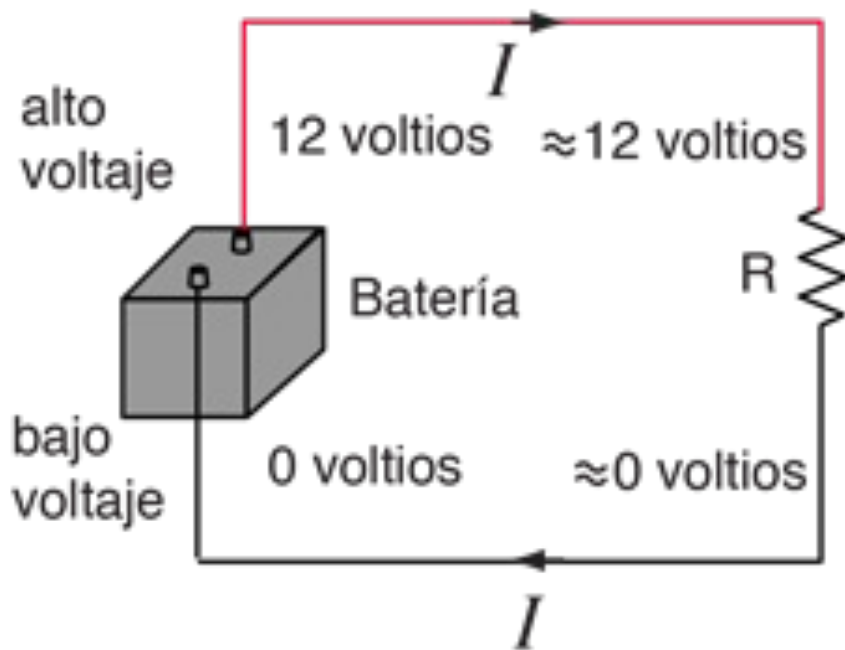


Leyes de Kirchhoff para circuitos estacionarios

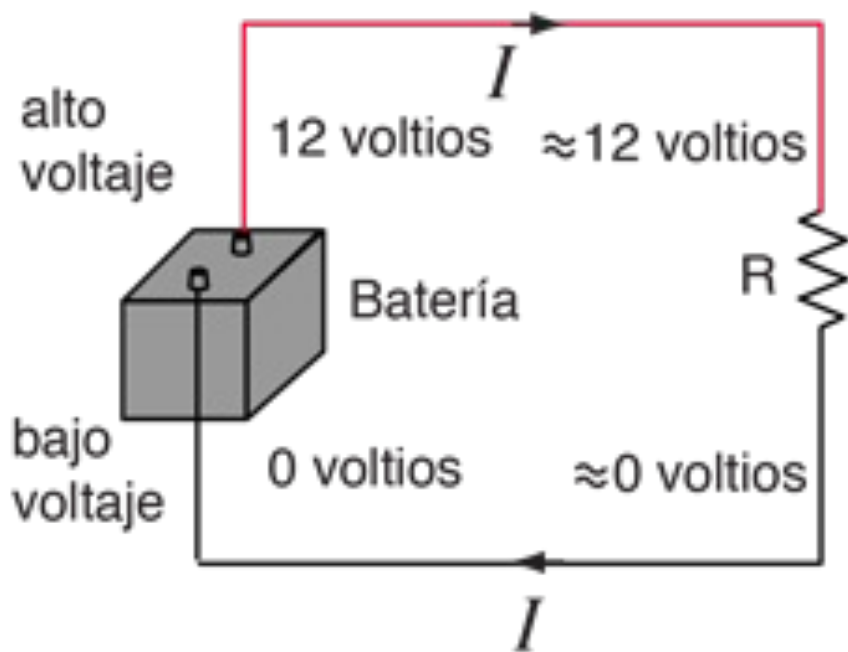
- Conservación de la carga
- Conservación de la energía

Ley de Kirchhoff de los voltajes



- El cambio neto de diferencia de potencial alrededor de cualquier bucle cerrado debe ser cero.
- Cualquier aumento de voltaje producido por la batería debe ser seguido por una caída de voltaje para traerlo de vuelta al voltaje original

Ley de Kirchhoff de los voltajes

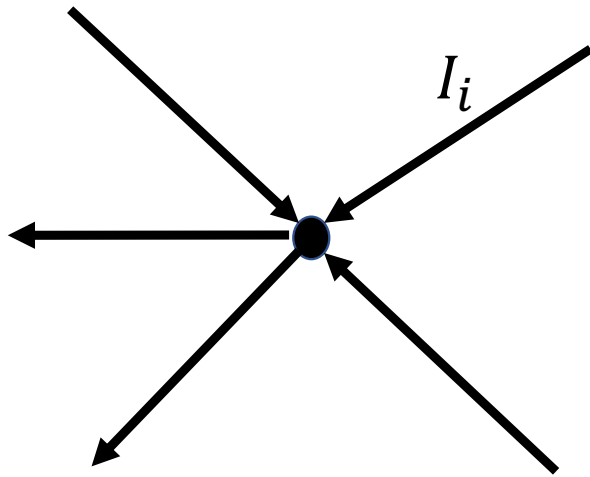


- La suma de variaciones de potencial en un lazo cerrado de un circuito es cero.

$$\sum_i V_i = 0$$

- Reglas y signos
 - Batería:
 - $V > 0$ al pasar del borne negativo al positivo.
 - $V < 0$ al pasar del borne positivo al negativo.
 - Resistencia
 - $V > 0$ al ir en contra de la corriente.
 - $V < 0$ al ir a favor de la corriente.

Ley de Kirchhoff de las corrientes



- En el circuito no se crea ni destruye carga

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

- En un nodo, la suma de todas las corrientes que llegan o salen de él debe ser igual a cero

$$\sum_i I_i = 0$$

- Equivalentemente, toda la corriente que llega, debe ser igual a la que sale

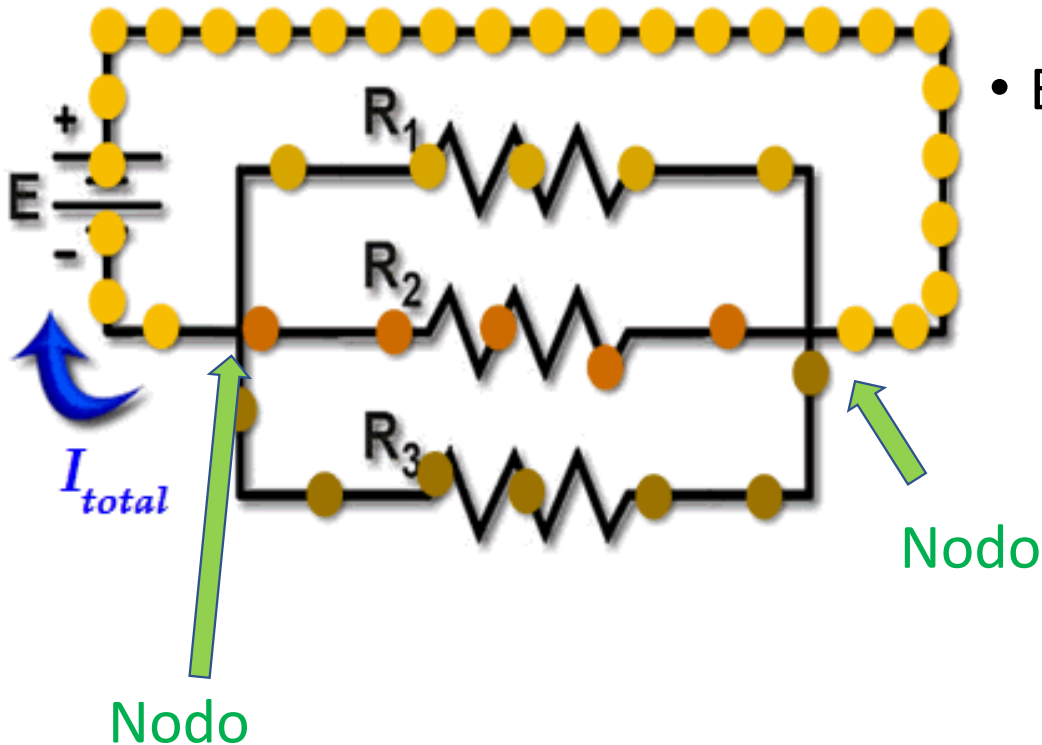
Ley de Kirchhoff de las corrientes

- En el ejemplo hay dos nodos
- En cada nodo se puede escribir:

$$I_{total} = I_1 + I_2 + I_3$$

o equivalentemente

$$I_{total} - I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



Resistencias en serie

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial

$$V = V_1 + V_2$$

- Donde

$$V_1 = IR_1$$

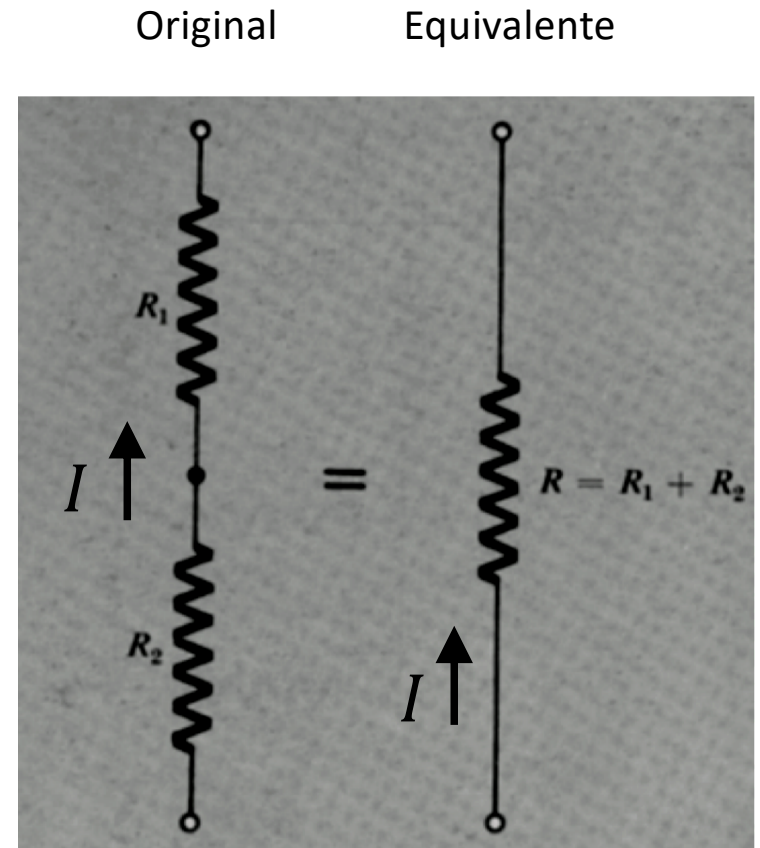
$$V_2 = IR_2$$

- Entonces

$$V = V_1 + V_2 = I(R_1 + R_2)$$

La caída de potencial equivale a la que ocurre a través de una resistencia

$$R = R_1 + R_2$$



$$R = R_1 + R_2$$

Resistencias en serie y paralelo

- Entre los bornes hay una diferencia de potencial V .

- Para cada rama tenemos

$$V = I_1 R_1 \quad V = I_2 R_2$$

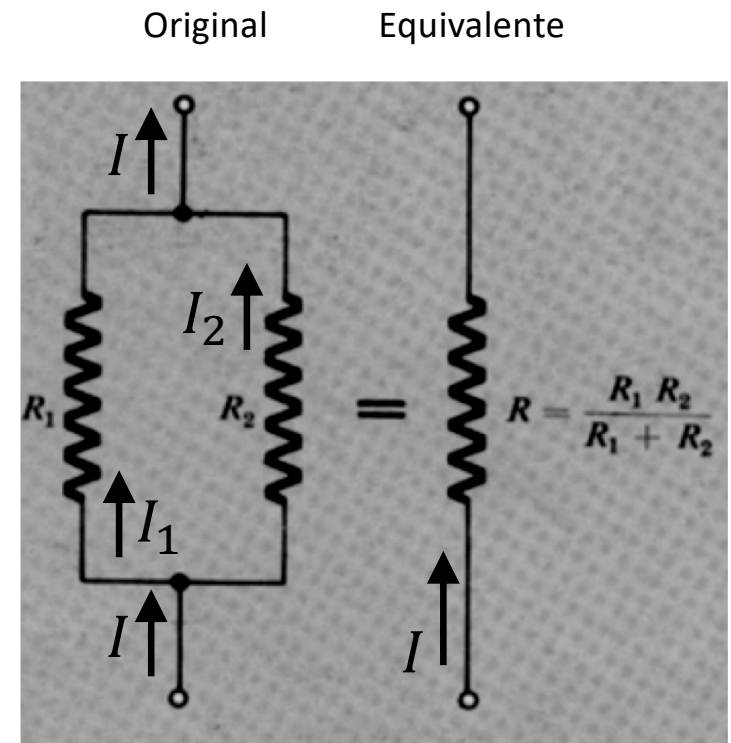
- Por conservación de la carga

$$I = I_1 + I_2$$

- Entonces

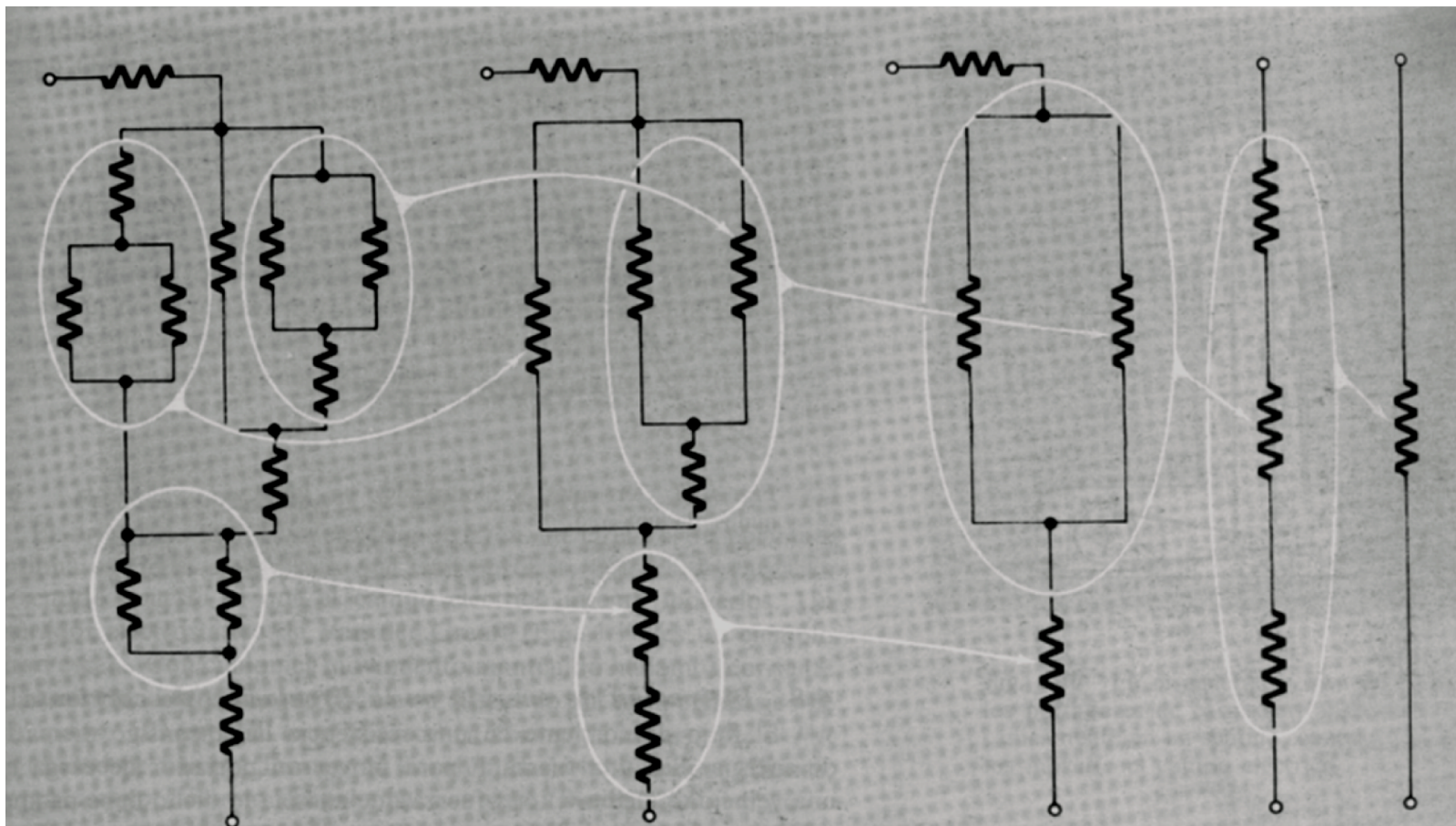
$$\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] = I$$

$$\frac{V}{R} = I$$



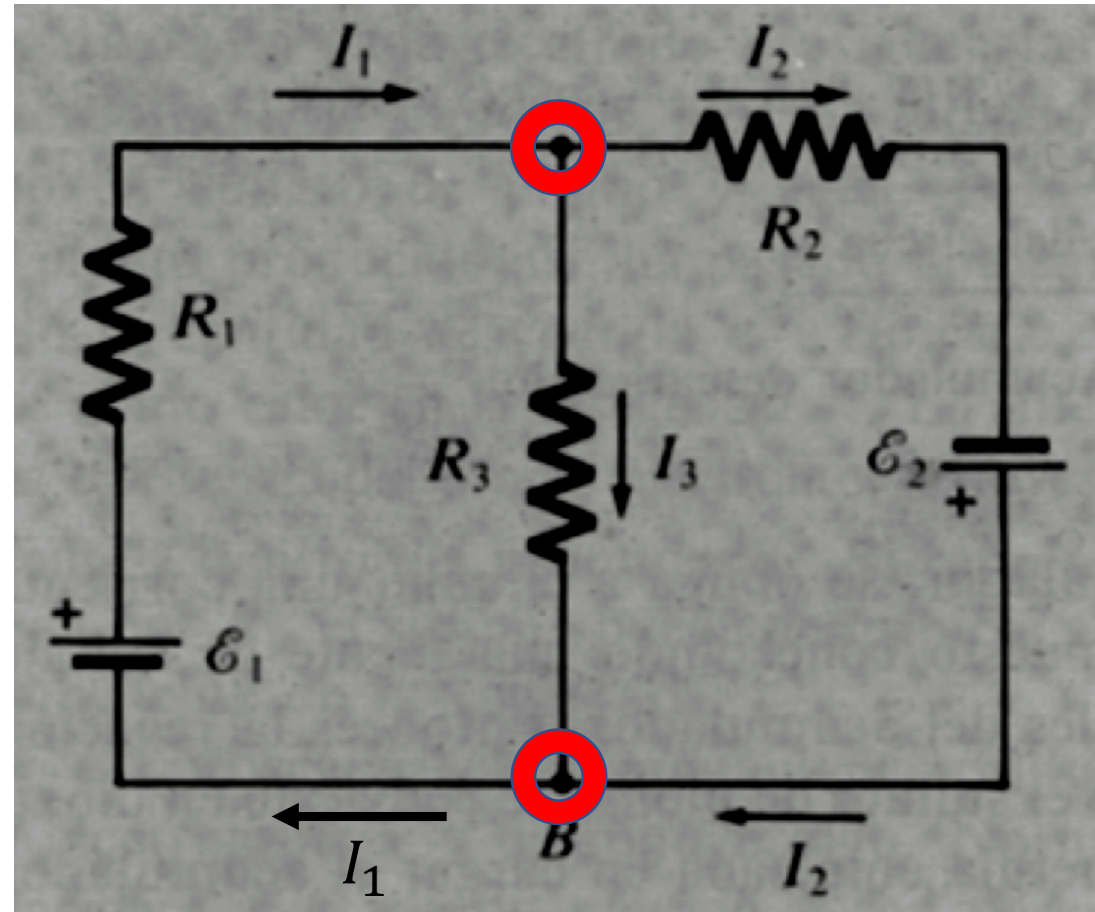
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Reducción de una red de resistencias



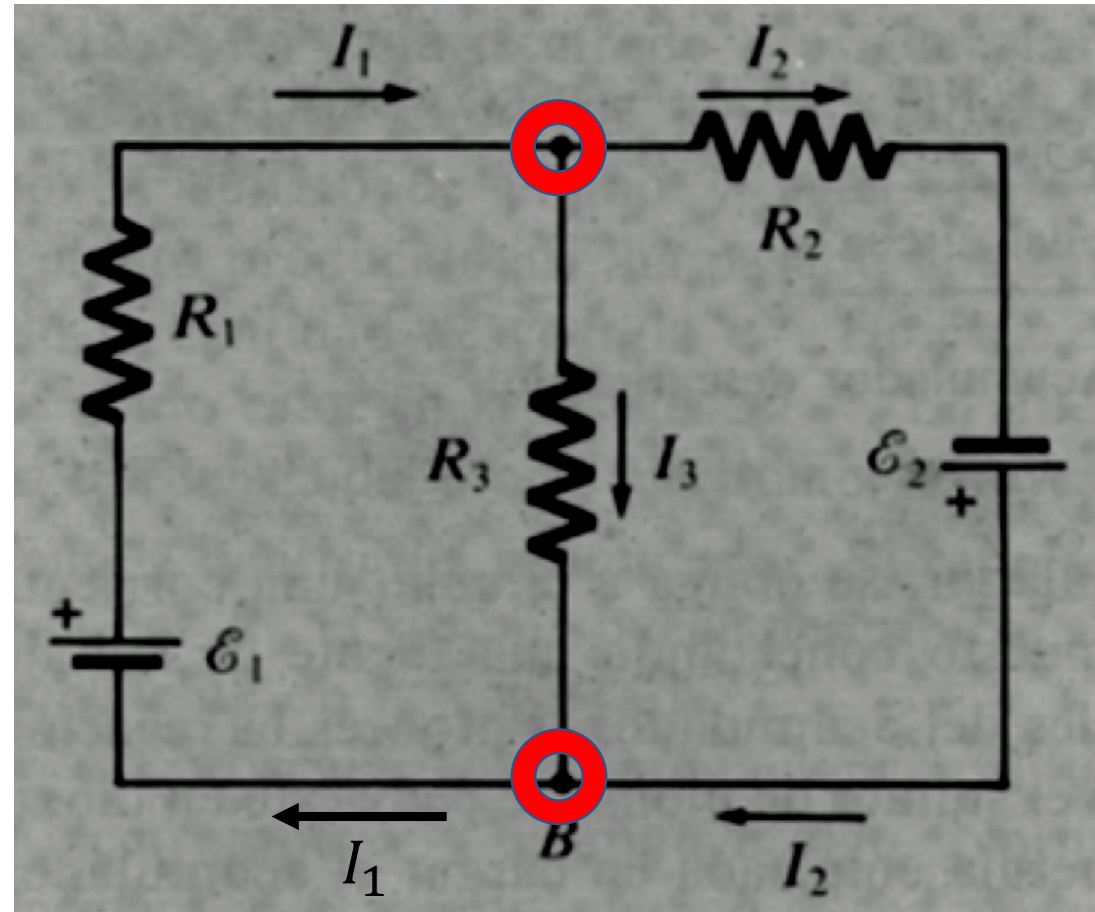
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Datos: las FEM $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ y las resistencias R_1 , R_2 y R_3 .



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

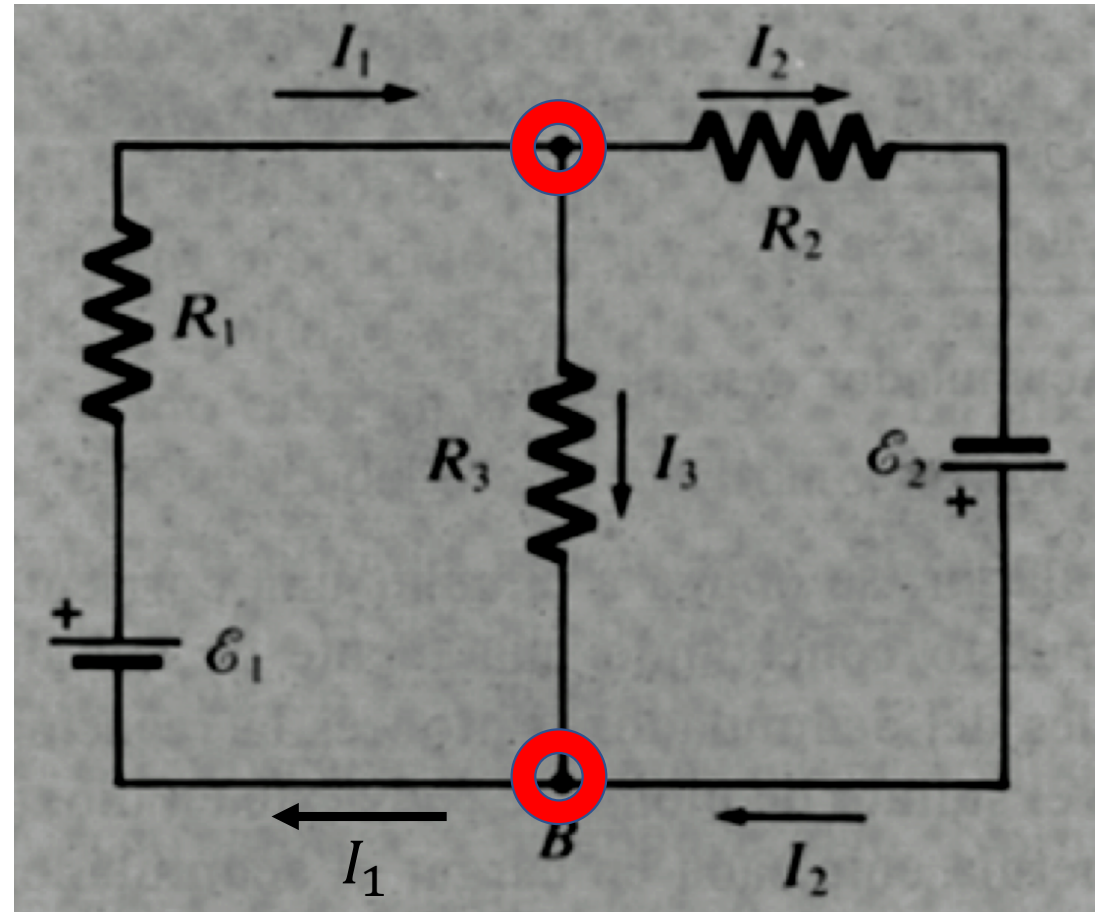
- Datos: las FEM $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ y las resistencias R_1 , R_2 y R_3 .
- En cada nodo de corriente, planteamos la ley de Kirchhoff para las corrientes



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

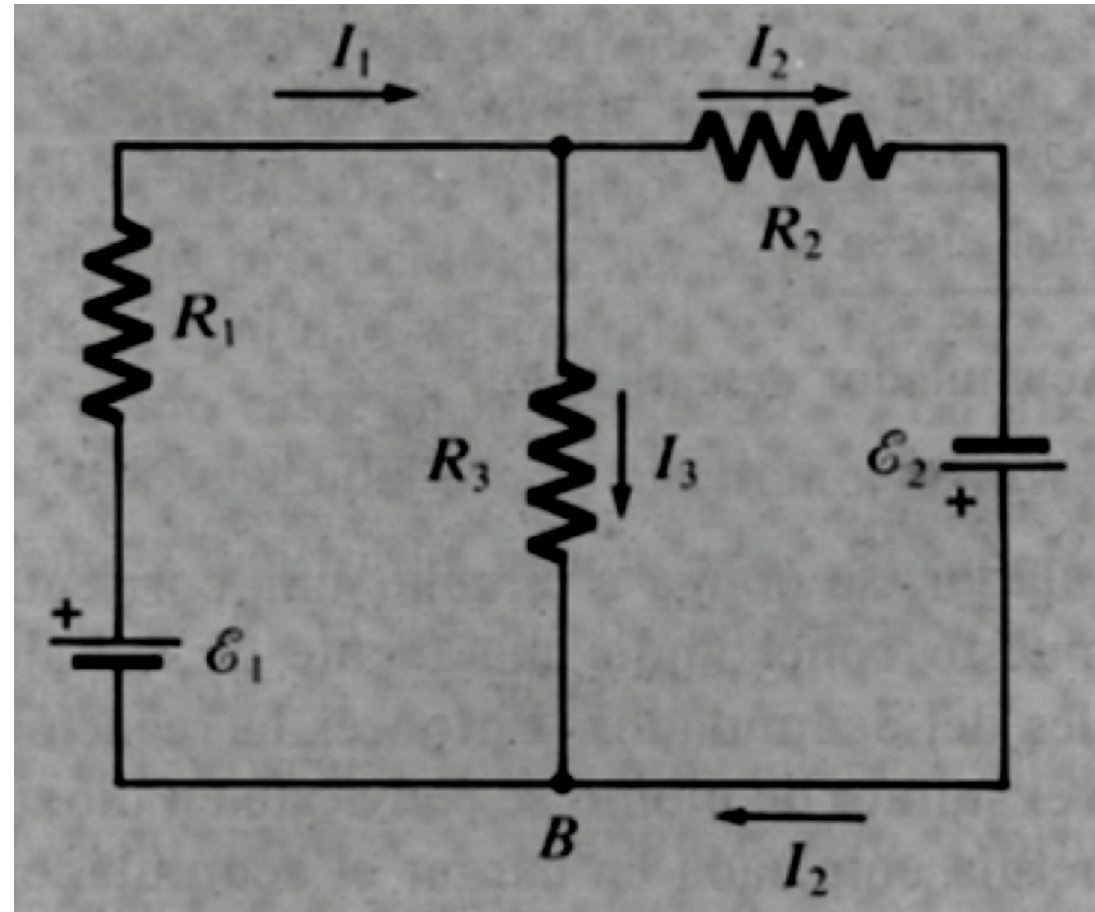
- Datos: las FEM $\mathcal{E}_1$ y $\mathcal{E}_2$ y las resistencias R_1 , R_2 y R_3 .
- En cada nodo de corriente, planteamos la ley de Kirchhoff para las corrientes

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$



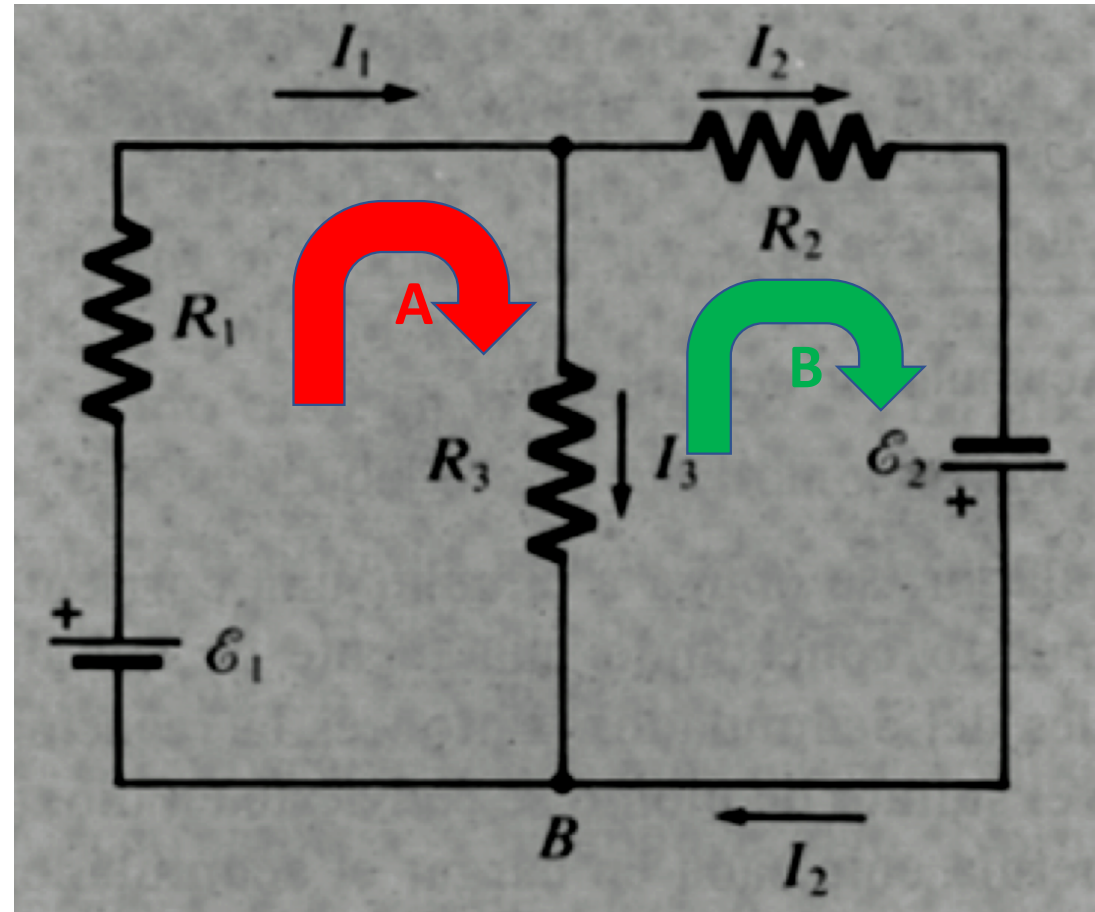
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Para calcular las corrientes, aplicamos la ley de Kirchhoff de los voltajes a dos lazos del circuito.



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Para calcular las corrientes, aplicamos la ley de Kirchhoff de los voltajes a dos lazos del circuito.
- Elegimos los lazos A y B, recorriéndolos en dirección de las flechas



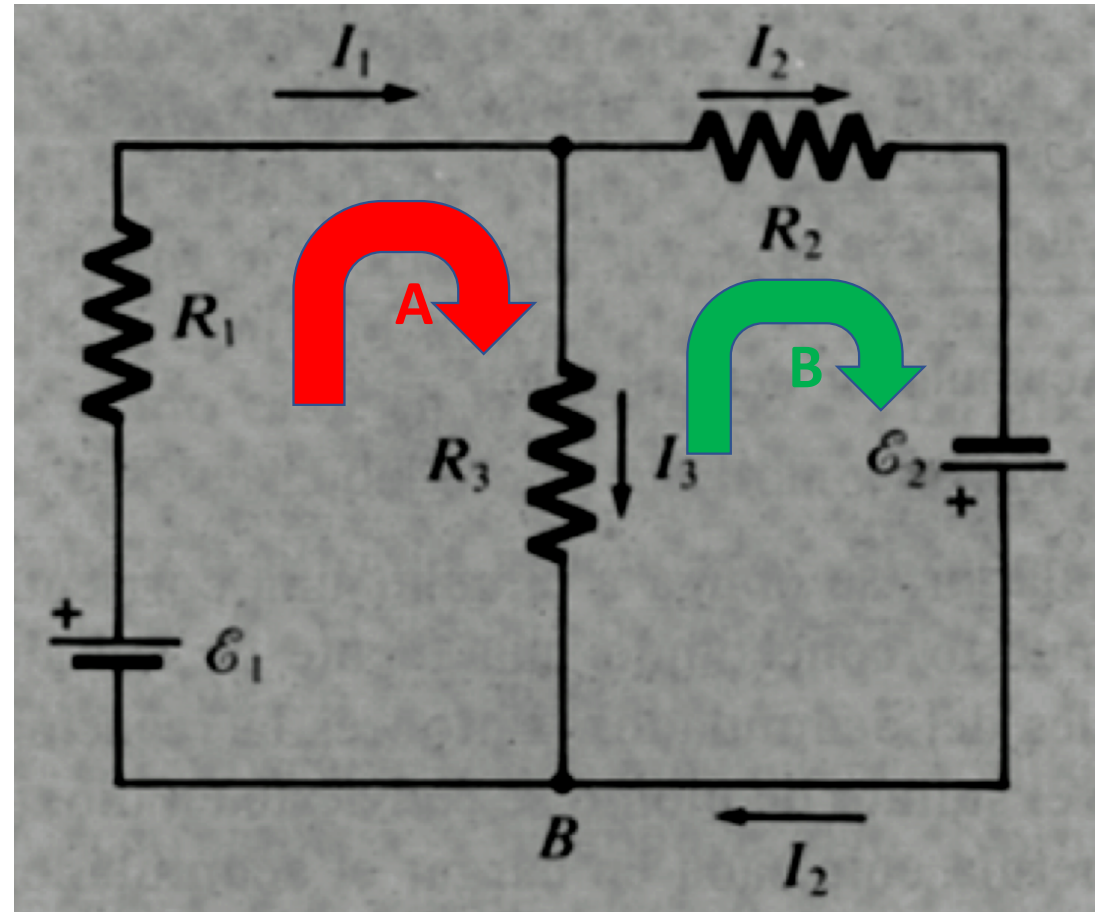
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Lazo A:

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

- Lazo B:

$$\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



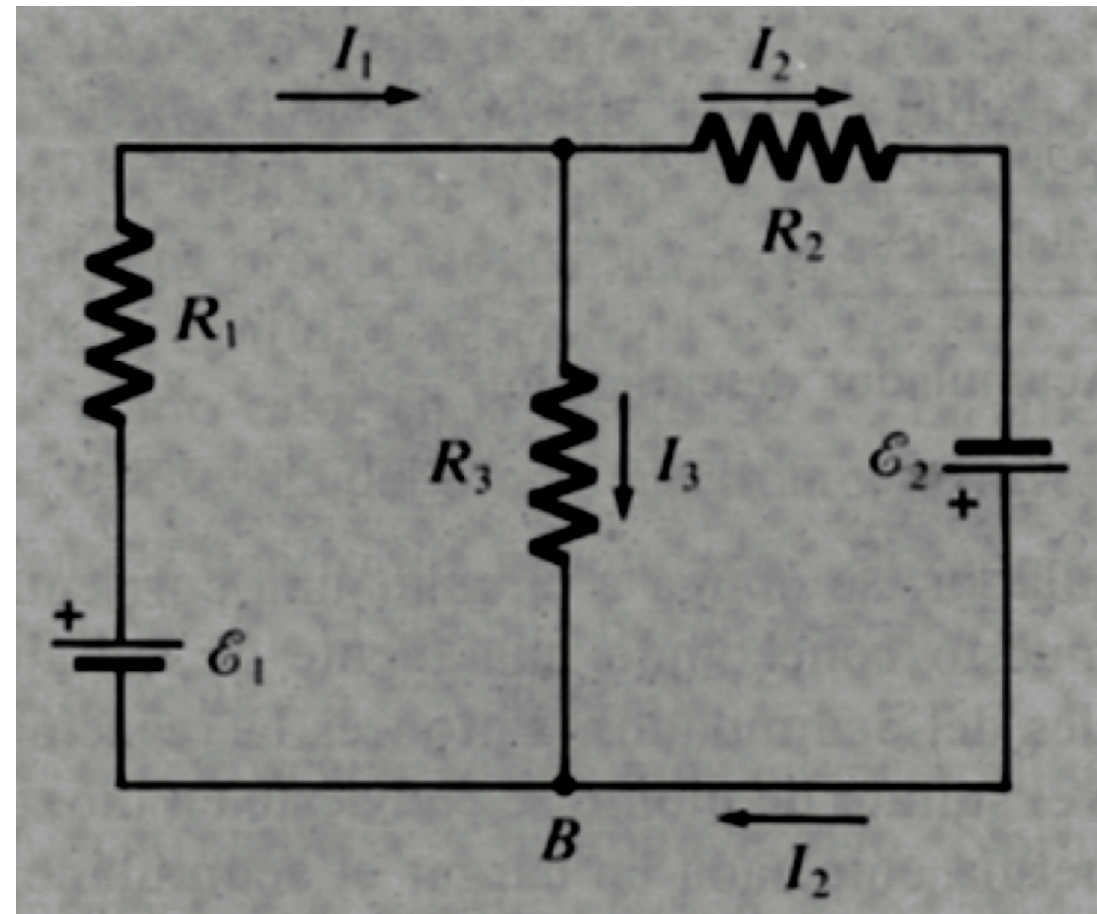
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$\mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



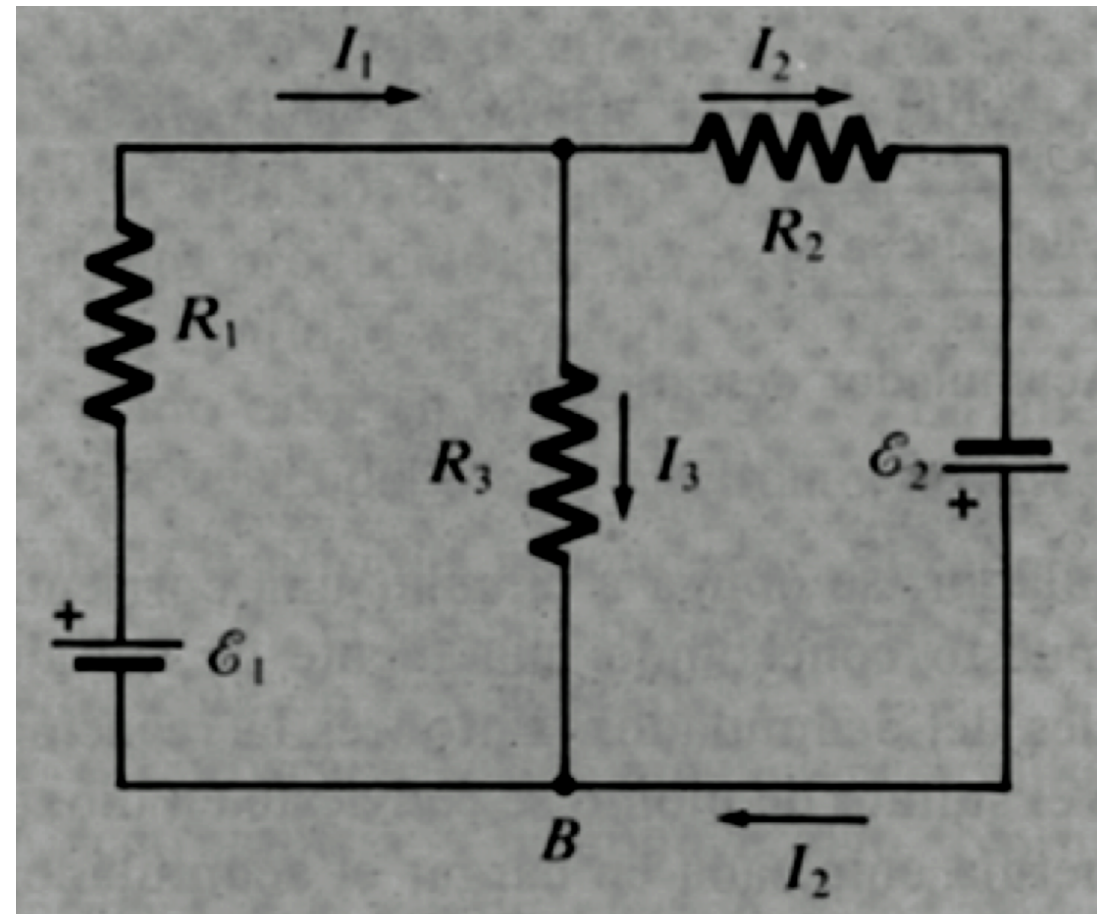
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Tenemos tres ecuaciones con tres incógnitas

$$(1) \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$(2) \quad \mathcal{E}_1 - R_1 I_1 - R_3 I_3 = 0$$

$$(3) \quad \mathcal{E}_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2 = 0$$



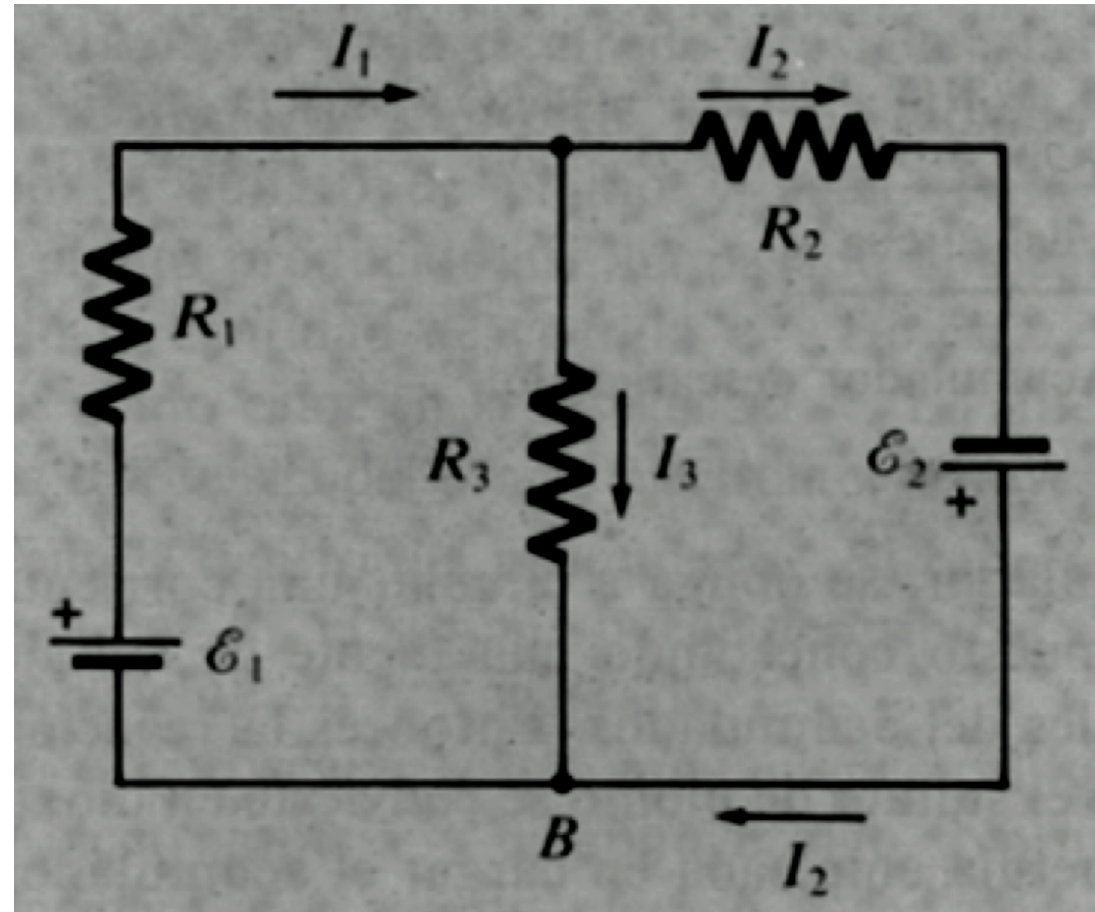
Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

- Reemplazando I_1 de (1) en (2) tenemos:

$$\varepsilon_1 - R_1 I_2 - R_1 I_3 - R_3 I_3 = 0$$

$$\varepsilon_1 - R_1 I_2 - (R_1 + R_3) I_3 = 0$$

$$(2') \quad I_2 = \frac{\varepsilon_1 - (R_1 + R_3) I_3}{R_1}$$



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

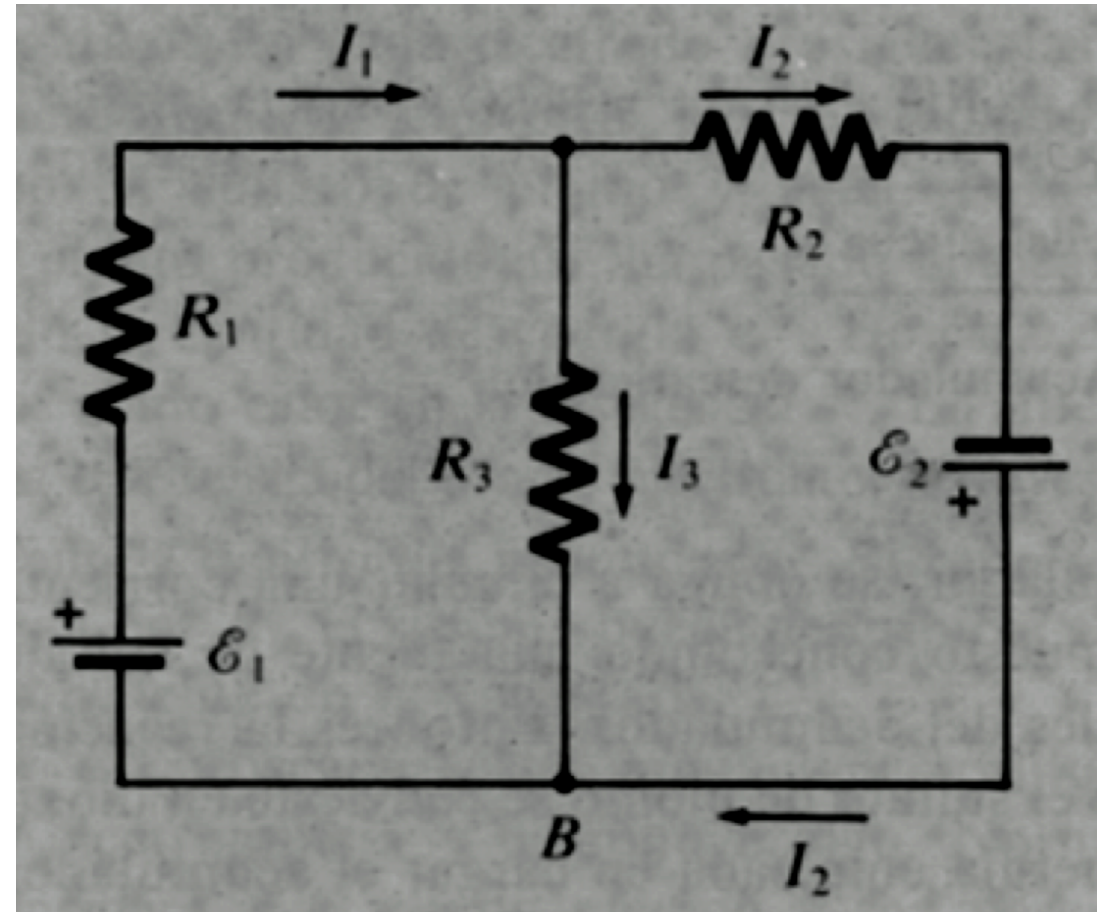
- Reemplazando I_2 de (2') en (3) tenemos:

$$\varepsilon_2 + R_3 I_3 - R_2 \frac{\varepsilon_1 - (R_1 + R_3) I_3}{R_1} = 0$$

$$R_1 \varepsilon_2 + R_1 R_3 I_3 - R_2 \varepsilon_1 + R_2 (R_1 + R_3) I_3 = 0$$

$$I_3 (R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3) = R_2 \varepsilon_1 - R_1 \varepsilon_2$$

$$I_3 = \frac{R_2 \varepsilon_1 - R_1 \varepsilon_2}{R_1 R_3 + R_2 R_1 + R_2 R_3}$$



Leyes de Kirchhoff: Aplicación en circuito con dos lazos

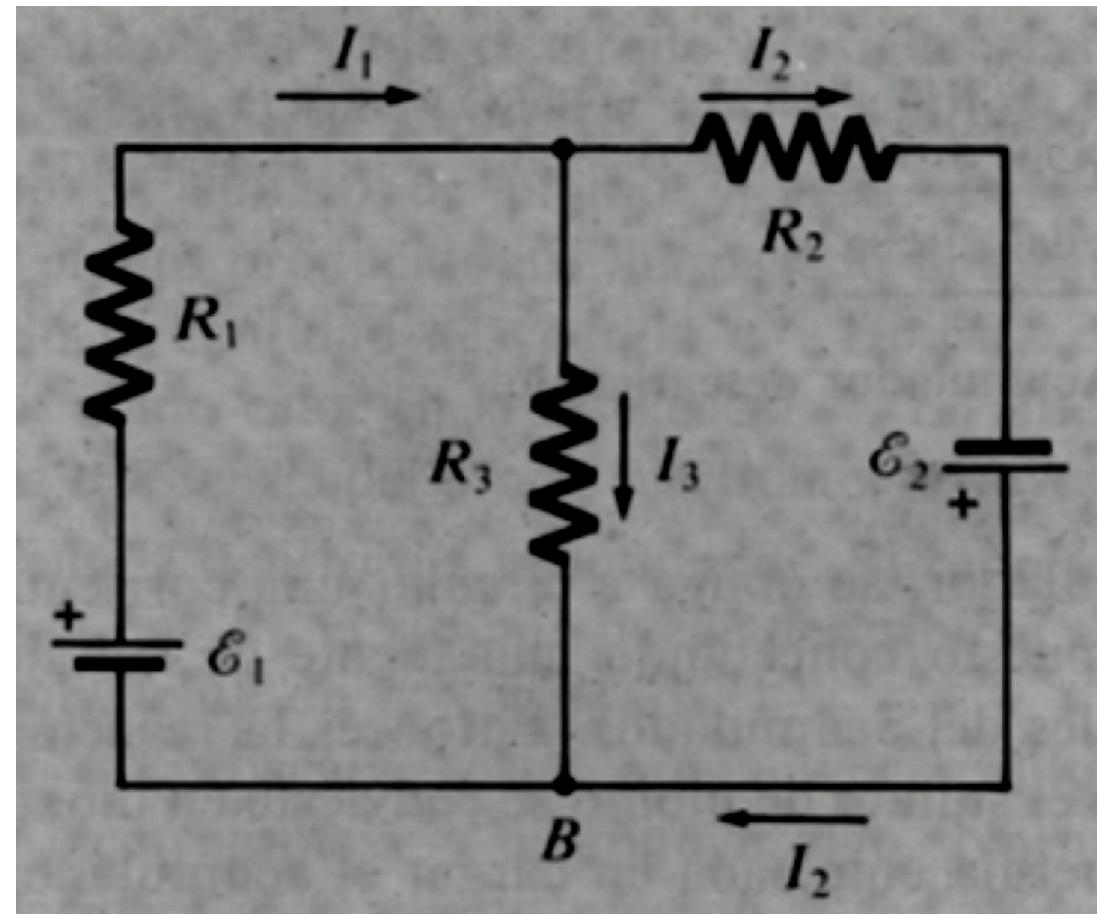
Las otras soluciones son:

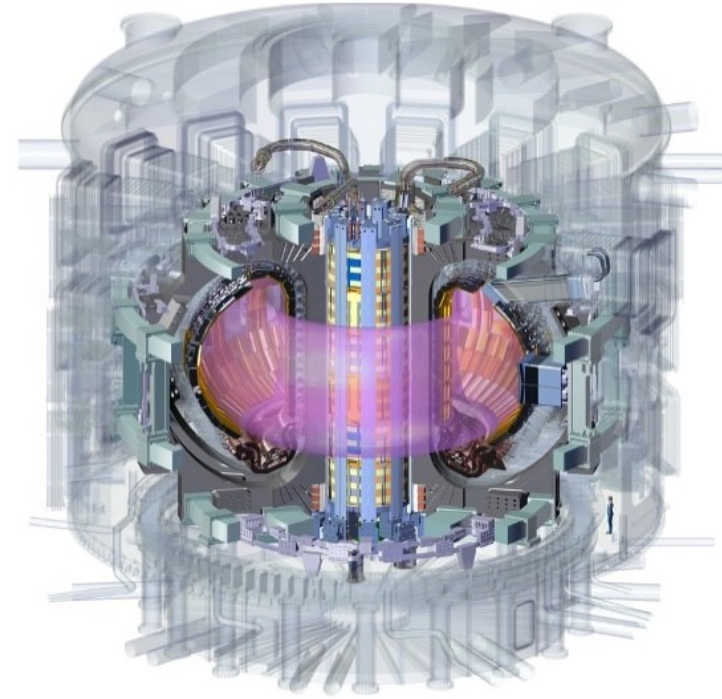
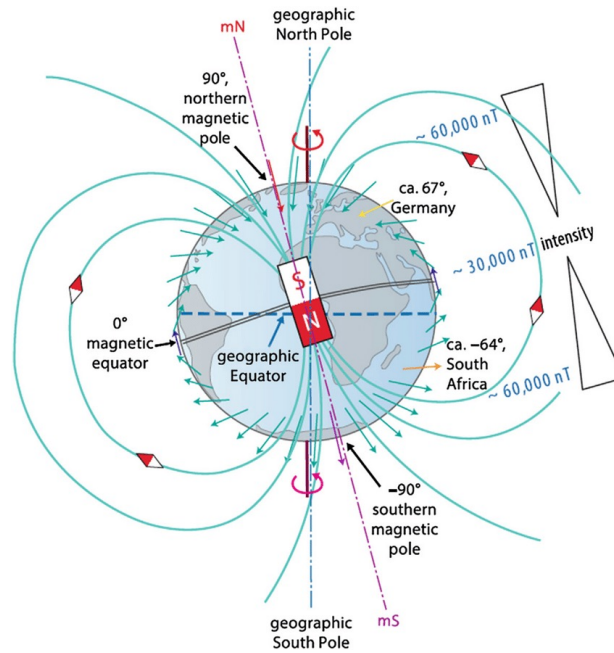
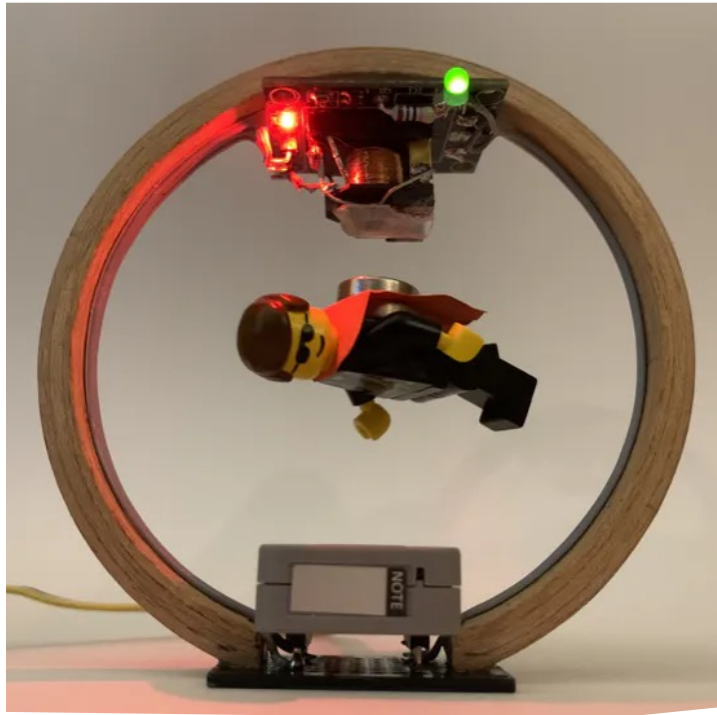
$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 + \mathcal{E}_1 R_3 + \mathcal{E}_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_2 R_3 + \mathcal{E}_1 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

$$I_3 = \frac{\mathcal{E}_1 R_2 - \mathcal{E}_2 R_1}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

I_3 puede cambiar de dirección dependiendo de la relación entre las FEM, no así I_1 e I_2





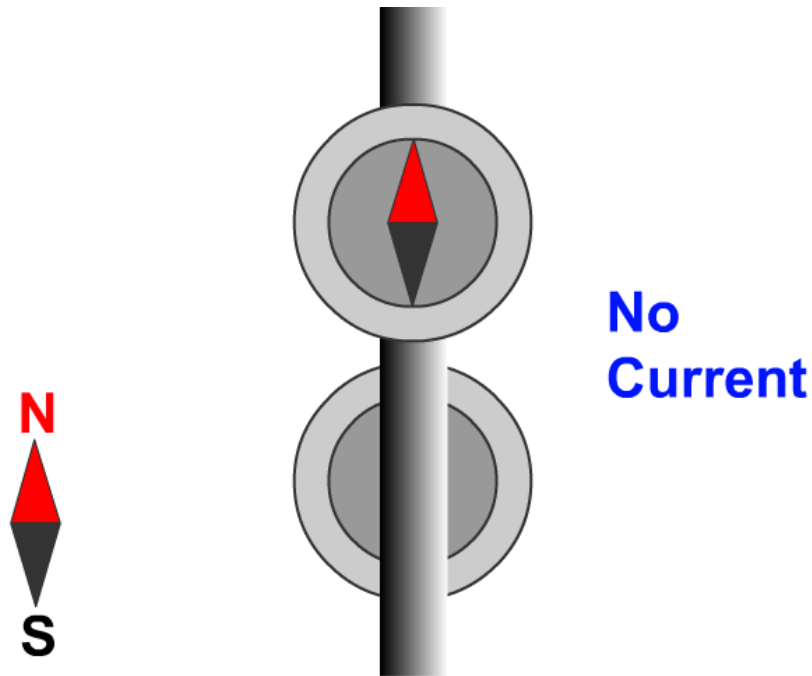
Magnetismo

Breve historia del magnetismo

- Desde 600 AC: registros sobre existencia de imanes (magnetita). El prefijo Magneto viene del griego y hace referencia a piedras provenientes de la región de Magnesia en Tesalia.
- William Gilbert (1540-1643) realiza experimentos sistemáticos con imanes. Descubre magnetismo terrestre.
- Los chinos inventaron la brújula en el siglo I y llegó a Europa en el siglo XII como instrumento de navegación, especialmente de día.

El campo magnético

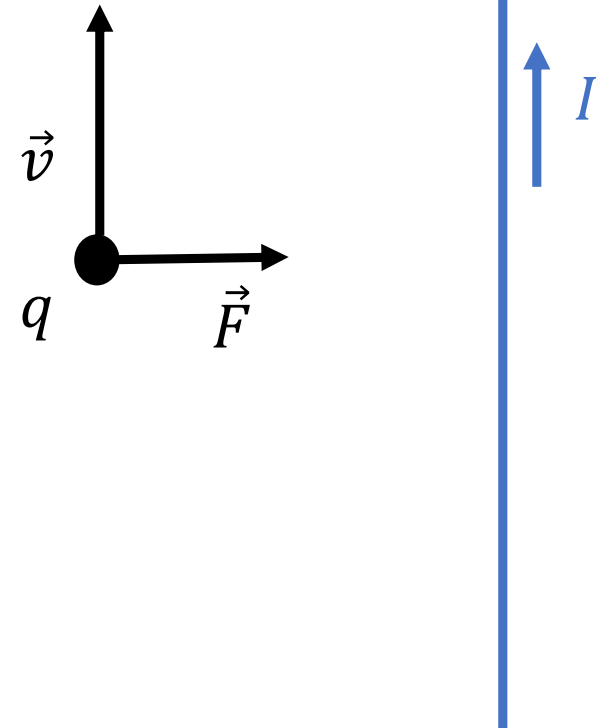
- En 1819, Hans Christian Oersted muestra que una corriente estacionaria desvía una brújula. Establece relación entre corriente y magnetismo.



Hans Christian Oersted

Fuerza de Lorentz y Campo magnético

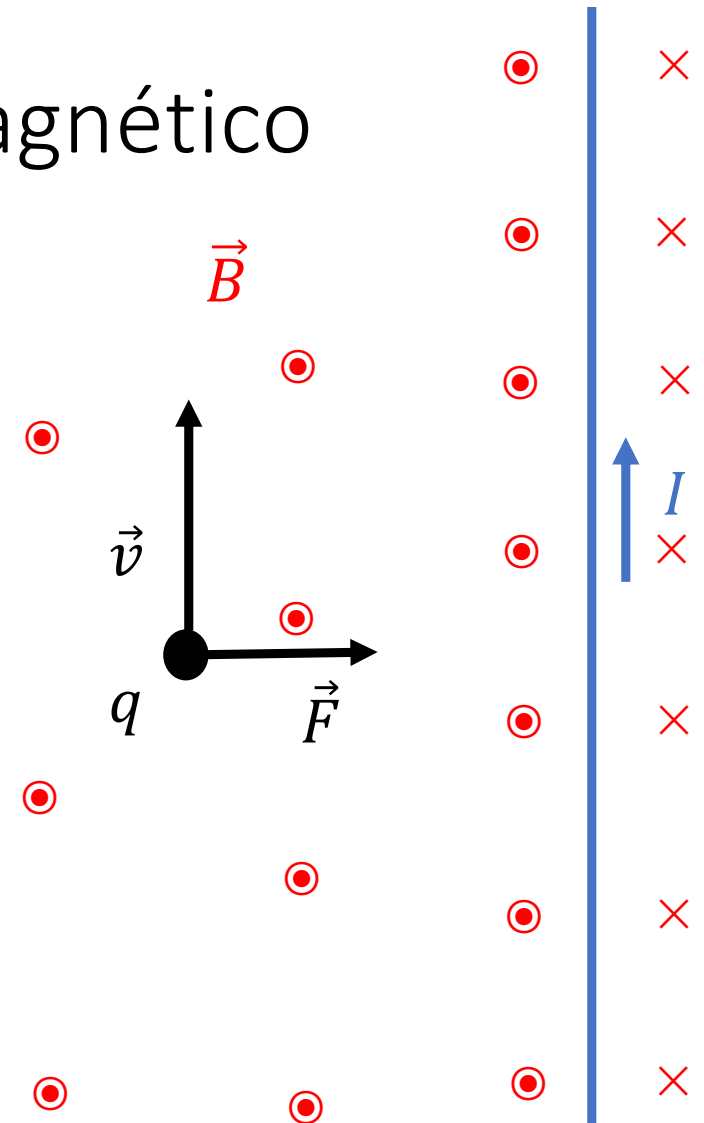
- Experimentalmente se observa que una carga que se mueve paralelamente a una corriente I experimenta una fuerza $\vec{F}$ perpendicular a su velocidad $\vec{v}$.
- Esta fuerza se conoció con el nombre de fuerza magnética.
- El módulo de esa fuerza $\vec{F}$ resulta ser proporcional a la cantidad de carga q , y el módulo de la velocidad $|\vec{v}|$



Fuerza de Lorentz y Campo magnético

- En 1895, Hendrik Lorentz formalizó la expresión para la fuerza magnética a partir de un campo magnético $\vec{B}$
- El campo magnético $\vec{B}$ queda entonces definido a partir la expresión para la fuerza magnética $\vec{F}$ sobre una carga q con una velocidad $\vec{v}$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

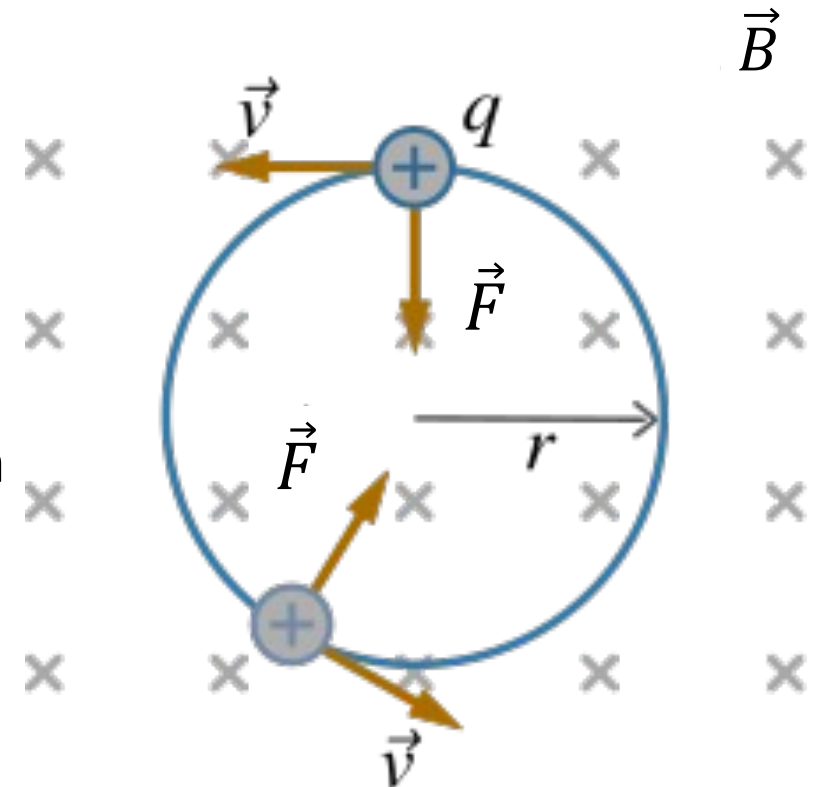


Movimiento de una carga en campo magnetico uniforme

- Supongamos un campo $\vec{B}$ uniforme
- La **ecuación de movimiento** de una carga q de masa m y velocidad $\vec{v} \perp \vec{B}$ es:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

- Es decir que la fuerza $\vec{F}$ y la **aceleración** son **siempre perpendiculares** a $\vec{v}$.
- Por lo tanto la carga describirá un **MCU** (la **energía cinética no cambia**).



MRU en polares

- Representando el vector posición como:

$$\vec{r} = r\hat{r}$$

- La velocidad se escribe como:

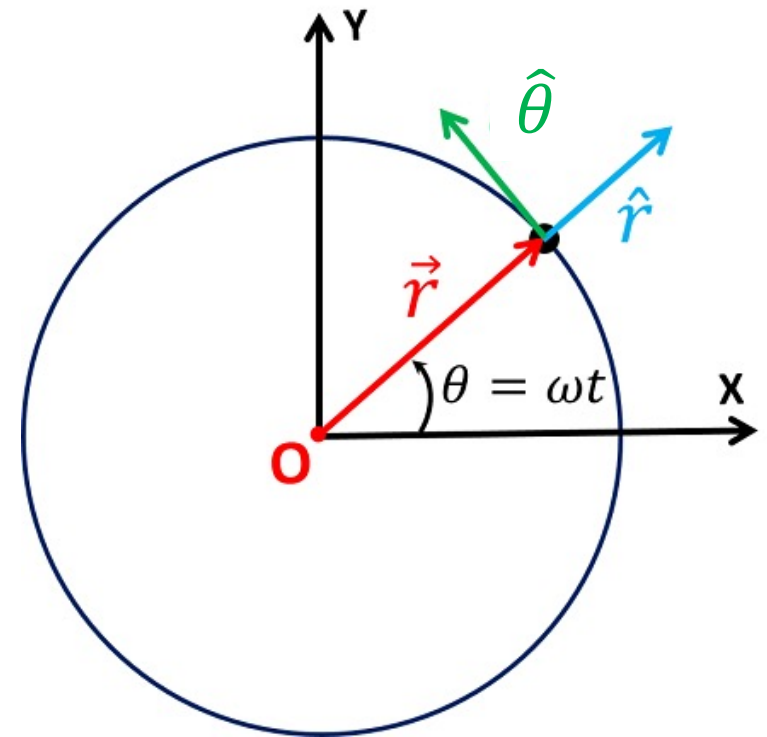
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{r} + r\frac{d\hat{r}}{dt}$$

- Cambiando la notación por 'punto' tenemos:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\hat{r}}$$

- Y como $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$



MRU en polares

- La velocidad se escribe como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} [\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}]$$

- Derivando tenemos:

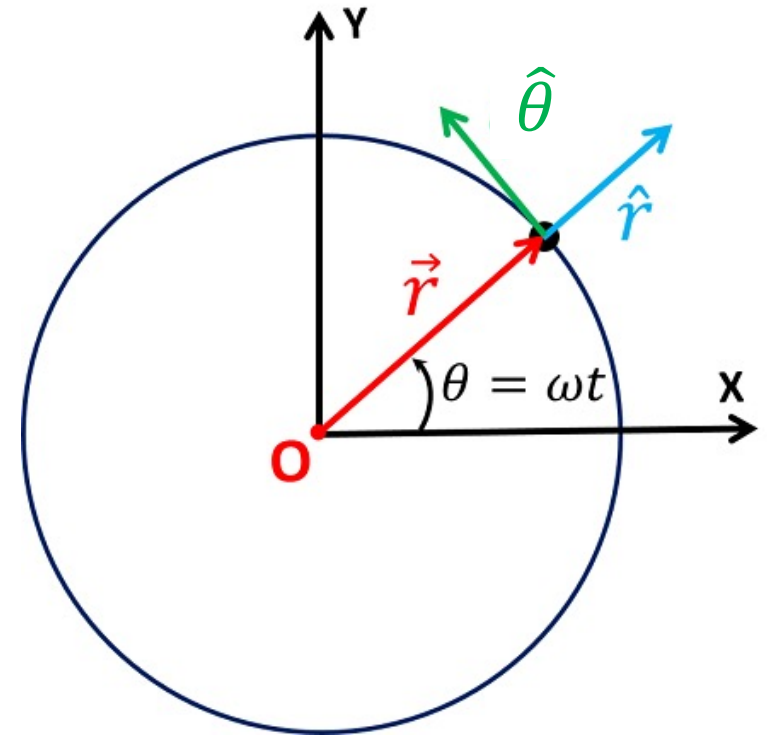
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}$$

- Y como $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ y $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$ tenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

Aceleración radial Aceleración tangencial



MRU en polares

- La aceleración se escribe como:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} [\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}]$$

- Derivando tenemos:

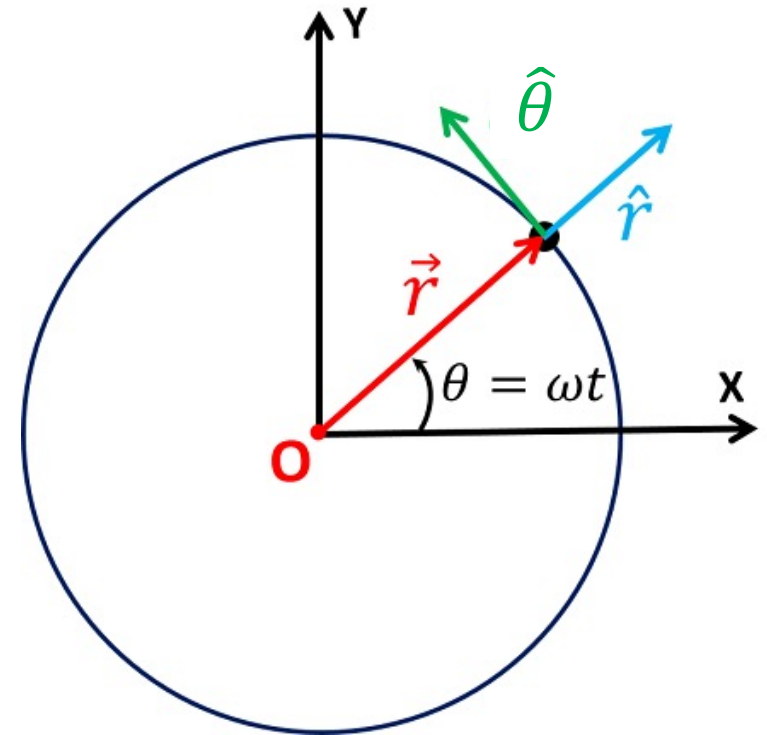
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + \dot{r}\dot{\hat{r}} + \dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} + r\dot{\theta}\dot{\hat{\theta}}$$

- Y como $\dot{\hat{r}} = \dot{\theta}\hat{\theta}$ y $\dot{\hat{\theta}} = -\dot{\theta}\hat{r}$ tenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{r}\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{\theta} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\hat{r}$$

$$\ddot{\vec{r}} = a_r\hat{r} + a_\theta\hat{\theta} = (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{\theta}$$

 
Aceleración radial Aceleración tangencial



Movimiento de una carga en campo magnetico uniforme

- En un MCU tenemos que la única aceleración es normal a la trayectoria. En coordenadas polares

$$ma_r = mr_g \dot{\theta}^2 = qvB$$

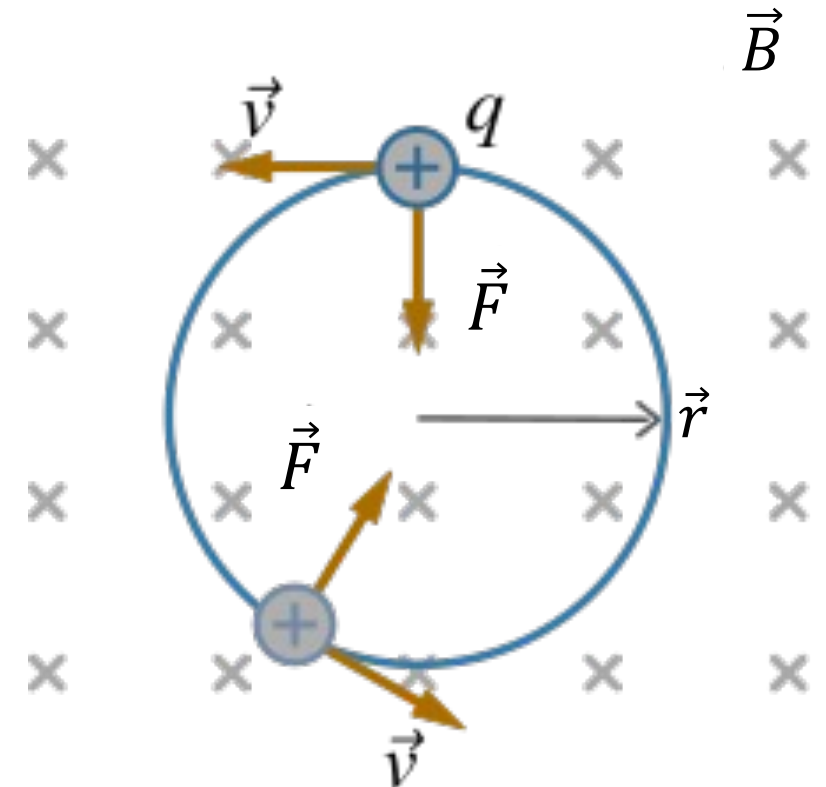
Donde r_g es el radio de la trayectoria circular y se denomina 'giro-radio':

- Teniendo en cuenta que $r_g \dot{\theta} = v$ tenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{qB}{m}$$

- De aquí sacamos el **período ciclotrón** τ :

$$\tau = \frac{2\pi m}{qB}$$

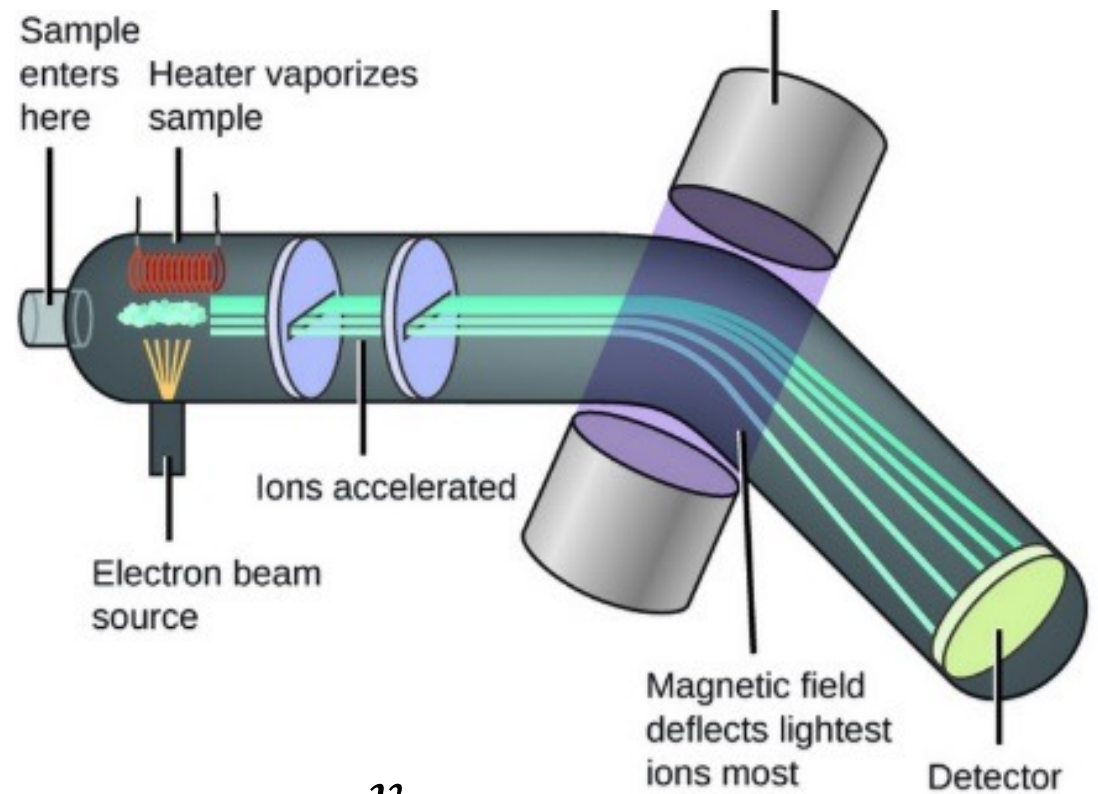


Preguntas

- Obtener el valor de r_g en función de v, q, m, B
- ¿Qué ocurre si $\vec{v}$ no es perpendicular a $\vec{B}$?

Aplicaciones:
Espectrómetro
de masa

(separa iones
de acuerdo a
su masa)

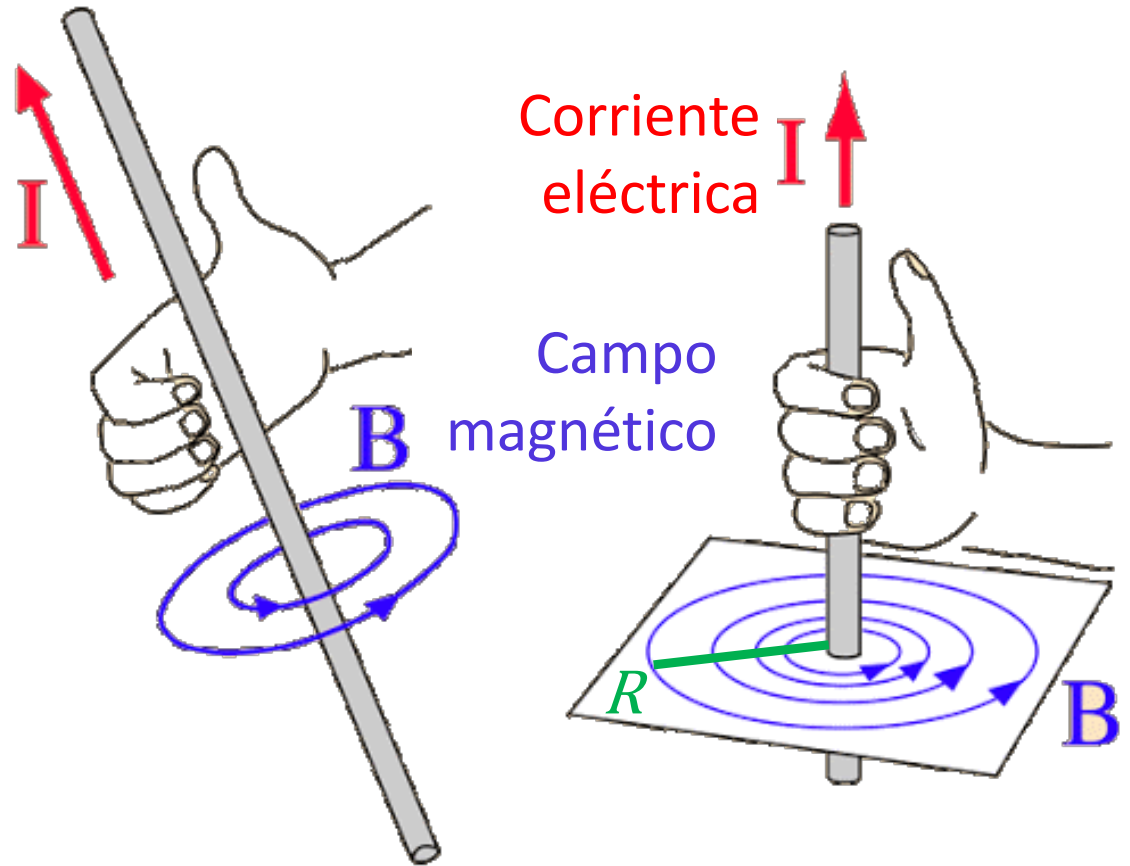


$$r_g = \frac{v_{\text{perp}}}{|q|B} m$$

Campo magnético de un hilo recto de corriente

- **Experimentalmente**, se sabe que el campo magnético de un hilo recto de corriente I genera un campo en el sentido de las líneas azules.
- También **experimentalmente** se obtiene que B es proporcional a la corriente I e inversamente proporcional a la distancia al hilo R .

$$B \propto \frac{I}{R}$$



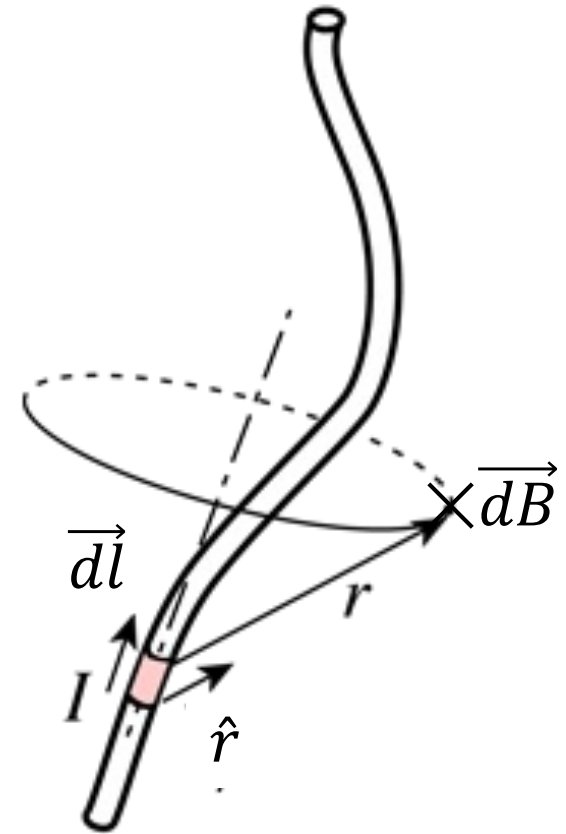
Monopolos eléctricos y magnéticos

- El campo eléctrico de un hilo de carga decae como $E \propto \frac{1}{R}$ ya que sumabamos monopolos eléctricos cuyos campos decaían como $\frac{1}{R^2}$.
- Hasta ahora, no hay evidencia de la existencia de monopolos magnéticos, pero si existieran, el campo magnético generado por uno de ellos vararía como $\frac{1}{R^2}$.
- Sin embargo, este pensamiento indica que si dividiéramos el hilo de corriente en tramos infinitesimales, el campo magnético generado por cada uno de ellos debería variar como $\frac{1}{R^2}$.

Ley de Biot-Savart

- Biot y Savart plantearon un formalismo para obtener el campo a partir de contribuciones de elementos de corriente $I\vec{dl}$.
- El diferencial de campo magnético $\vec{dB}$ a partir de un elemento de corriente $I\vec{dl}$ en el punto $\vec{r} = r\hat{r}$ se puede escribir como:

$$\vec{dB} = \frac{C}{r^2} I\vec{dl} \times \hat{r}$$



Ley de Biot-Savart

- Mediante experimentos se comprueba que en el sistema SI.

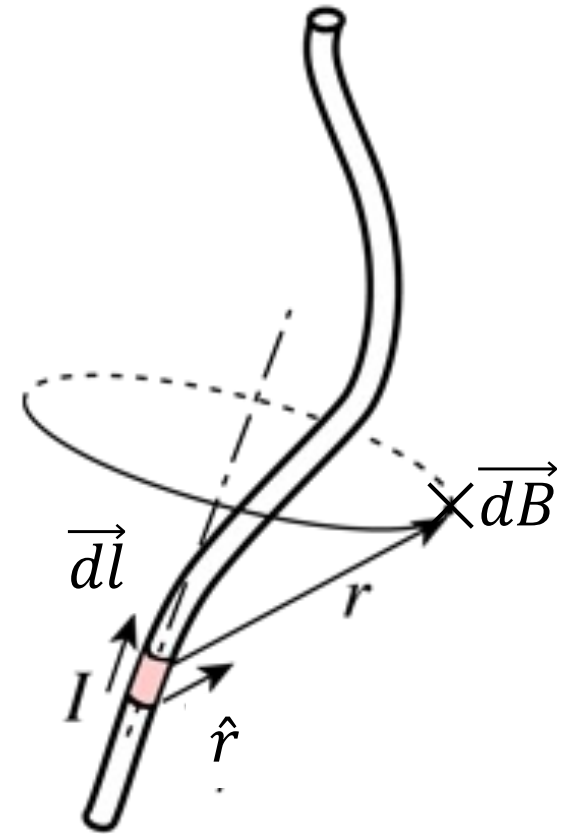
$$C = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$$

- Entonces, por similitud con la electrostática se define la permeabilidad magnética del vacío μ_0 tal que:

$$C = \frac{\mu_0}{4\pi}$$

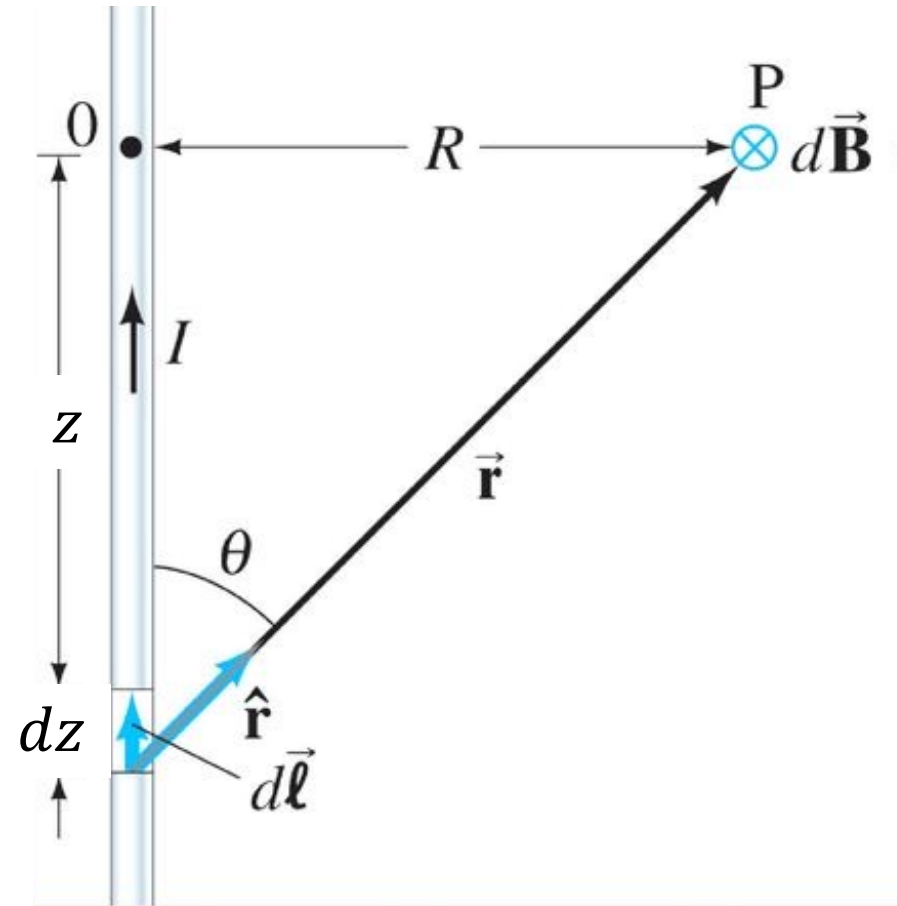
- Entonces

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} = 1,25 \cdot 10^{-6} \frac{N}{A^2}$$



Campo magnético de un hilo infinito

- Consideremos una corriente I a lo largo de un hilo paralelo al eje z .
- El elemento de corriente es
$$I d\vec{\ell} = I dz \hat{z}$$
- Desde el elemento de corriente, el punto P donde evaluo $d\vec{B}$ se indica con el vector $\vec{r} = r\hat{r}$ que forma un ángulo θ con el eje z .
- R es la distancia desde el eje a P .

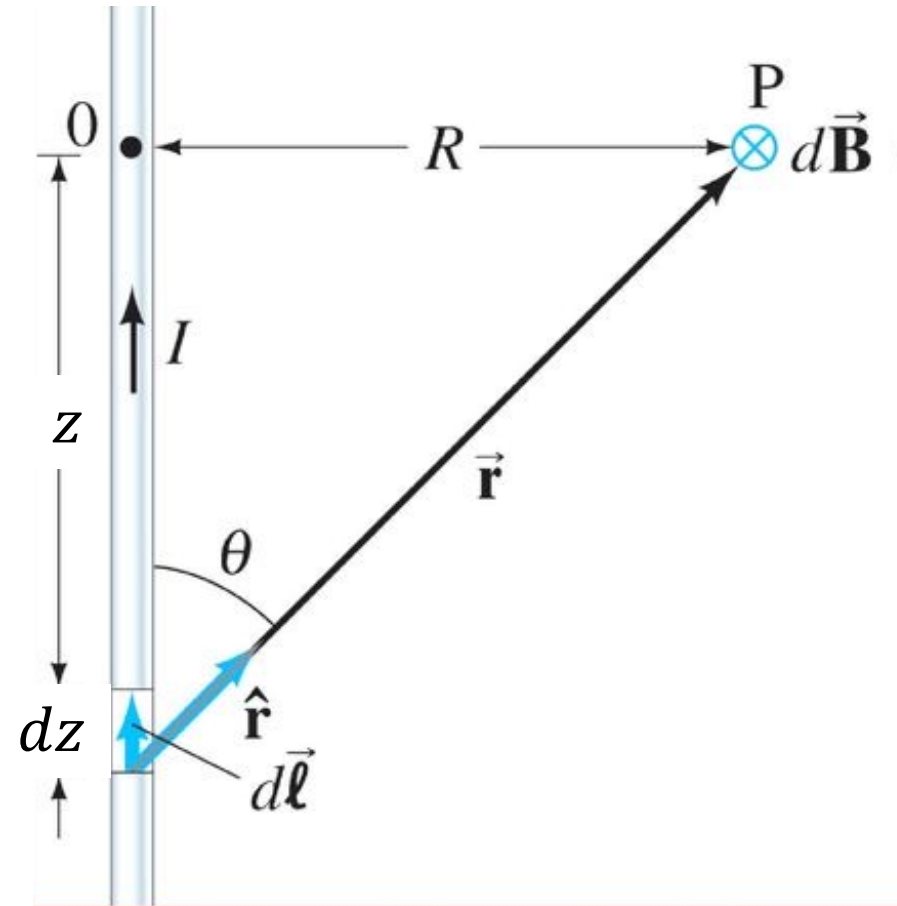


Campo magnético de un hilo infinito

- Por la ley de la mano derecha $d\vec{B}$ se dirige hacia adentro de la pantalla ($\hat{\phi}$ en coordenadas cilíndricas). Integrando a lo largo del hilo tengo $\vec{B}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Idz \sin \theta}{r^2} \hat{\phi}$$

- Donde $r^2 = \frac{R^2}{(\sin \theta)^2}$ y $-z = \frac{R}{\tan \theta}$



Campo magnético de un hilo infinito

- Lo anterior indica que

$$dz = \frac{R}{(\sin \theta)^2} d\theta$$

- Poniendo todo en función de R y θ

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \theta}{R} d\theta \hat{\phi}$$

- Entonces

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}$$

