + \dots \right]$$

- Donde ahora

$$Q = K_0 = \sum_{j=1}^N q_j$$
$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N r_j q_j$$

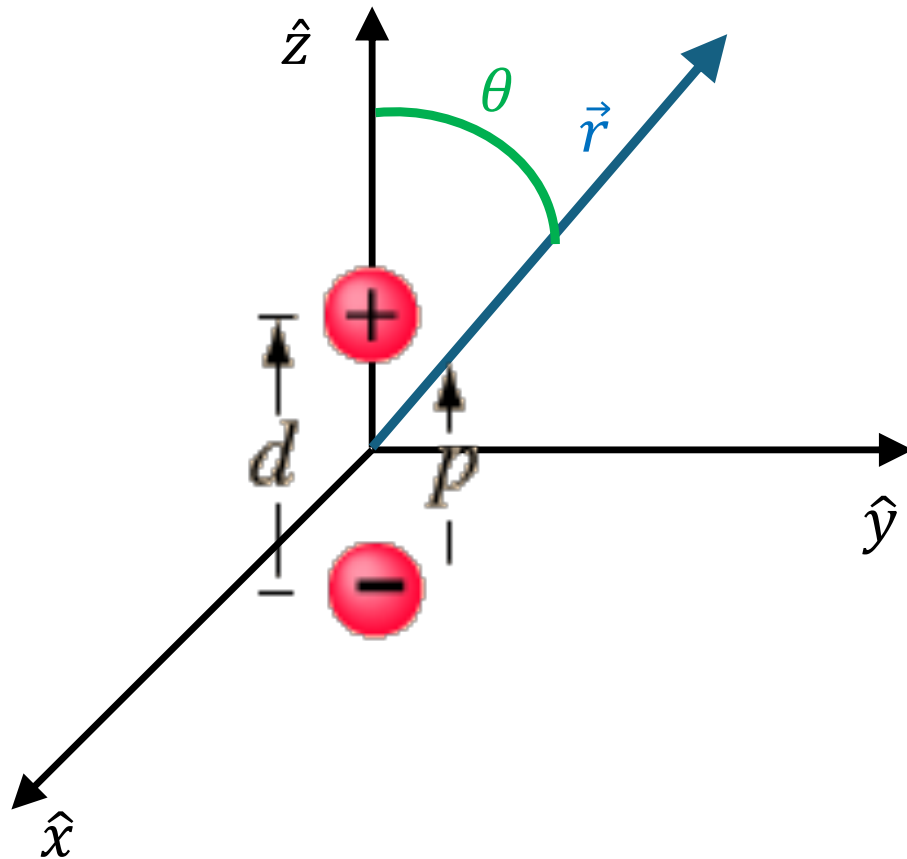
Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- Tenemos dos cargas puntuales $\pm q$
- Ubicamos las cargas sobre el eje z en $z = \mp \frac{d}{2}$.
- El primer coeficiente es cero:

$$K_0 = q - q = 0$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



- El momento dipolar:

$$\vec{p} = \sum_{j=1}^N \vec{r}_j q_j$$
$$\vec{p} = \frac{d}{2} q \hat{z} + \left(-\frac{d}{2}\right) (-q) \hat{z} = qd \hat{z}$$

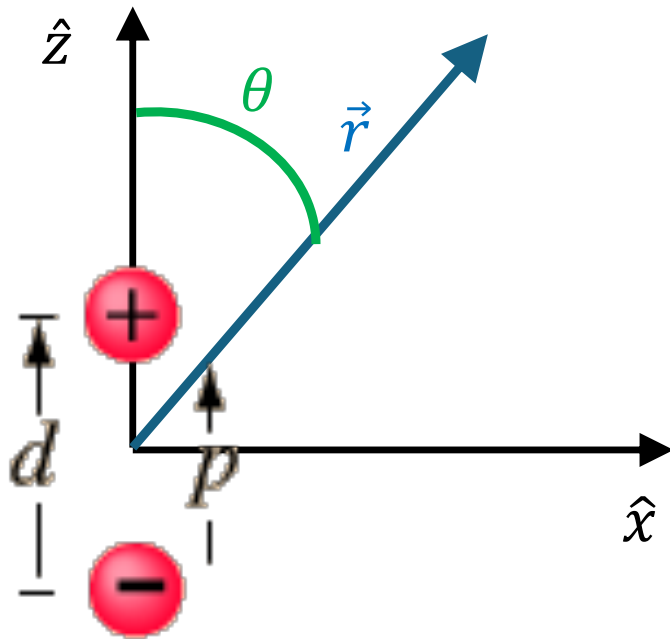
- Por lo tanto

$$K_1 = \hat{r} \cdot \vec{p} = qd \cos \theta$$

- Y entonces, lejos del dipolo

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qd \cos \theta}{r^2}$$

Ejemplo: Potencial lejano de un dipolo



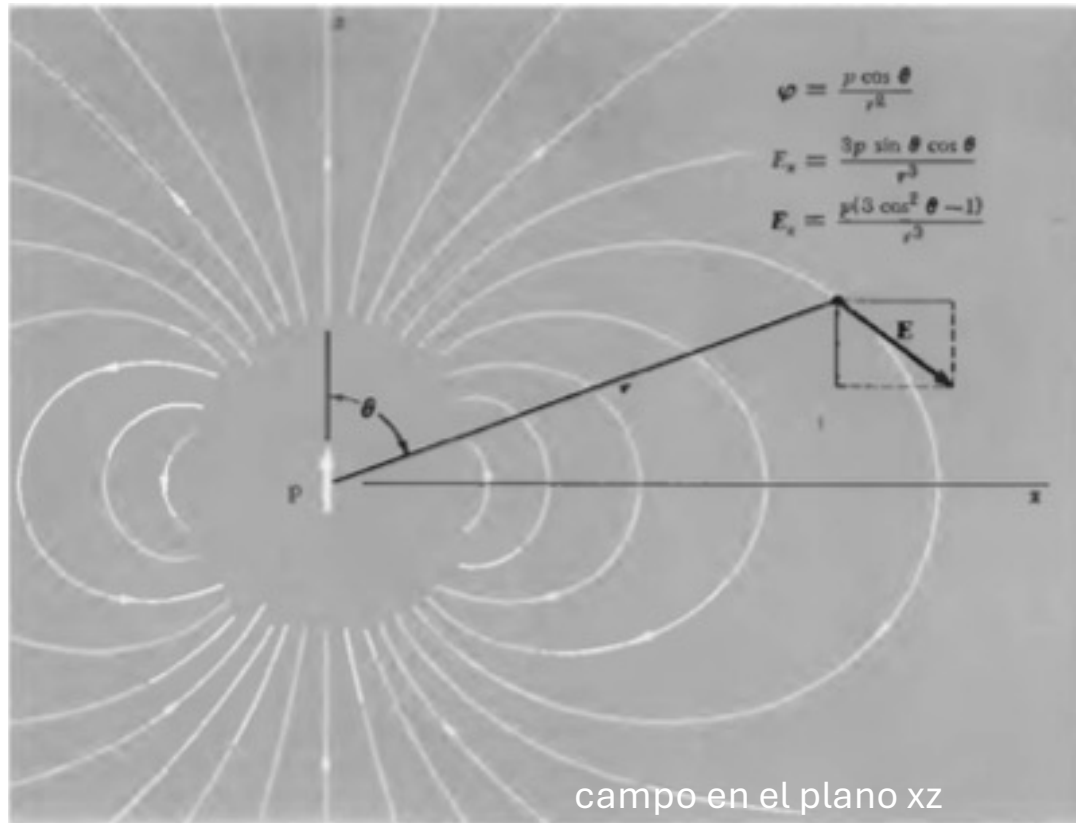
- El potencial es simétrico alrededor del eje $\hat{z}$.
- Entonces, veamos el potencial en por ejemplo, el plano xz . Ahí:

$$\cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}$$

- Entonces:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{pz}{(x^2 + z^2)^{3/2}}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo



- Calculemos el campo en el plano xz

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\hat{z}\right]$$

- Sabiendo además que:

$$\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}}$$

- En el plano xz, $E_y = 0$ y entonces:

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

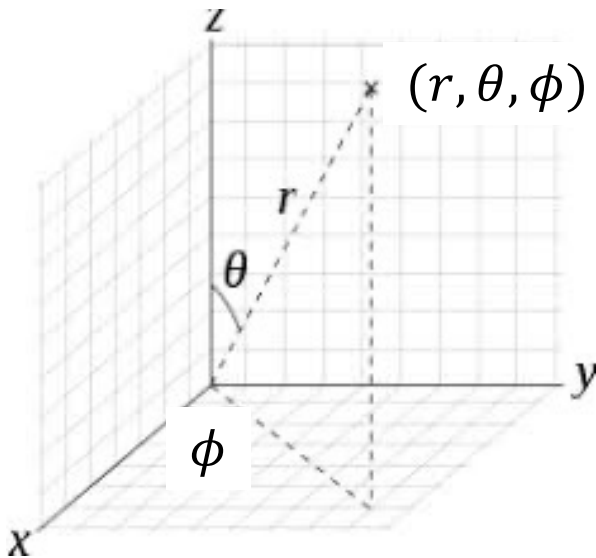
$$E_x = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3pxz}{(x^2 + z^2)^{5/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3p \sin \theta \cos \theta}{r^3}$$

$$\begin{aligned} E_z &= - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} p \left[\frac{3z^2}{(x^2 + z^2)^{5/2}} - \frac{1}{(x^2 + z^2)^{3/2}} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p(3 \cos^2 \theta - 1)}{r^3} \end{aligned}$$

Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

- También podemos hacer el cálculo del campo en esféricas.
- Esta vez la solución vale para todo el espacio
- El gradiente en esféricas es:

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial\varphi}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial \theta} \hat{\theta}$$



Ejemplo: Campo lejano de un dipolo

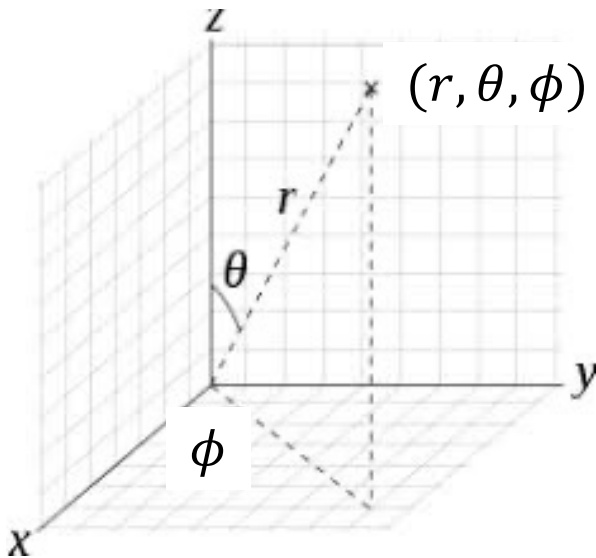
- Usando

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{K_1}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

- El campo en esféricas es:

$$\vec{E} = \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \hat{\theta}$$

- Poloidal y decae como r^{-3}



Conductores en campos electrostáticos

Tipos de materiales eléctricos

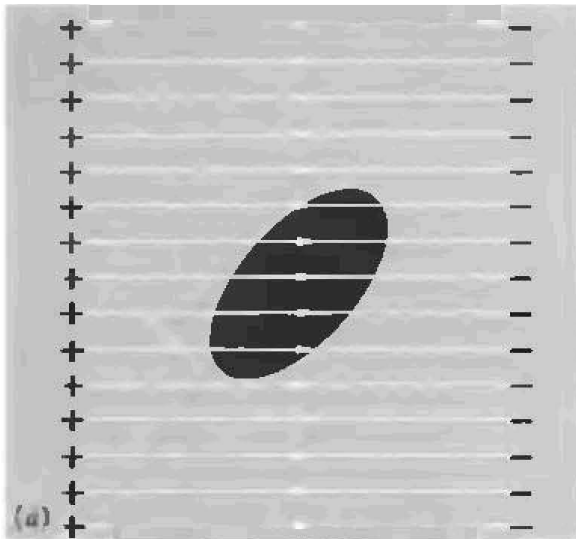
- Conductores: Alta movilidad de portadores de carga (en sólidos, electrones). Las cargas sobre ellos se pueden mover libremente como respuesta a los campos eléctricos
- Semiconductores: movilidad de portadores de carga limitada a ciertas condiciones.
- Aislantes: baja movilidad de portadores de carga. Las cargas no se mueven a través de ellos

Conductores en electrostática

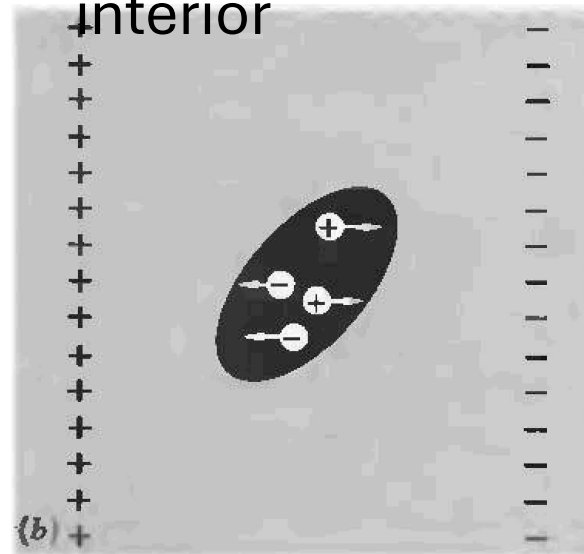
- Las cargas pueden reacomodarse libremente en un conductor.
- Este reacomodamiento se realiza de acuerdo a ciertas reglas.
- En electrostática, vamos a considerar las propiedades de los conductores una vez que se haya alcanzado el estado estacionario (es decir, cuando las cargas ya se hayan acomodado).

Aislantes y conductores en campo externo uniforme

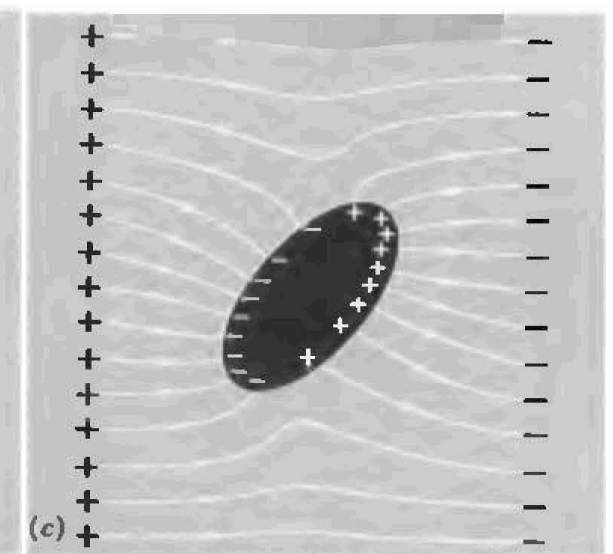
Aislante: el campo en el interior es prácticamente el del exterior



Conductor: las cargas se van a la superficie y dejan campo nulo en el interior



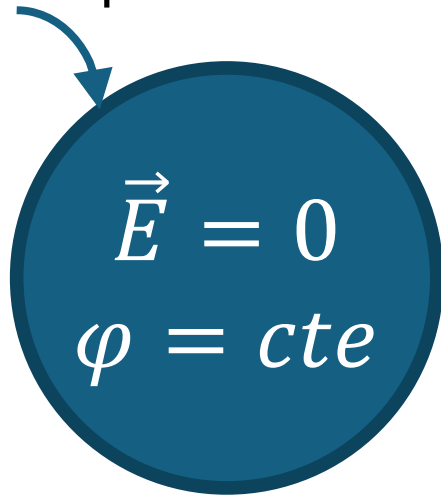
Transitorio



Estacionario

Propiedades de los conductores en estado estacionario

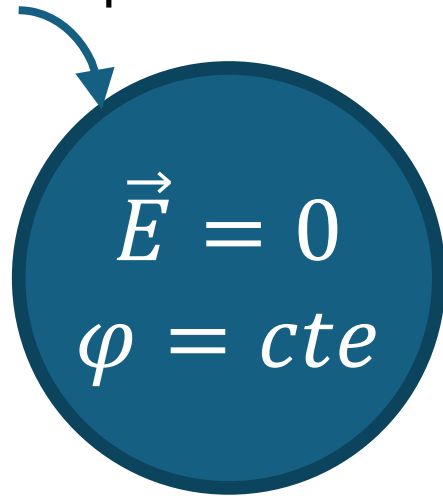
Cargas en la superficie



- En el interior de los conductores en estado estacionario, el campo eléctrico es nulo.
- El exceso de carga se ubica en el borde físico del conductor.

Propiedades de los conductores en estado estacionario

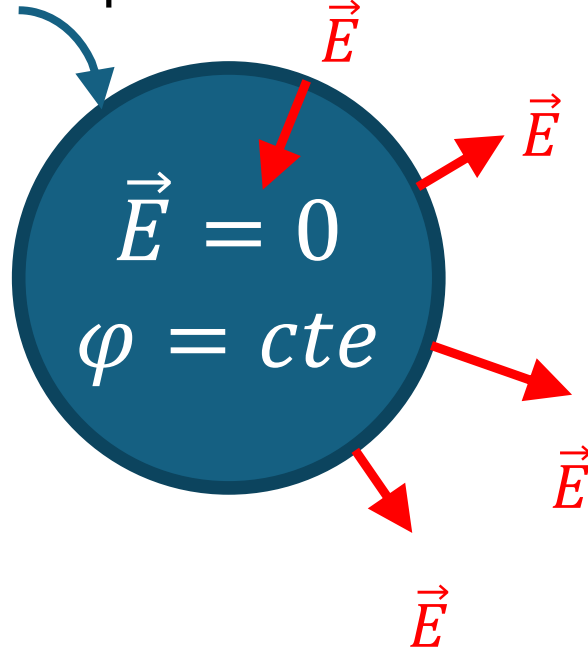
Cargas en la superficie σ



- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el potencial ahí es constante al igual que en su superficie.

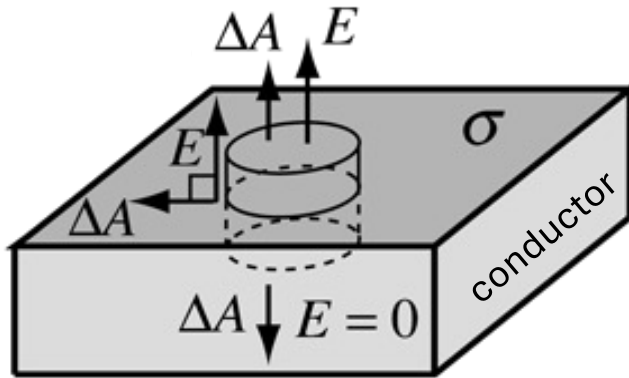
Propiedades de los conductores en estado estacionario

Cargas en la superficie σ



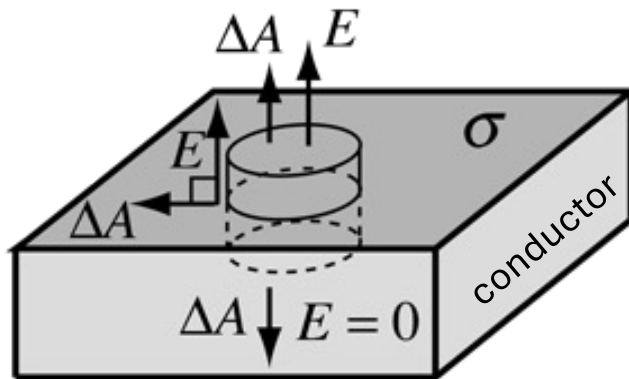
- Si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, el **potencial ahí es constante al igual que en su superficie.**
- Como la **superficie es equipotencial**, el **campo en esa superficie sólo puede ser normal a ella.**

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El salto de un campo eléctrico nulo en el interior de un conductor a uno no nulo y normal en su superficie se debe a la presencia de la carga acumulada ahí.
- Apliquemos la Ley de Gauss en un cilindro alineado con la normal a la superficie de un conductor donde hay una carga superficial de densidad σ (C/m²)

Discontinuidad de $\vec{E}$ en la superficie



- El único flujo que sobrevive es el que se da a través de la tapa externa de área ΔA

$$\oiint_{\text{cilindro}} \vec{E} \cdot \vec{da} = \frac{\text{carga encerrada}}{\epsilon_0}$$

$$E \Delta A = \frac{\sigma \Delta A}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Conductores (estado estacionario)

- Campo eléctrico:
 - Nulo en su interior
 - En la superficie, es normal a ella.
 - La intensidad depende de la densidad superficial de carga local
- Superficie es equipotencial
- Carga se ubica sobre superficie

Campo eléctrico en conductores

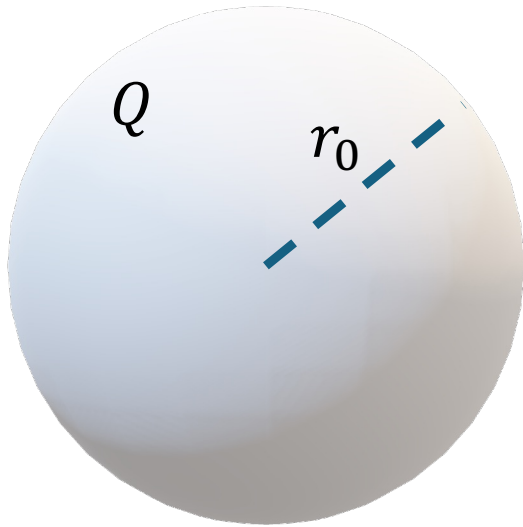
- De los puntos anteriores se deduce que la carga total Q sobre la superficie de un conductor S se puede escribir como:

$$Q = \int \sigma da = \epsilon_0 \int \vec{E} \cdot \vec{da}$$

¡ Importante !

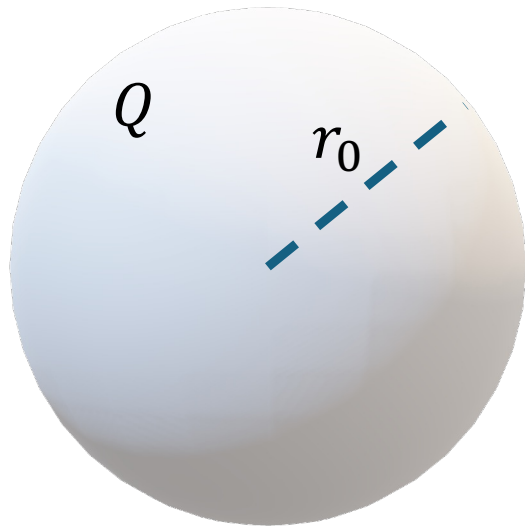
$\vec{E}$ es el campo debido a todas las cargas, las de la superficie, más las lejanas. Es σ la que se acomoda para que la relación de arriba se cumpla

Esfera conductora cargada



- Supongamos una esfera maciza conductora de radio r_0 .
- Sobre ella se ubica una carga Q conocida.
- Hallar el campo y el potencial en todo el espacio
- ¿Cómo se distribuye la carga en su superficie?

Esfera conductora cargada



- Al exterior de la esfera $r > r_0$
$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2}; \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$
- En el interior de la esfera $r < r_0$:
$$\vec{E}(r) = 0; \quad \varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$
- En su superficie;
$$\vec{E}(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r_0^2}; \quad \varphi(r_0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_0}$$
- $$\sigma = \frac{Q}{4\pi r_0^2}$$

Pregunta

- ¿Cuánto varió el campo eléctrico al cruzar la superficie de la esfera?