

Ondas electromagnéticas

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Escribamos las ecuaciones de Maxwell para campos eléctricos y magnéticos **en el vacío, sin cargas ni corrientes**.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

Gauss

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

∄ monopolo

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Ampère + Maxwell

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Faraday

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Tomemos el rotor de la Ley de Faraday:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

- Y derivemos respecto al tiempo la Ley de Ampère + Maxwell:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \times \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Igualando estas dos expresiones tenemos

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

- Pero, del cálculo vectorial se sabe que:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla}^2 \vec{E}$$

Ecuación de las ondas electromagnéticas

- Con lo cual llegamos a la **ecuación de las ondas electromagnéticas**

$$\vec{\nabla}^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Ecuación de las ondas electromagnéticas

- $\vec{\nabla}^2$ es el **operador laplaciano vectorial**. En coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

Ecuación de las ondas electromagnéticas

- Existen varios tipos de solución $\vec{E}(\vec{r}, t)$ para esta ecuación.
- Vamos a ver algunas de las soluciones más simples
- Un campo que depende de la coordenada z y del tiempo a través de una función sinusoidal y está polarizado a lo largo del eje x es una de las soluciones:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}$$

Ecuación de las ondas electromagnéticas

- Para esta solución $E_y = E_z = 0$ al igual que las derivadas $\frac{\partial}{\partial x}$ y $\frac{\partial}{\partial y}$.
- Entonces:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

- Insertando la solución obtenemos la llamada **ecuación de dispersión**

$$\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Ondas viajeras

- Reescribimos la solución como

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos \left[k \left(z - \frac{\omega}{k} t \right) \right] \hat{x}$$

- $E_x(z, t)$ es una función de $z - \frac{\omega}{k} t$ donde $\frac{\omega}{k}$ tiene unidades de velocidad:

$$E_x(z, t) = f(z - vt) \text{ donde } v = \frac{\omega}{k}$$

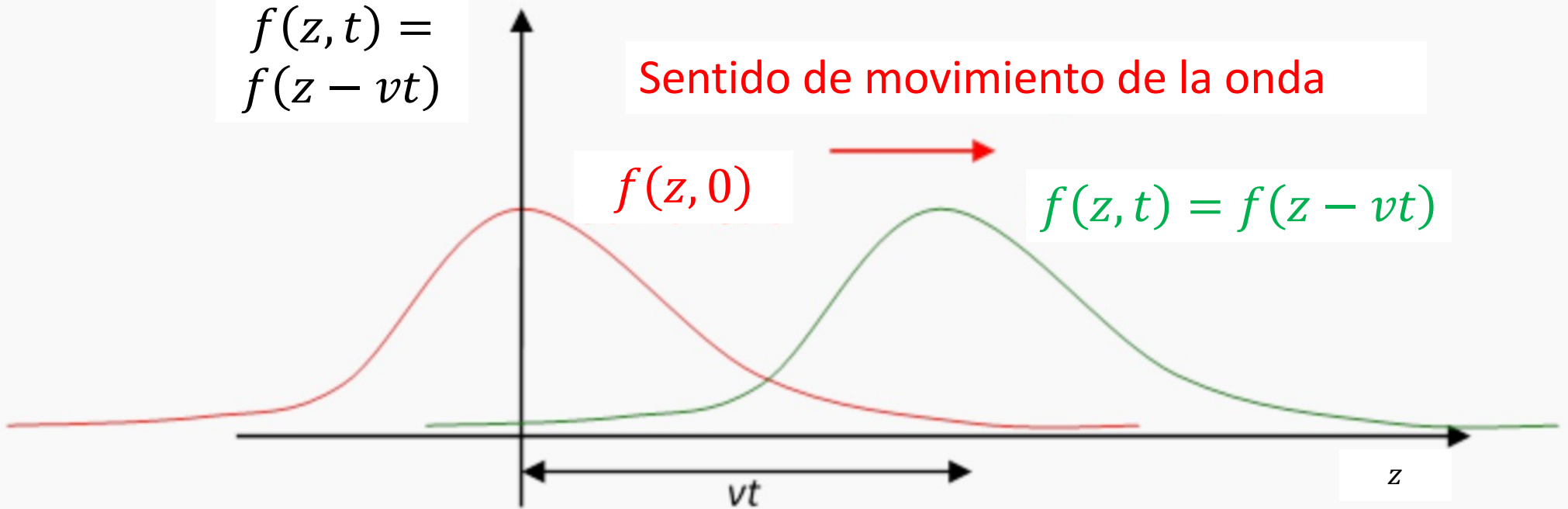
Ondas viajeras

$$f(z, t) = f(z - vt)$$

Sentido de movimiento de la onda

$$f(z, 0)$$

$$f(z, t) = f(z - vt)$$



La solución es el desplazamiento a velocidad v de la forma de la onda a cualquier instante, por ejemplo $f(z, 0)$

Longitud de onda y período

- Volvamos a nuestra solución:

$$E_x(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

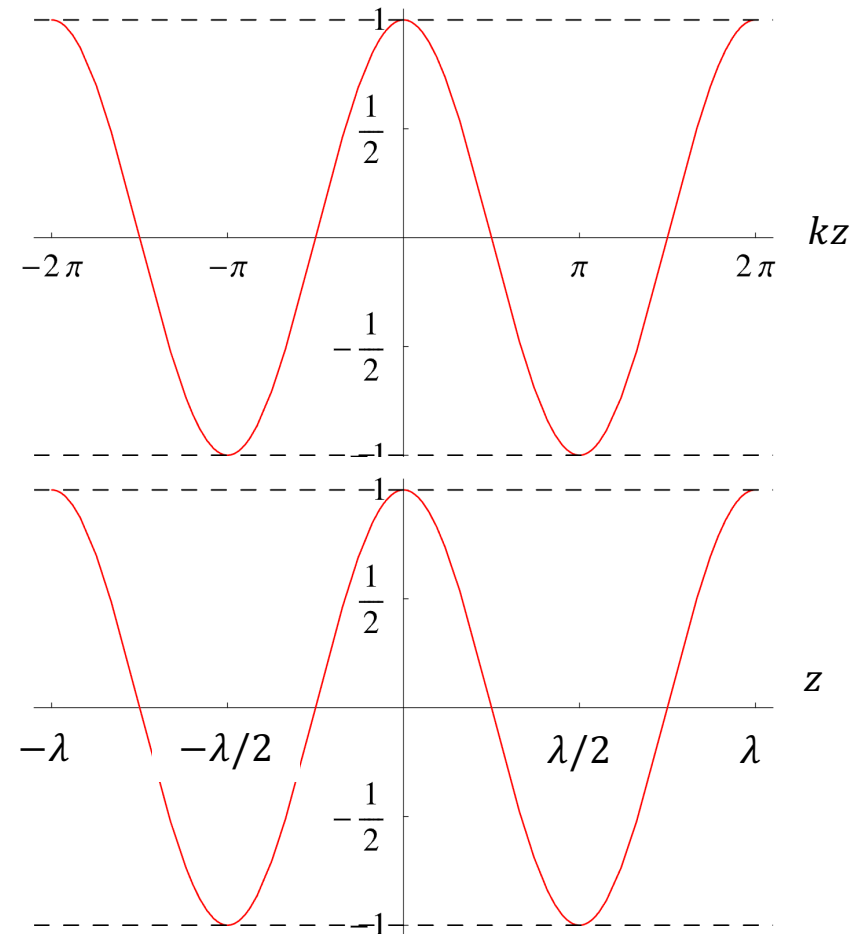
- En $t = 0$ tenemos

$$E_x(z, 0) = E_0 \cos(kz)$$

- La forma se vuelve a repetir cuando kz varía un 2π es decir cuando la variación en z es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- λ se llama longitud de onda



Longitud de onda y período

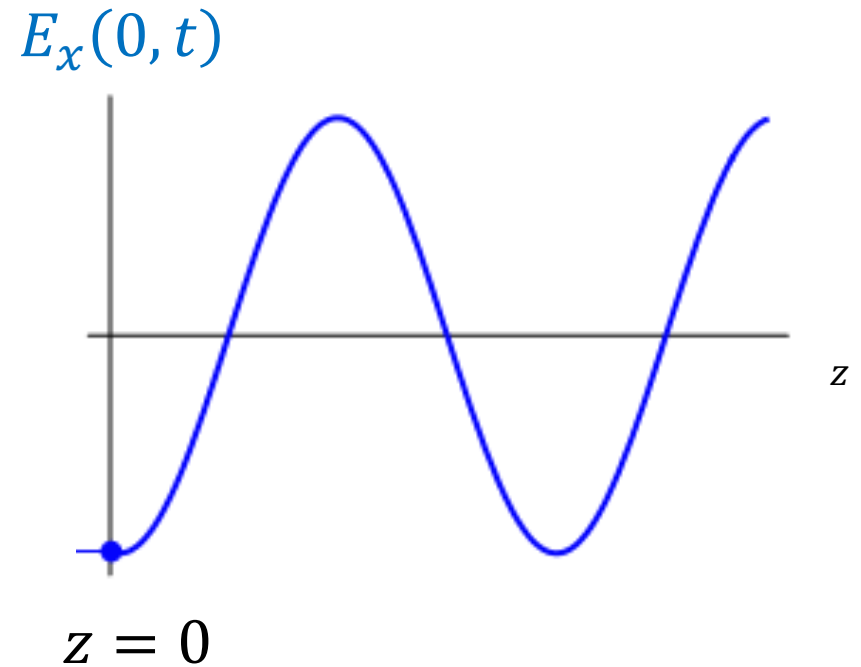
- En $z = 0$ tenemos

$$E_x(0, t) = E_0 \cos(-\omega t) = E_0 \cos(\omega t)$$

- El valor de $E_x(0, t)$ se vuelve a repetir al cabo de un período τ tal que :

$$\omega\tau = 2\pi \text{ entonces } \tau = \frac{2\pi}{\omega}$$

- τ se llama período de onda



Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Con esto en mente, volviendo a la ecuación de dispersión

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{\tau}$$

- Donde ω es la frecuencia angular (rad/s); k es el número de onda
- Y c es la velocidad de la luz en el vacío:

$$c \cong 300000 \text{ km/s}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Además, nuestra onda es **transversal** ya que se desplaza en una dirección (+z) **perpendicular** a la perturbación (en x)
- Otras partes de una onda son :

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}$$

Diagram illustrating the components of the electromagnetic wave equation:

- Amplitud** points to E_0 .
- fase** points to the argument of the cosine function, $kz - \omega t$.
- polarización** points to the unit vector $\hat{x}$.
- nro de onda** points to k .
- frecuencia angular** points to ω .

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- $\vec{B}(z, t)$ se obtiene mediante la ley de Faraday.

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \hat{x} - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

- Sólo sobrevive el segundo término de la componente y :

$$\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} \right) \hat{y} = -E_0 k \sin(kz - \omega t) \hat{y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Ecuaciones de Maxwell y las ondas EM

- Entonces :

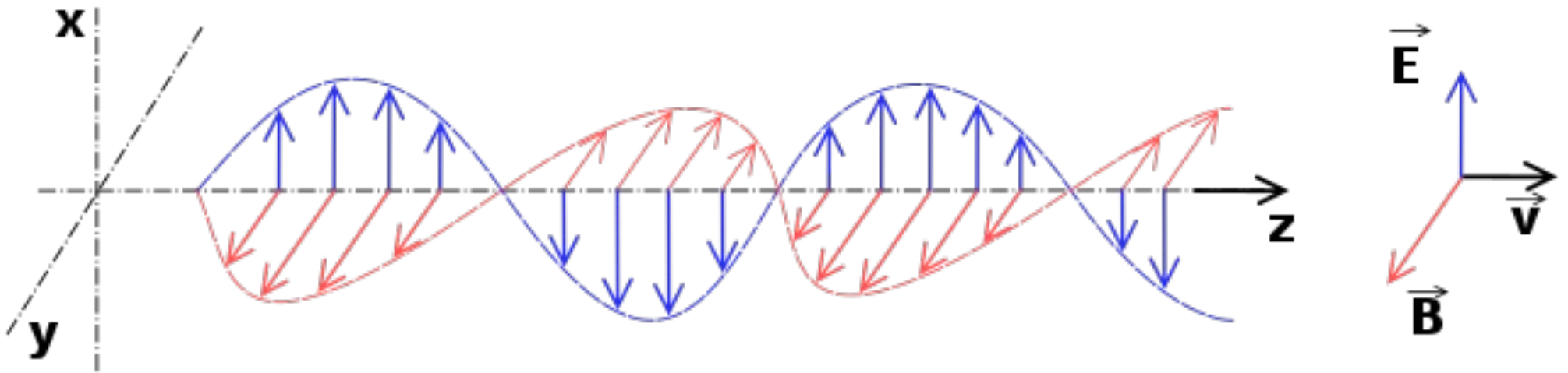
$$\vec{B}(z, t) = E_0 k \hat{y} \int \sin(kz - \omega t) dt = \frac{E_0 k}{\omega} \cos(kz - \omega t) \hat{y}$$

- Por lo tanto:

$$\vec{B}(z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{y}$$

Perpendiculares y en fase

Ondas electromagnéticas



Propiedades de una onda EM viajera

$\vec{E} \perp$ dirección de propagación

$\vec{B} \perp$ dirección de propagación

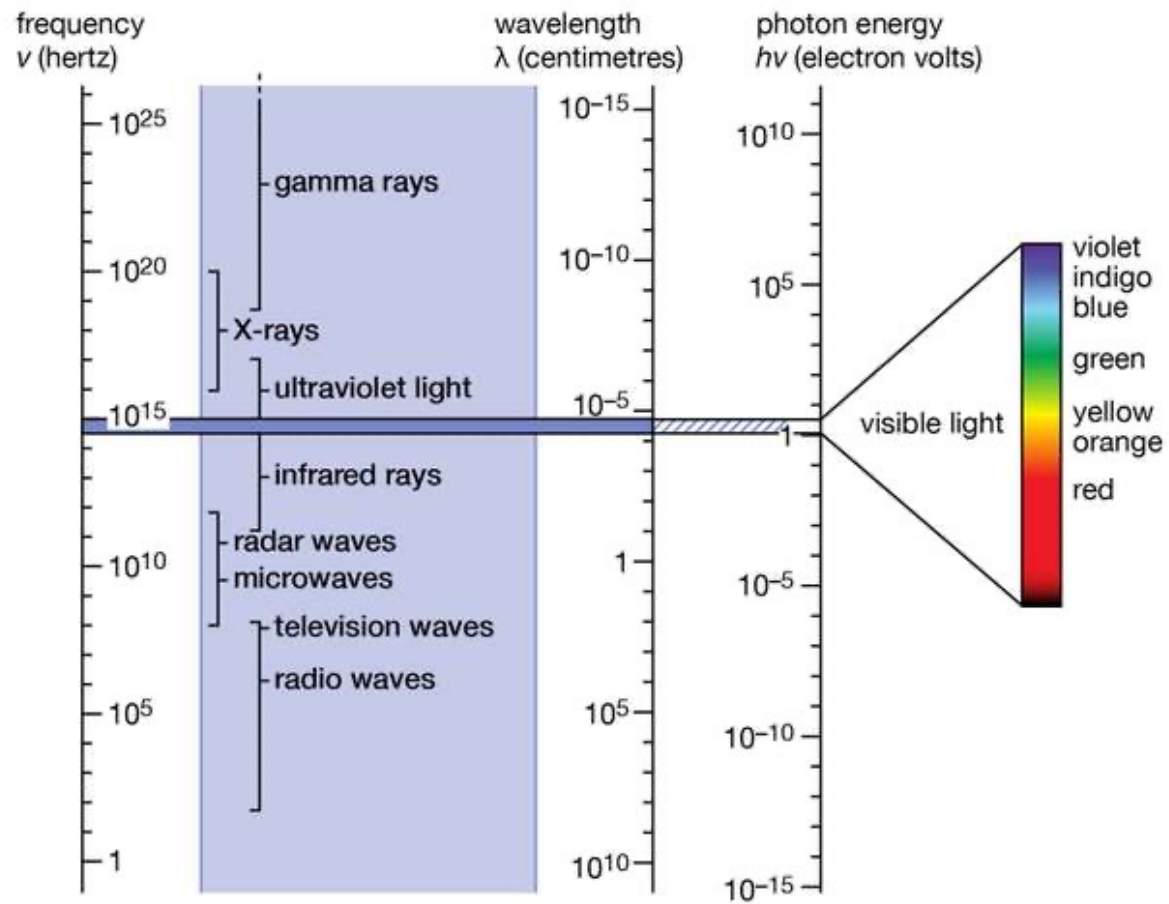
$\vec{E}$ y $\vec{B}$ en fase

$\vec{E} \perp \vec{B}$

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c}$$

$\vec{E} \times \vec{B}$ es paralelo a la dirección de propagación

El espectro electromagnético



Energía transportada por ondas EM

- Una onda electromagnética transporta al propagarse con velocidad c a la energía electromagnética de los campos que la forman.
- Vimos que la densidad de energía por unidad de volumen venía dada por :

$$u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Calculemos la cantidad de energía que pasa por unidad de tiempo a través de una unidad de superficie perpendicular a la dirección de propagación.

Energía transportada por ondas EM

- En $z = 0$ tenemos:

$$E(0, t)^2 = |E(0, t)|^2 = [E_0 \cos(-\omega t)]^2$$
$$B(0, t)^2 = |B(0, t)|^2 = \left[\frac{E_0}{c} \cos(-\omega t) \right]^2$$

- Entonces:

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} \left[E_0^2 + \left(\frac{E_0}{c} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \right] [\cos(\omega t)]^2$$

- El promedio de $[\cos(\omega t)]^2$ en un período es $\frac{1}{2}$ entonces si $\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2$

$$\langle u \rangle = \frac{\epsilon_0}{4} [E_0^2 + E_0^2] = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2}$$

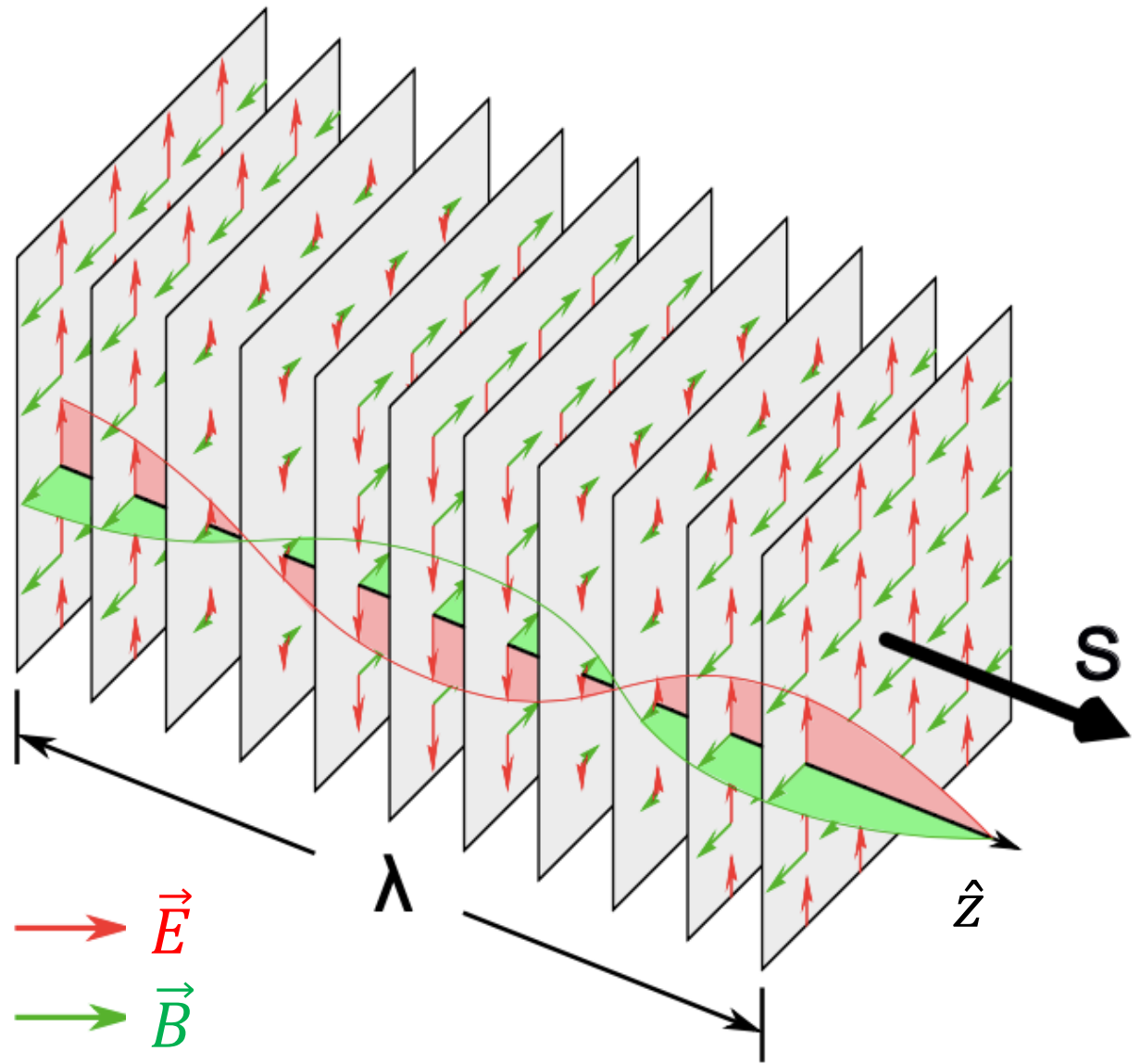
Energía transportada por ondas EM

- Entonces, la energía promedio que atraviesa una unidad de superficie por unidad de tiempo es:

$$S = \langle u \rangle c = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} c$$

Ondas planas

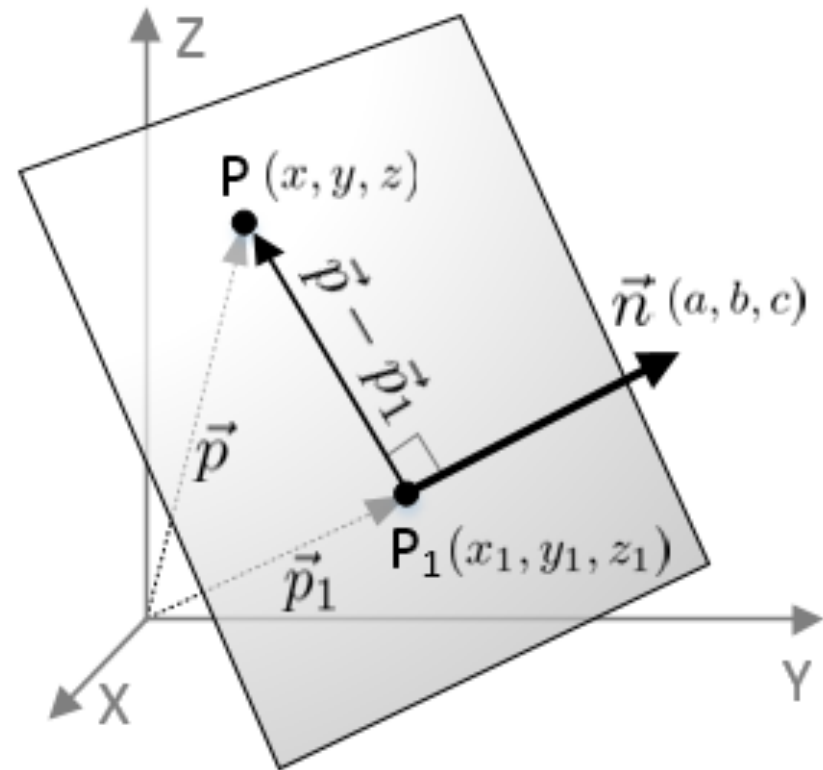
- Cada plano corresponde a una superficie del mismo valor de fase
- En cada plano, los campos son iguales



Ondas planas: ecuación normal del plano

- P_1 y P que pertenecen a un plano de normal $\hat{n}$.
- La siguiente es la ecuación normal del plano
$$\hat{n} \cdot (\vec{p} - \vec{p}_1) = 0$$
- Si dejamos fijo $\vec{p}_1$ el plano está compuesto por los puntos $\vec{p}$ tales que

$$\hat{n} \cdot \vec{p} = \hat{n} \cdot \vec{p}_1 = \text{constante}$$



Ondas planas

- Las ondas planas son una solución de la ecuación de ondas EM:

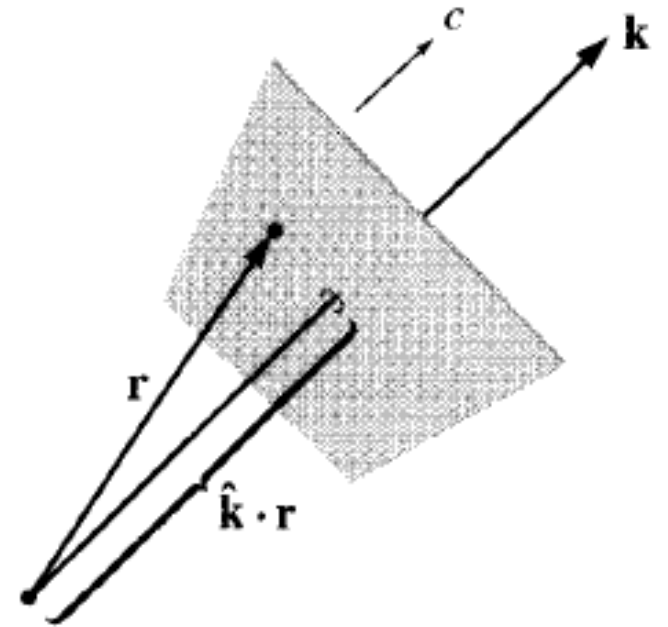
$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)$$

- Para cada instante t , el plano corresponde a

$$\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t = \text{constante}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} + \omega t$$

- Esto define el frente de onda, que con t se desplaza en la dirección de $\vec{k}$ con velocidad c

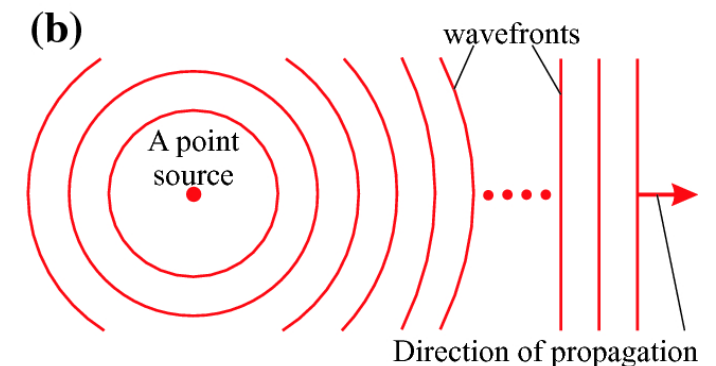
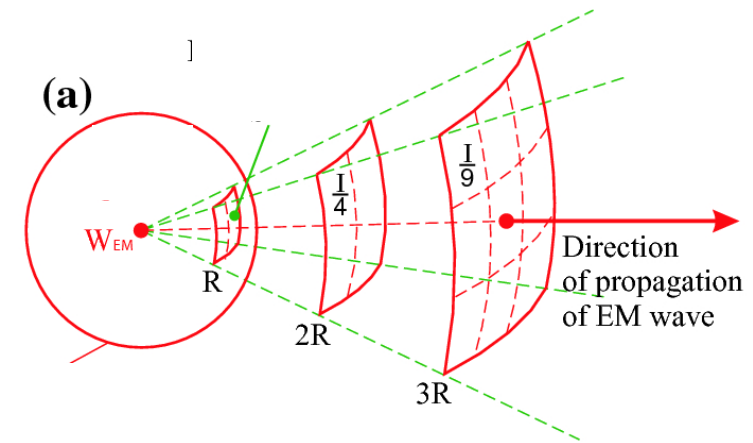


Ondas esféricas

- Para fuentes puntuales, otra solución de la ecuación de onda en esféricas es la siguiente

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(r) \cos(\vec{k}(\vec{r}) \cdot \vec{r} - \omega t)$$

- Donde $\vec{k}(\vec{r}) = k\hat{r}$ y $\vec{E}_0(r) \propto \frac{1}{r}$
- Lejos de la fuente, la onda esférica en una pequeña porción puede ser considerada plana en primera aproximación



Ondas estacionarias

- La ecuación de onda para una cantidad $y(x, t)$:

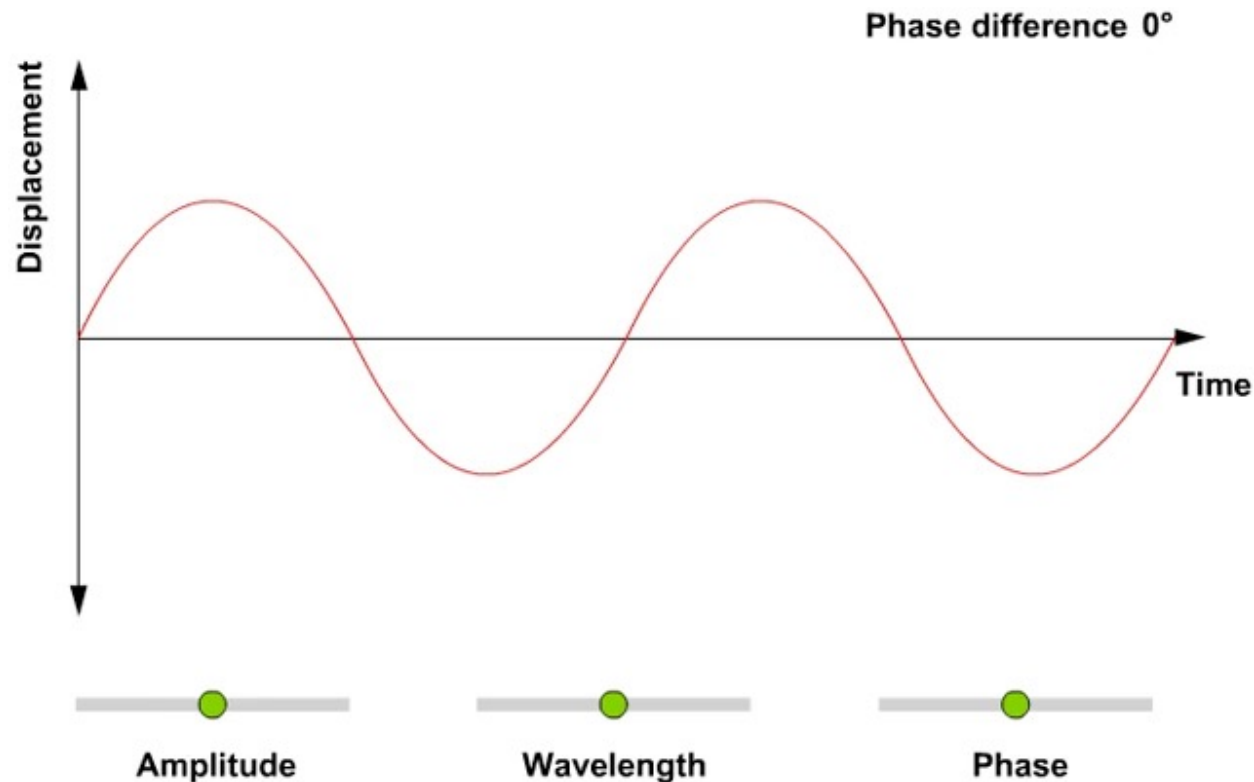
$$\frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

- Tiene como solución cualquier función $y = f(x, t)$ del tipo

$$y(x, t) = f(x \pm vt)$$

- Con ambos sentidos de propagación
- Como es **lineal**, una combinación lineal de soluciones también es una solución.

Amplitud, longitud de onda y fase en una onda sinusoidal $A \sin(\omega t)$

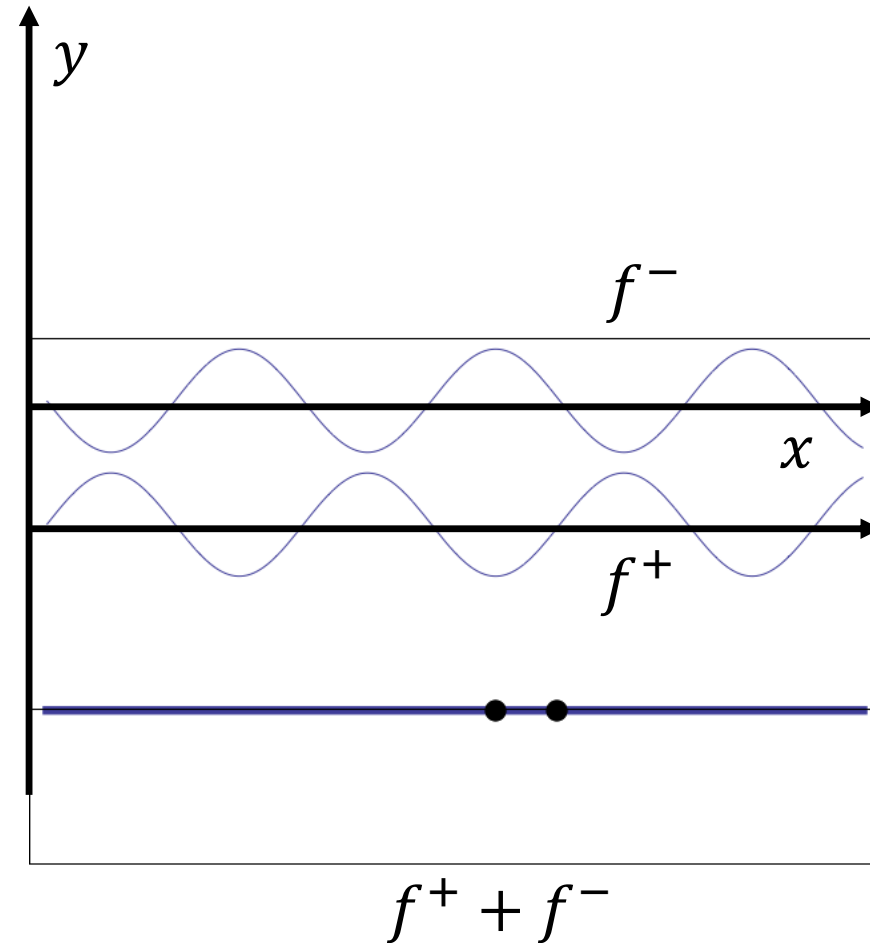


Ondas estacionarias

- La ecuación de onda admite soluciones viajeras en ambos sentidos de propagación.
- Supongamos entonces dos ondas

$$f^{\pm}(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$$

- La suma de ambas es también una solución



Ondas estacionarias

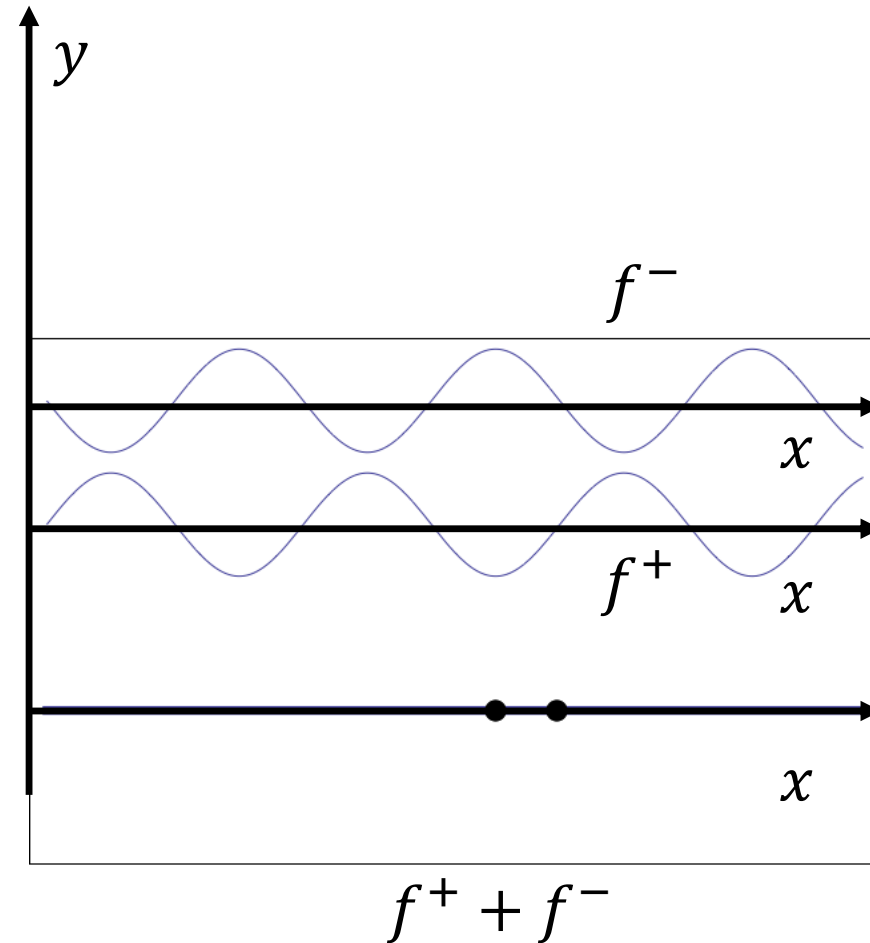
- Sumemos $f^+ + f^-$

$$\begin{aligned} A(\sin(kx + \omega t) + \sin(kx - \omega t)) &= \\ A(\sin kx \cos \omega t + \cos kx \sin \omega t &+ \\ + \sin kx \cos \omega t - \cos kx \sin \omega t) &= \end{aligned}$$

- El resultado da una onda estacionaria

$$f^+ + f^- = 2A \sin kx \cos \omega t$$

Parte espacial Parte temporal



Ondas estacionarias

- Los nodos son los lugares donde la onda siempre es cero.
- Estos son los valores de x_n tales que:
$$\sin kx_n = 0$$
- Esto equivale a que para un n natural o cero

$$kx_n = n\pi$$

- O bien

$$x_n = \frac{n\pi}{k} = \frac{n\lambda}{2}$$

