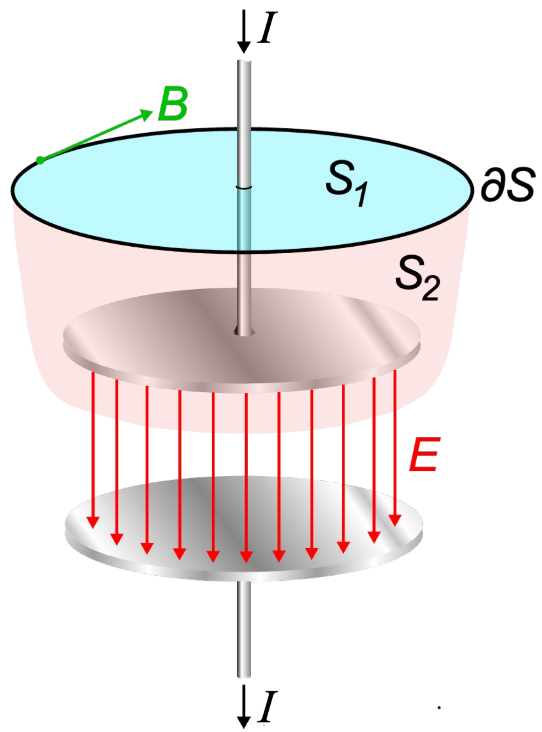
La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Conocemos bien la ley de Ampère
$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J}$$
- Supongamos un capacitor cargándose a una velocidad dada por
$$I = \frac{dQ}{dt}$$
- La corriente I da lugar a un campo magnético $\vec{B}$ tal que si la superficie S_1 está limitada por el camino ∂S:
$$\oint_{\partial S} \vec{B}\cdot\vec{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J}\cdot\vec{ds} = \mu_0 I$$

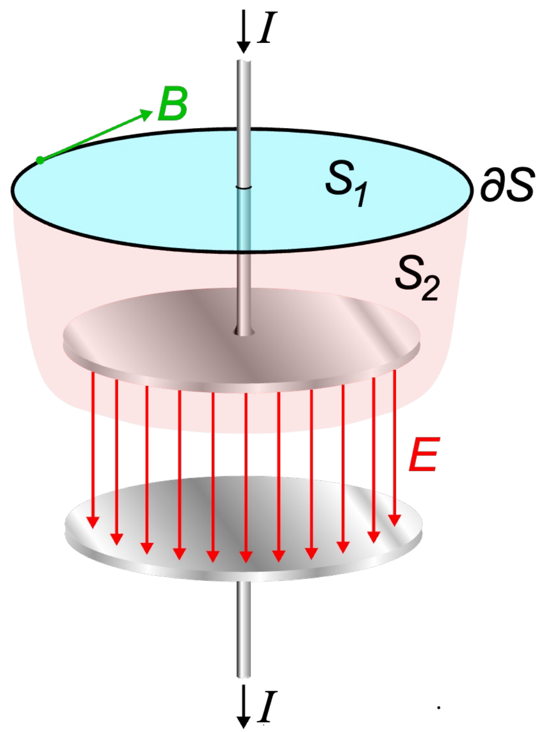


La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- El resultado debe valer para toda superficie limitada por ∂S incluyendo S_2 a través de la cual no pasa corriente !!

- Maxwell corrigió la ley de Ampère para salvar esta inconsistencia agregando un término dependiente del flujo de la derivada temporal del campo eléctrico $\vec{E}$:en el capacitor

$$\oint_{\partial S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{dl} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{j} \cdot \overrightarrow{ds} = \mu_0 I = \mu_0 \varepsilon_0 \iint_{S_2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \overrightarrow{ds}$$

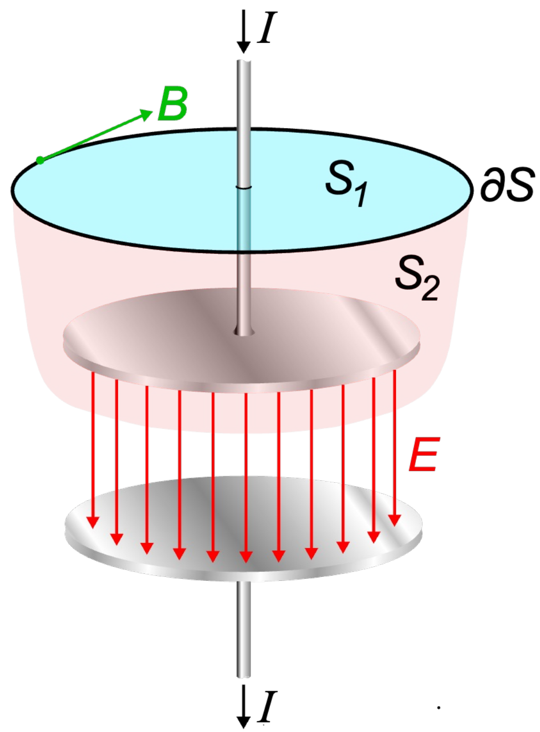


La corrección de Maxwell a la ley de Ampère

- Con lo cual la ley de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Como vemos el segundo término del segundo miembro sólo aparece en situaciones no estacionarias.



Circuito RLC en transitorio

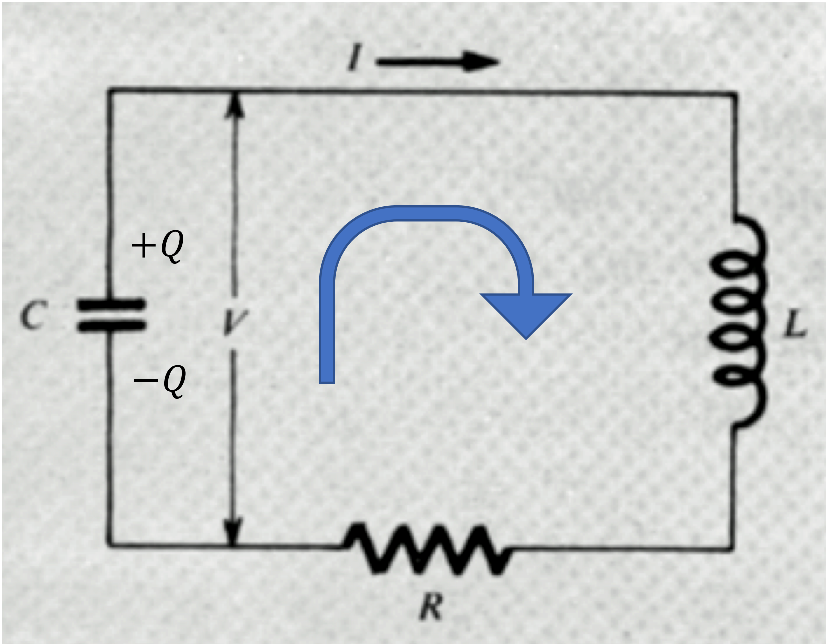
Circuito RLC en serie

- Supongamos el siguiente circuito con inductancia L, capacitor de capacidad C y resistencia R.
- Calculemos la diferencia de potencial V en el capacitor.
- Supogamos que el capacitor tiene una carga +Q en la placa superior y se descarga

$$I = -\frac{dQ}{dt} \qquad Q = CV$$

- Entonces Faraday en el sentido de I queda:

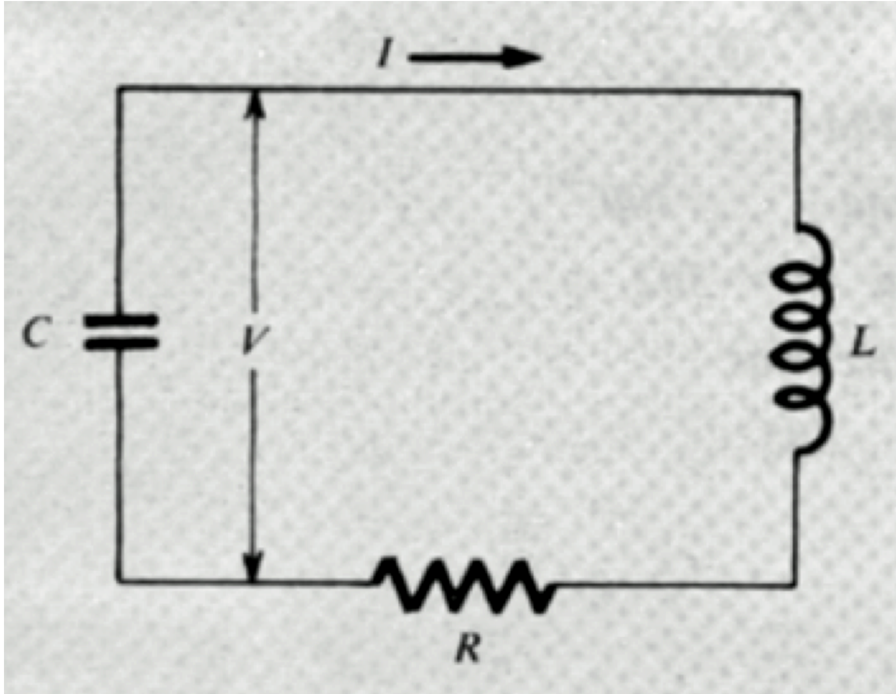
$$V = L\frac{dI}{dt} + RI$$



Circuito RLC en serie

- Poniendo todo en función de V llegamos a la siguiente ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes:

$$\frac{d^2V}{dt^2} + \left(\frac{R}{L}\right)\frac{dV}{dt} + \left(\frac{1}{LC}\right)V = 0$$



Ecuación diferencial homogénea de segundo orden a coeficientes constantes (a, b, c)

$$\boxed{a y'' + b y' + c y = 0.}$$

$$\boxed{a r^2 + b r + c = 0}$$

Polinomio característico

$$\boxed{y = C_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + C_2 e^{\lambda t} \sin \mu t.}$$

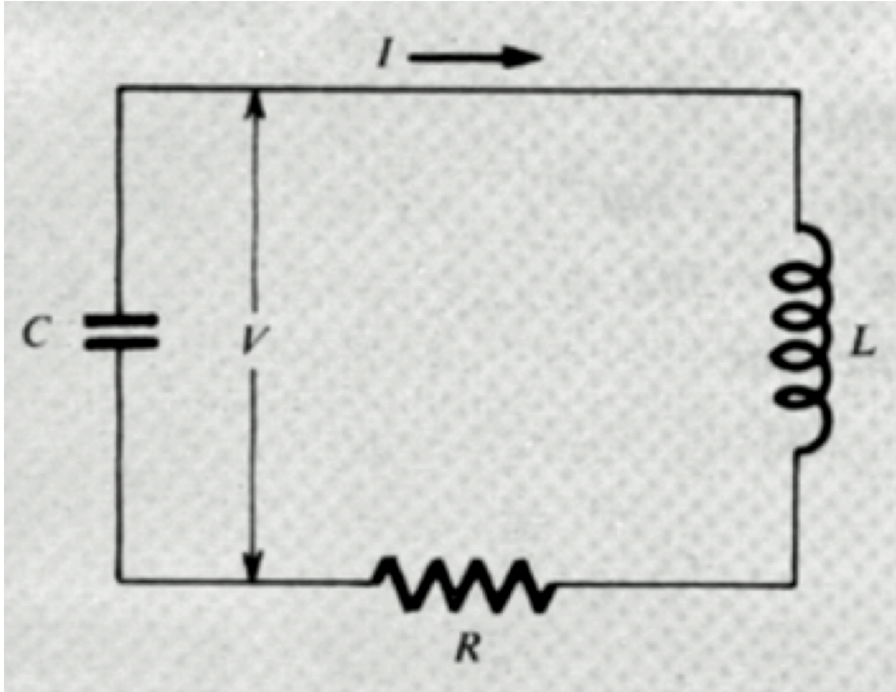
Donde $r = \lambda \pm i\mu$ con $\mu > 0$ son las dos raices complejas del polinomio característico

Circuito RLC en serie

- Entonces la solución general es

$$V(t) = e^{-\alpha t}(A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t)$$

- Donde -$\alpha \pm i\omega$ son las raíces del polinomio característico
- A y B dependen de las condiciones iniciales.
- De hecho, dependiendo de cuándo comenzamos a medir el tiempo es posible quedarse con sólo $\cos \omega t$ o $\sin \omega t$



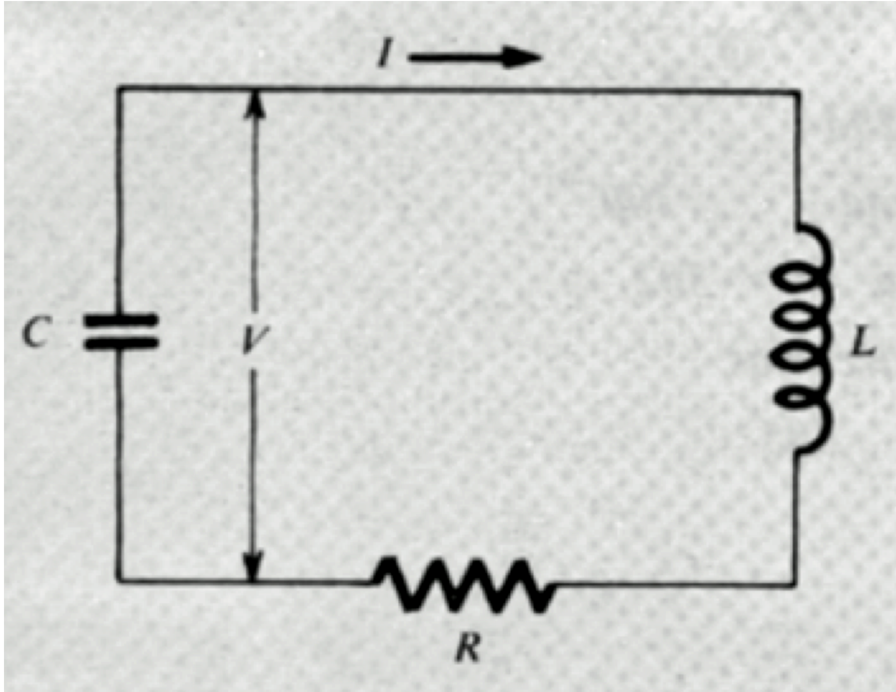
Circuito RLC en serie

- Probemos con la solución

$$V = Ae^{-\alpha t} \cos \omega t$$

$$\frac{dV}{dt} = Ae^{-\alpha t}[-\alpha \cos \omega t - \omega \operatorname{sen} \omega t]$$

$$\frac{d^2V}{dt^2} = Ae^{-\alpha t}[(\alpha^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen} \omega t]$$

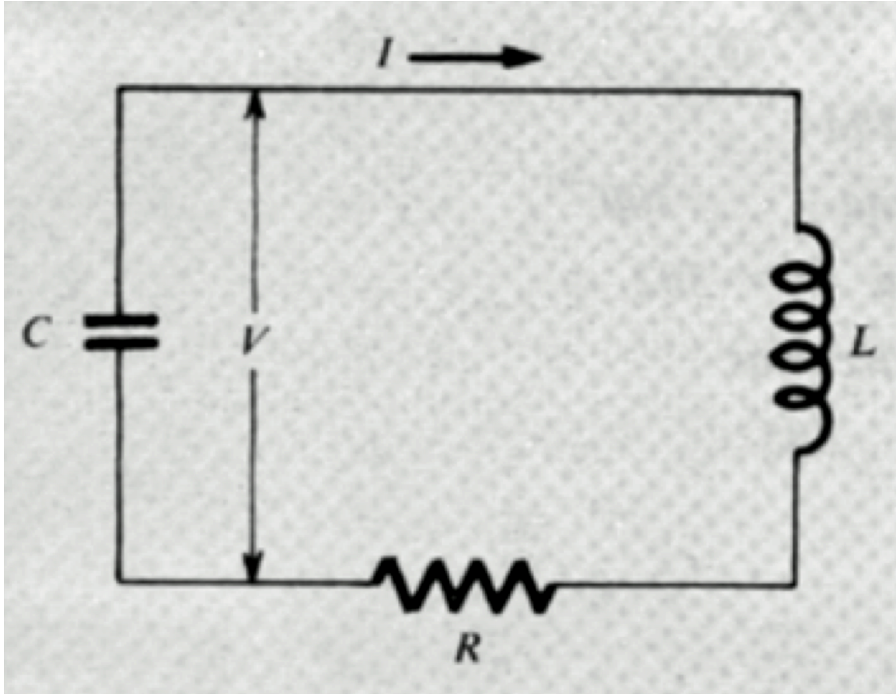


Circuito RLC en serie

- Sustituyendo en la ecuación diferencial y simplificando los $Ae^{-\alpha t}$ llegamos

$$(\alpha^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\alpha\omega \operatorname{sen}\omega t - \frac{R}{L}(\alpha\cos\omega t + \omega \operatorname{sen}\omega t) + \frac{1}{LC}\cos\omega t = 0$$

- Esto puede satisfacerse para todo t si los coeficientes que acompañan a $\sin\omega t \;\; y \;\; \cos\omega t$ son ambos cero.



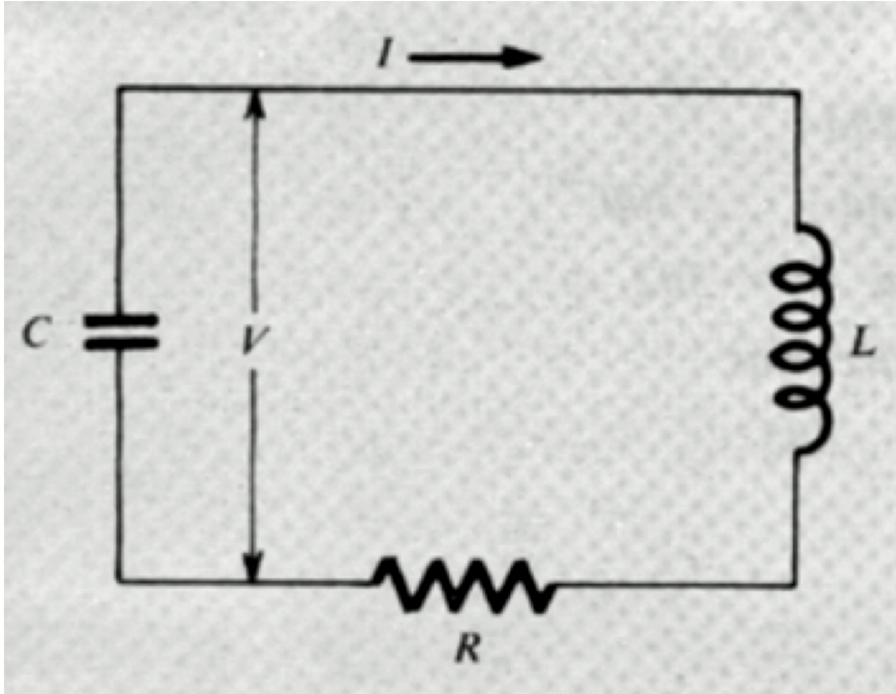
Circuito RLC en serie

- Esto quiere decir, por un lado que $(\sin \omega t)$

$$2\alpha\omega - \frac{R\omega}{L} = 0$$

- Lo cual quiere decir que

$$\alpha = \frac{R}{2L}$$



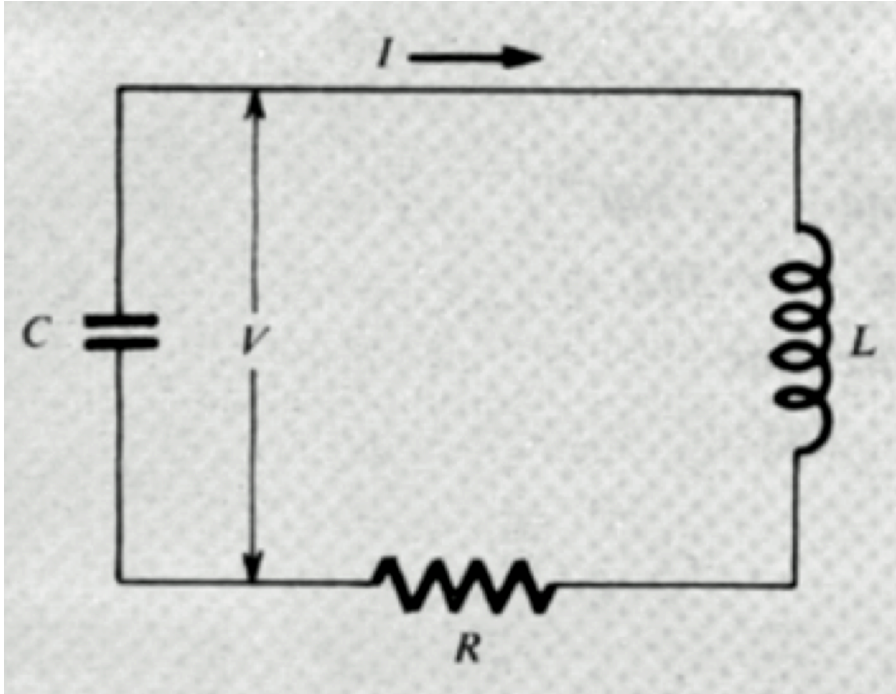
Circuito RLC en serie

- Por otro lado se tiene ($\cos \omega t$):

$$\alpha^2 - \omega^2 - \alpha \frac{R}{L} + \frac{1}{LC} = 0$$

- Lo cual implica que:

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} - \alpha \frac{R}{L} + \alpha^2 = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}$$



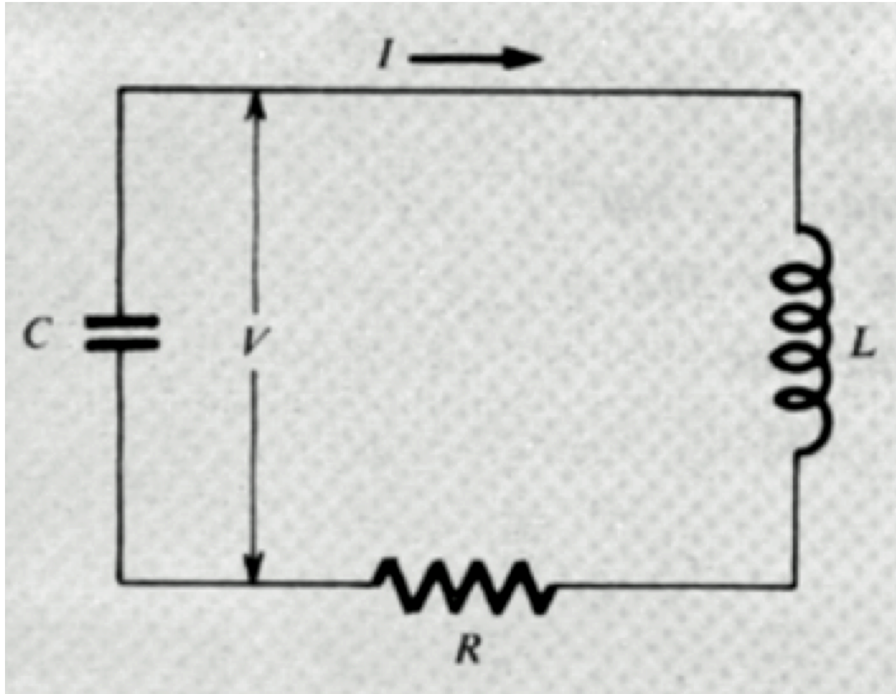
Circuito RLC en serie

- Siendo ω real, la ecuación anterior implica que

$$\frac{1}{LC} \geq \frac{R^2}{4L^2}$$

- Si tomamos el caso tal que usamos el > tenemos el caso de bajo amortiguamiento:

$$R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$



Circuito RLC en serie

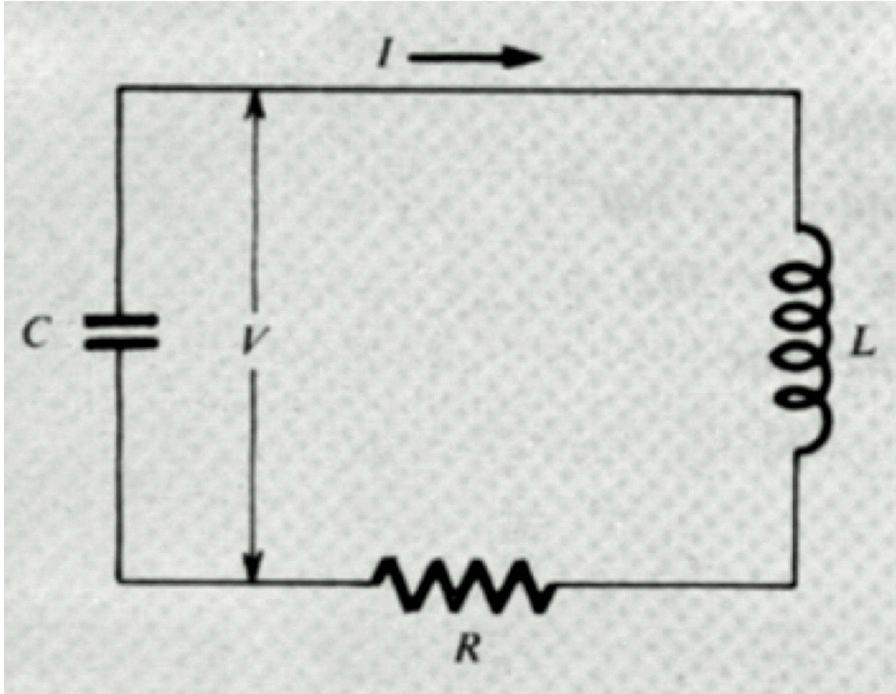
- Entonces

$$V = Ae^{-\frac{R}{2L}t}\cos\left[\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}\,t\right]$$

(solución cuando la amplitud de V es máxima en $t = 0$)

- Y la corriente nos queda

$$I = -C\,\frac{dV}{dt} = AC\omega e^{-\alpha t}\left[\sin\omega t - \frac{\alpha}{\omega}\cos\omega t\right]$$



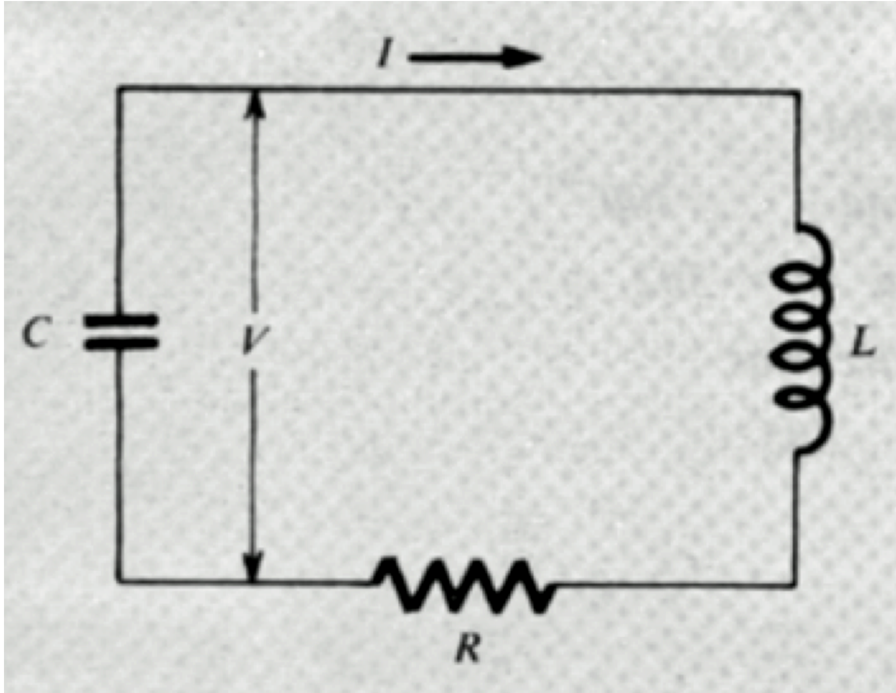
Circuito RLC en serie

- Tanto V como I oscilan y son amortiguados por un factor

$$e^{-\frac{R}{2L}t}$$

- La medida del amortiguamiento es el cociente

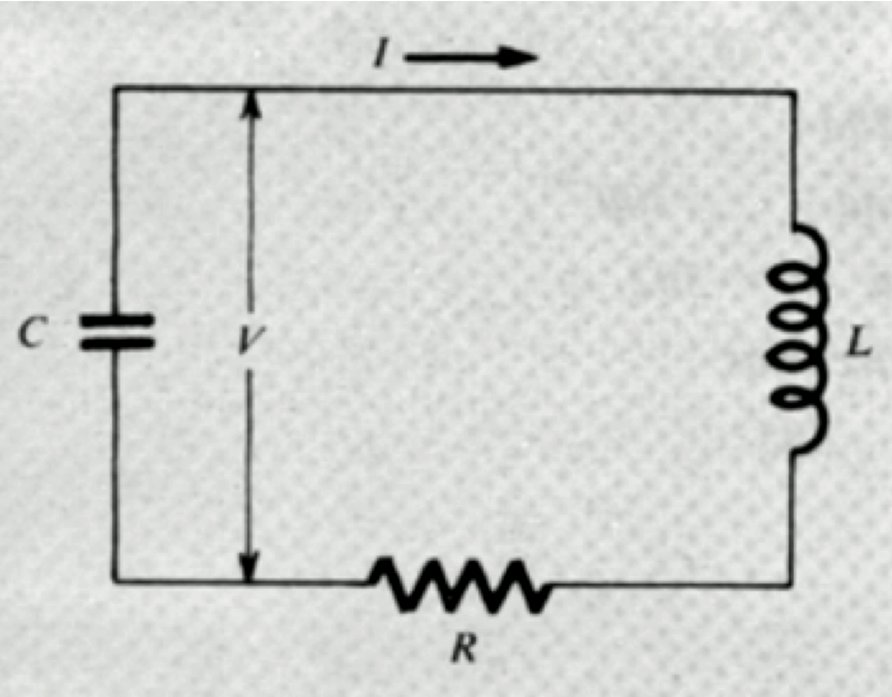
$$\frac{\alpha}{\omega}$$



Circuito RLC en serie

- Si $\frac{\alpha}{\omega}$ es muy pequeño, muchas oscilaciones van a ocurrir antes que la amplitud decaiga considerablemente.
- El caso límite es cuando $\frac{\alpha}{\omega} = 0$ no hay amortiguamiento (es como si R no existiera)
- En ese caso, la frecuencia es

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



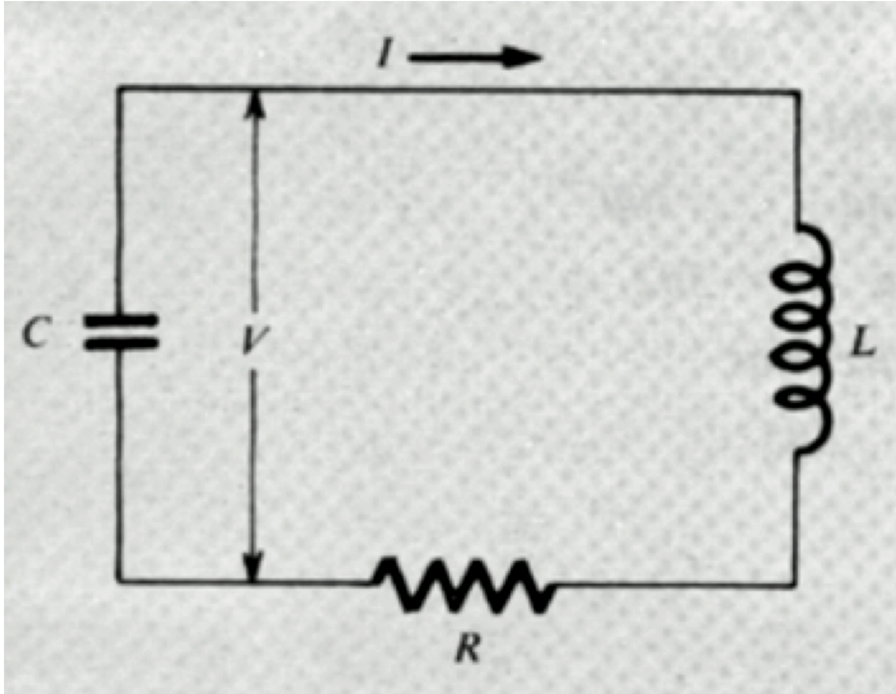
Circuito RLC en serie

- Existe un desfasaje entre V e I.

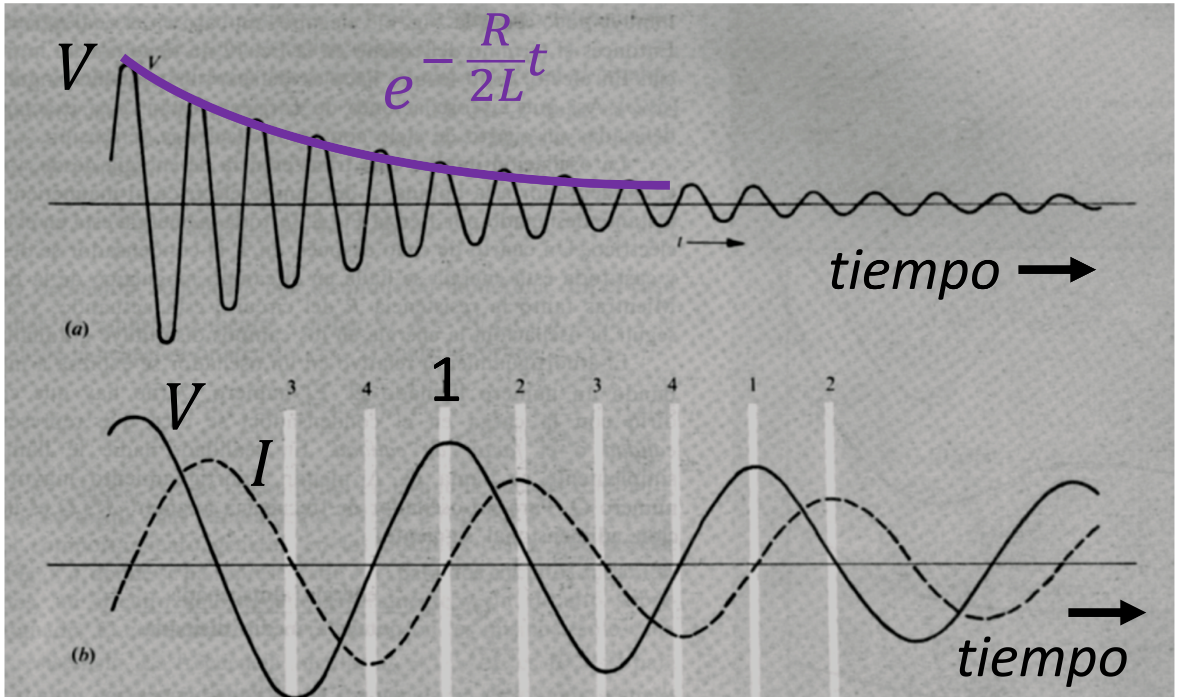
- En la medida en la que $\frac{\alpha}{\omega}$ sea muy pequeño,

$$I \approx AC\omega e^{-\alpha t}[\sin \omega t]$$

- Y el desfasaje en ese caso es de un cuarto de ciclo ($^{\pi}/_{2}$).

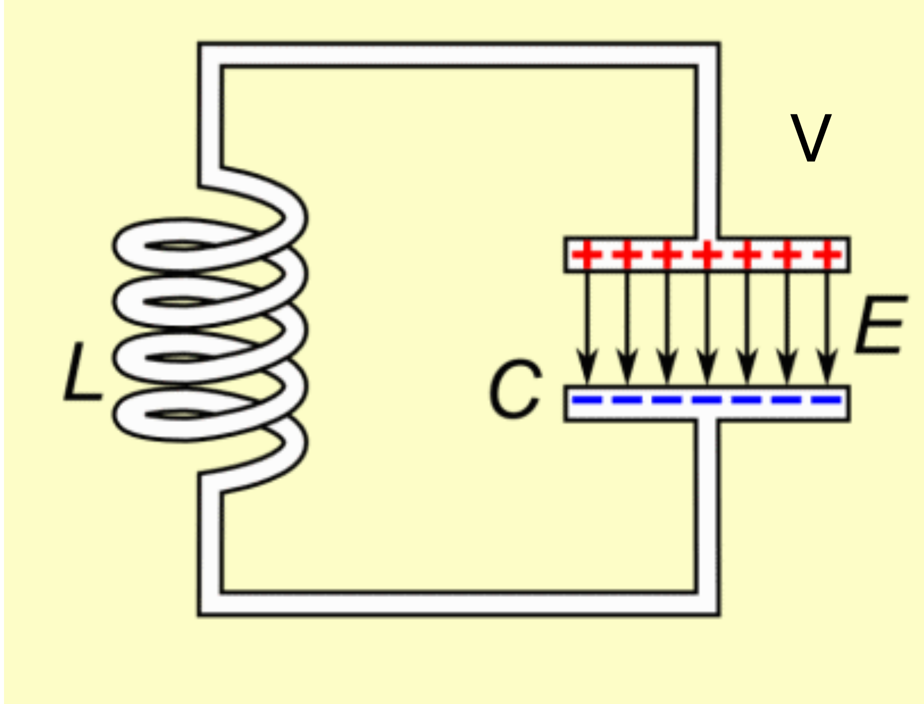


Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

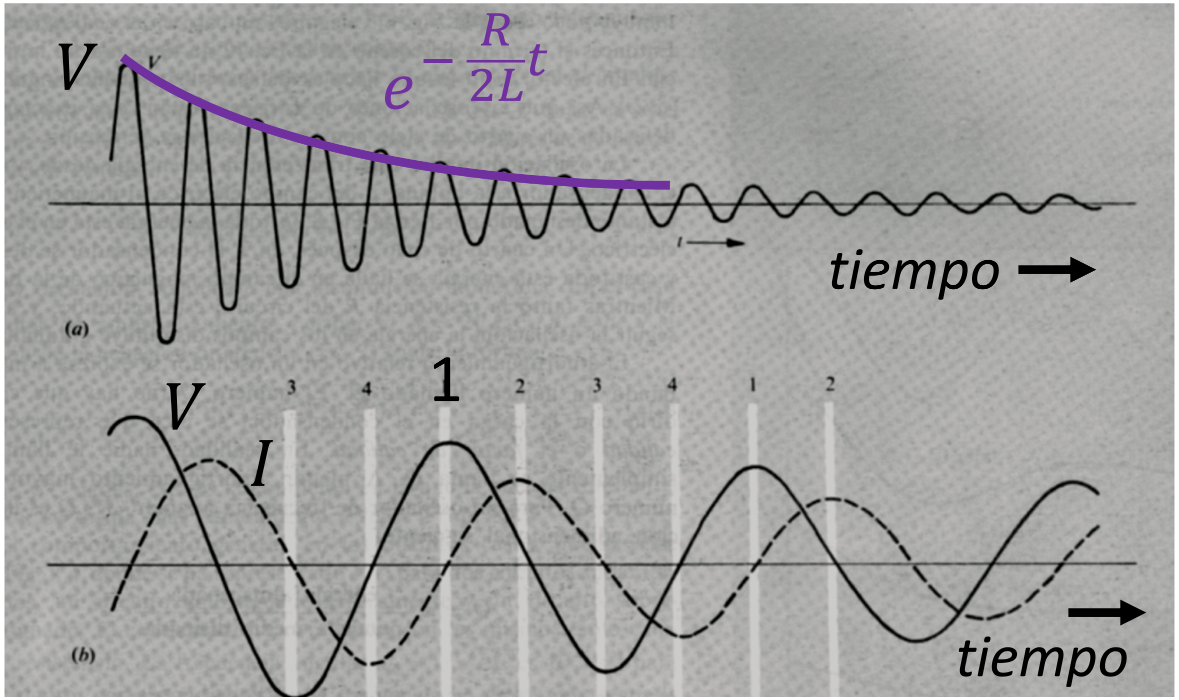


1. Capacitor cargado, corriente cero

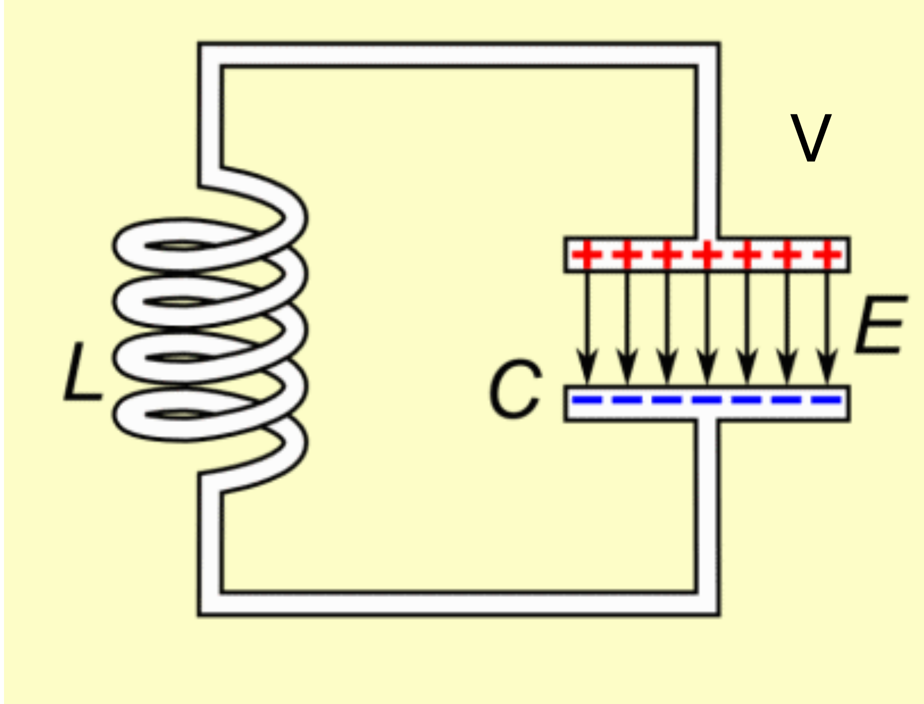
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



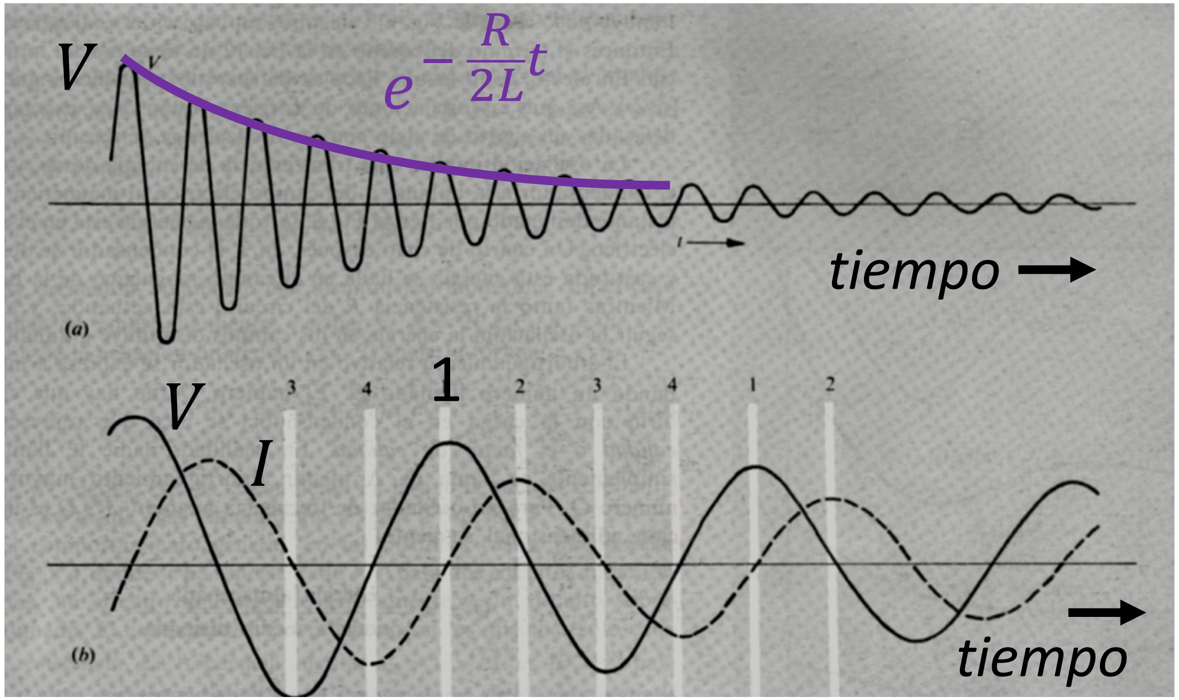
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)

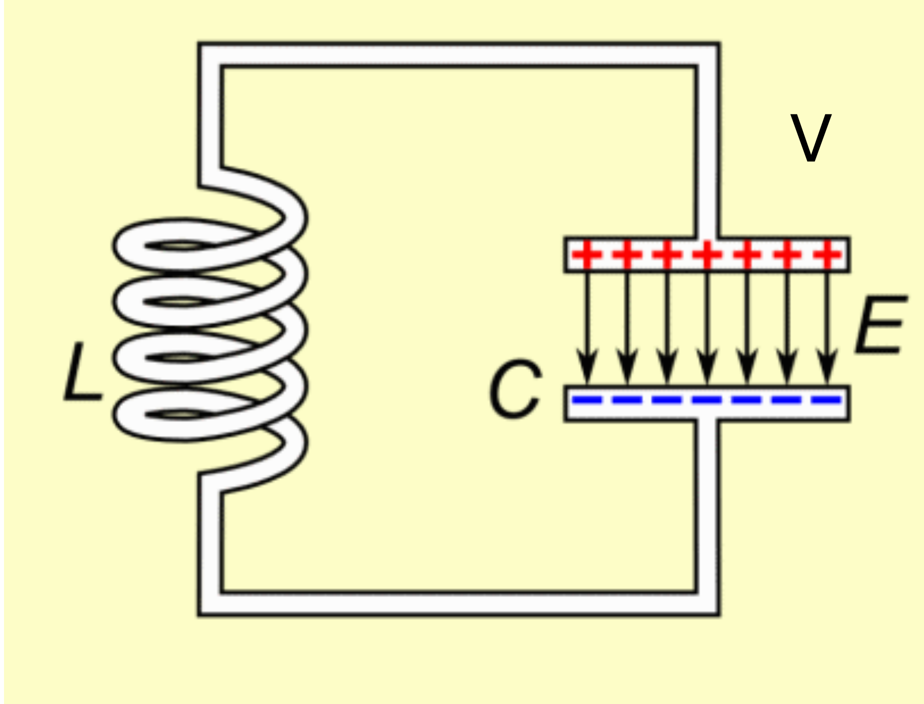


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)

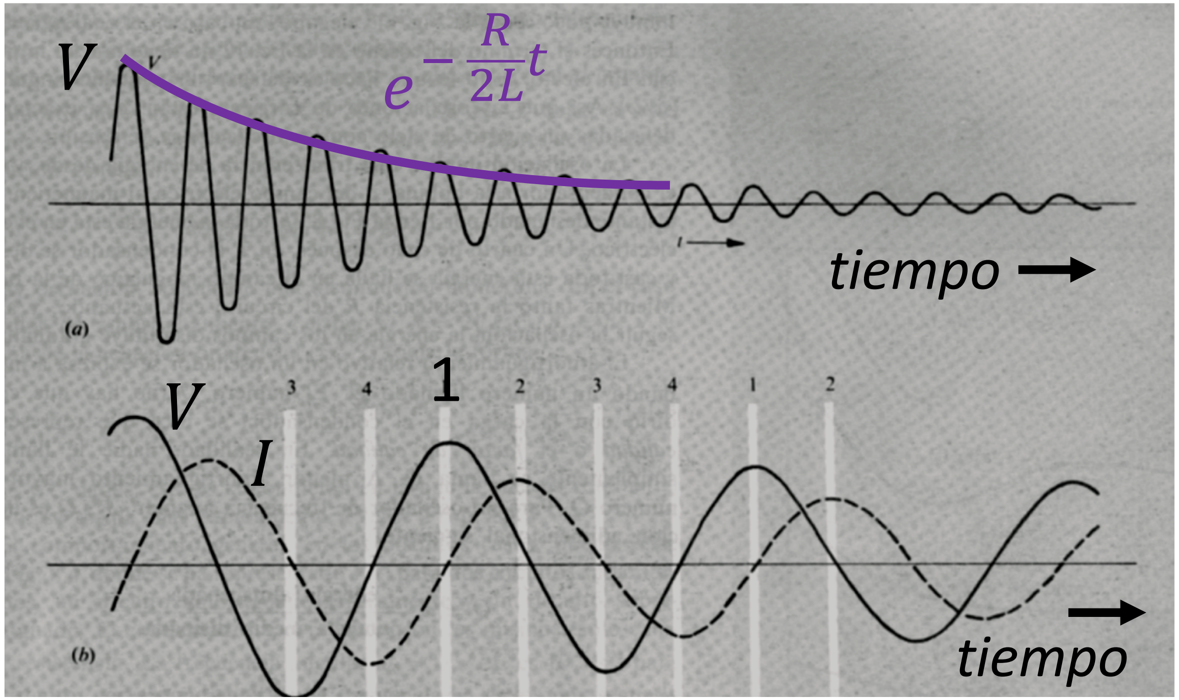
Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



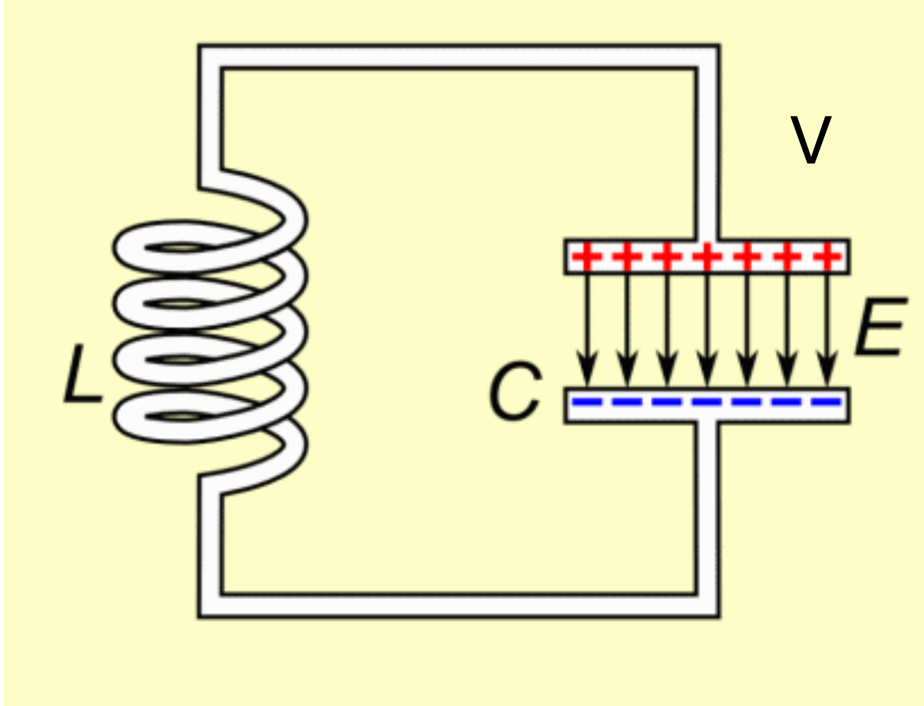


1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero

Caso con amortiguamiento bajo ($R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$)



Caso sin amortiguamiento ($R = 0$)



1. Capacitor cargado, corriente cero
2. Corriente máxima, capacitor descargado, máximo campo magnético
3. Capacitor cargado en sentido opuesto a 1, corriente cero
4. Corriente máxima en sentido opuesto a 2, máximo campo magnético en sentido opuesto a 2, capacitor descargado.