

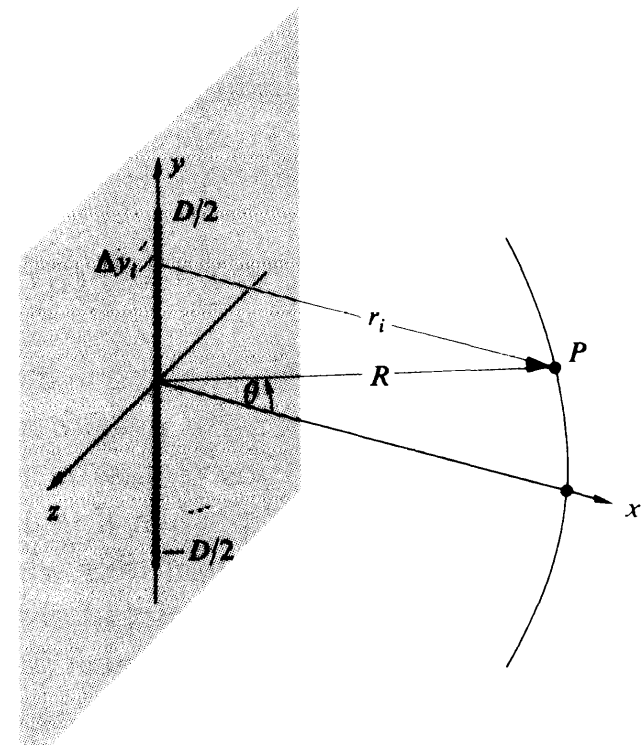
Segmento contínuo de fuentes
coherentes

Línea continua de fuentes coherentes

- Supongamos ahora un continuo de fuentes en un segmento de largo D .
- Cada punto emite una onda esférica:

$$E = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r} \right) \sin (\omega t - kr)$$

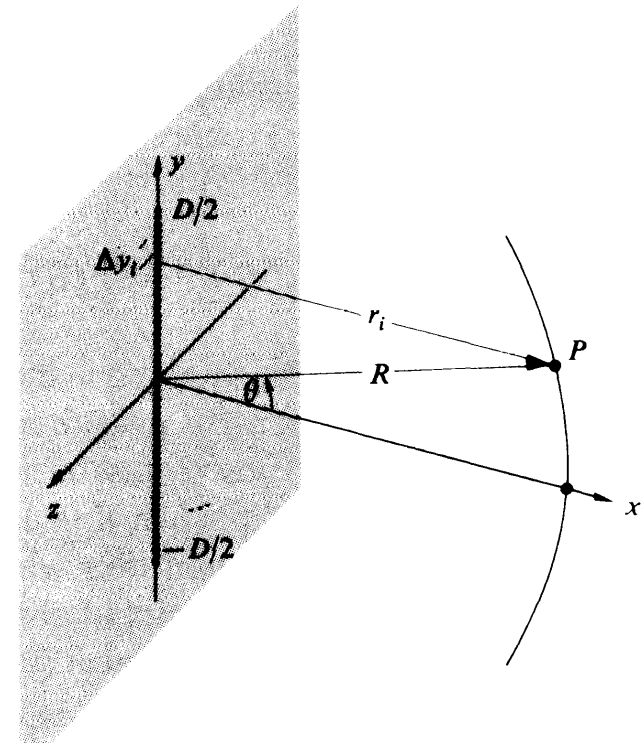
- Supongamos que la densidad de fuentes por unidad de distancia es $\frac{N}{D}$ con N grande.



Línea continua de fuentes coherentes

- Dividamos el segmento en M tramos de largo Δy en fase
- Cada segmento de largo Δy tendrá $\frac{N}{D} \Delta y$ fuentes
- La contribución del i -ésimo segmento Δy al campo eléctrico en el punto P es:

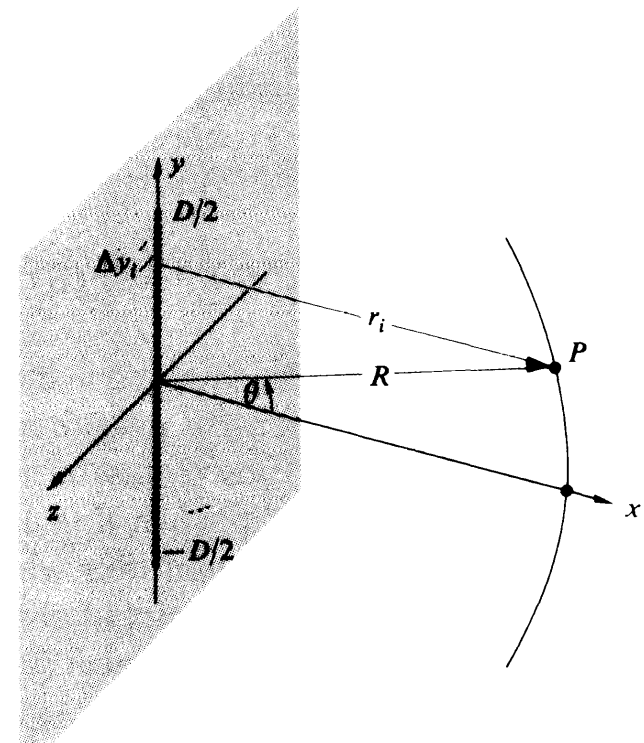
$$E_i = \left(\frac{\mathcal{E}_0}{r_i} \right) \sin (\omega t - kr_i) \left(\frac{N \Delta y_i}{D} \right)$$



Línea continua de fuentes coherentes

- Ahora para pasar una distribución continua de fuentes tenemos que tender N a infinito y achicar ϵ_0 (la amplitud del campo eléctrico de cada fuente) de manera de tener un campo finito en P .
- Definimos la intensidad de la

$$\mathcal{E}_L \equiv \frac{1}{D} \lim_{N \rightarrow \infty} (\epsilon_0 N)$$



Línea continua de fuentes coherentes

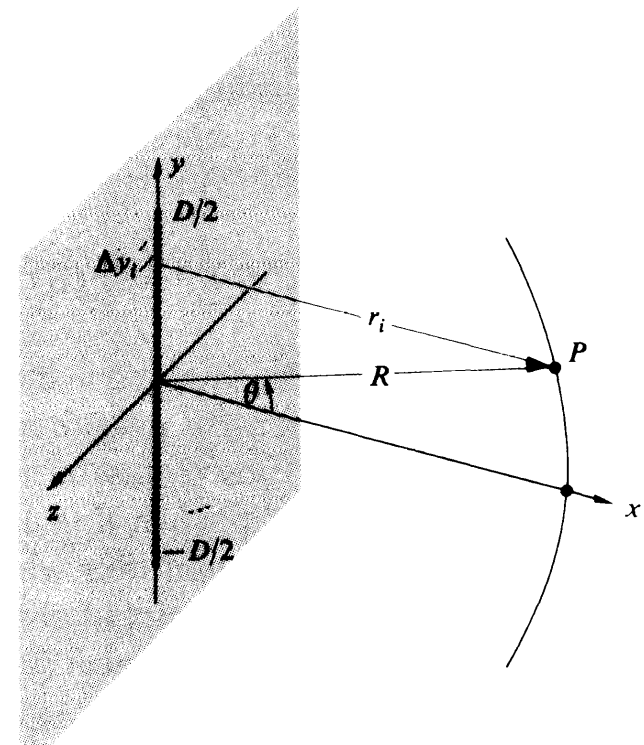
- Entonces, la suma de las contribuciones de los M segmentos de largo Δy_i queda:

$$E = \sum_{i=1}^M \frac{\mathcal{E}_L}{r_i} \sin(\omega t - kr_i) \Delta y_i$$

- En el límite $\lim_{\Delta y \rightarrow 0}$ tenemos el campo en P integrando a lo largo del ancho D .

$$E = \mathcal{E}_L \int_{-D/2}^{+D/2} \frac{\sin(\omega t - kr)}{r} dy$$

Con $r = r(y)$



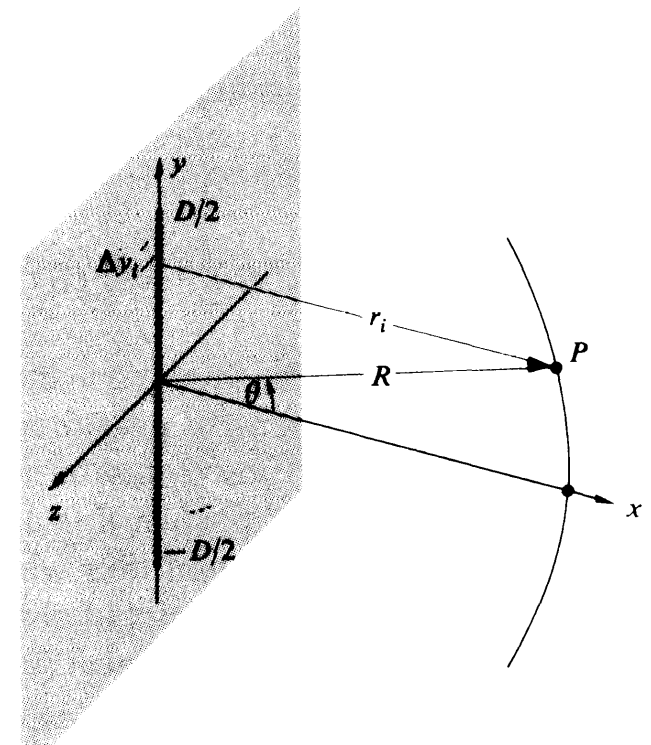
Difracción de Fraunhofer para
una línea continua de fuentes
coherentes

Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Tomemos ahora el resultado anterior pero imaginemos que la distancia al punto de observación es muchísimo mayor al del largo de la línea:

$$R \gg D$$

- Esto hace que la distancia de cada dy hasta P (r) no varíe mucho con y .
- Es más, r no va a diferir de la distancia a P medida desde el centro de la línea, R .

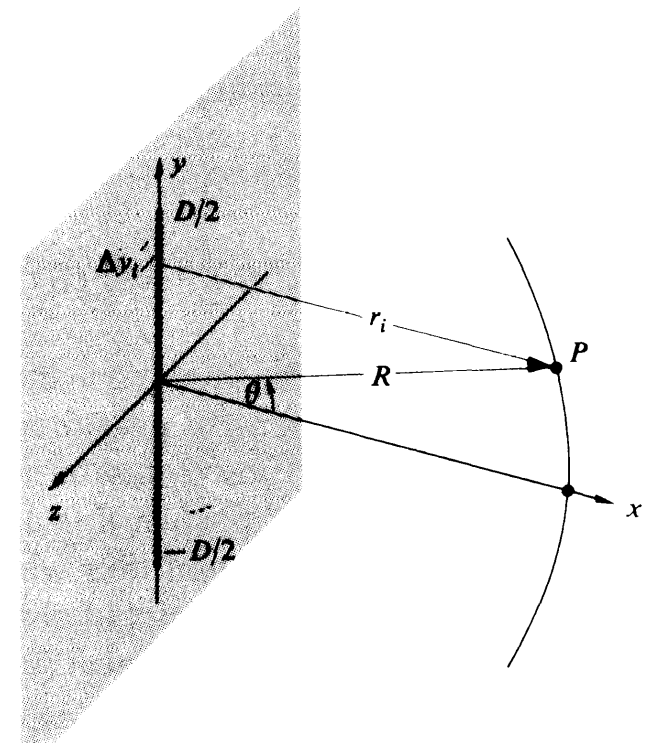


Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Entonces, la amplitud de la contribución del campo de cada dy también será la misma:

$$dE = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \sin(\omega t - kr) dy$$

- Ahora, para aproximar r dentro de la fase hay que tener más cuidado.



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Haciendo el mismo planteo que para Young, tenemos que

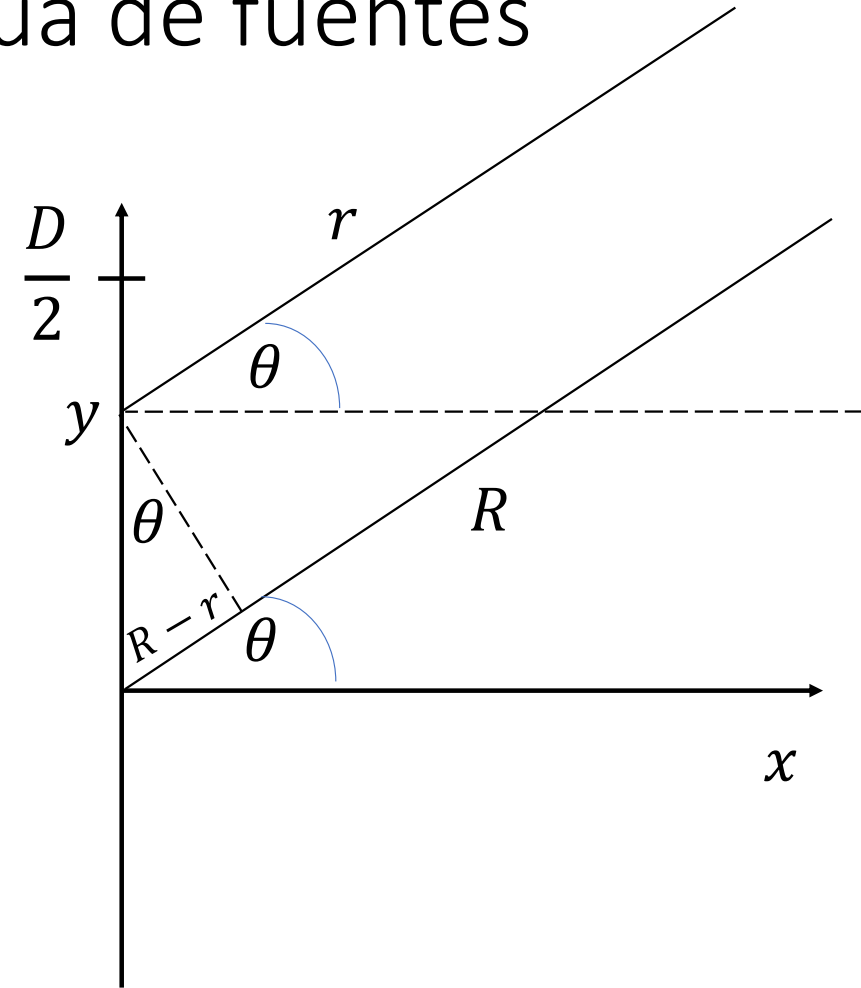
$$R - r \cong y \sin \theta$$

- Lo cual implica

$$r \cong R - y \sin \theta$$

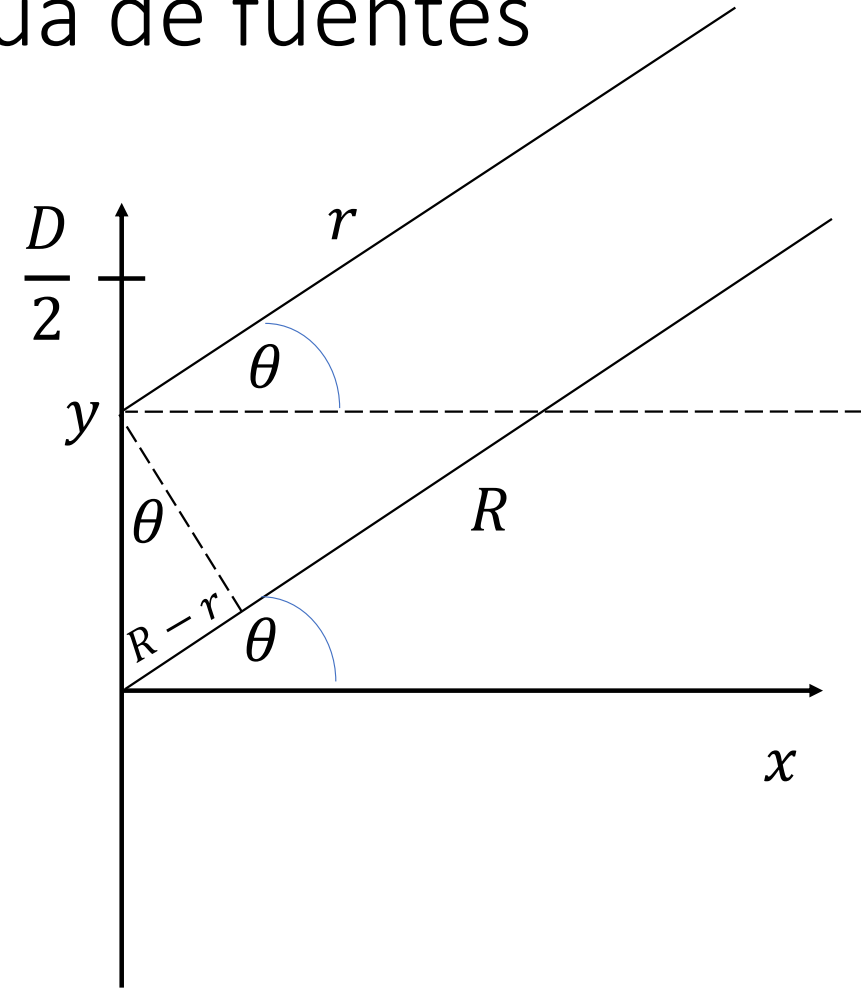
- Entonces, en la aproximación de Fraunhofer:

$$E = \frac{\mathcal{E}_L}{R} \int_{-D/2}^{+D/2} \sin [\omega t - k(R - y \sin \theta)] dy$$



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- La integral anterior se resuelve fácilmente haciendo
$$\sin(\omega t - kR + ky \sin \theta) = \sin(\omega t - kR) \cos(ky \sin \theta) + \cos(\omega t - kR) \sin(ky \sin \theta)$$
- La integral respecto a y entre $\pm \frac{D}{2}$ del segundo término del segundo miembro es cero.



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Resultando

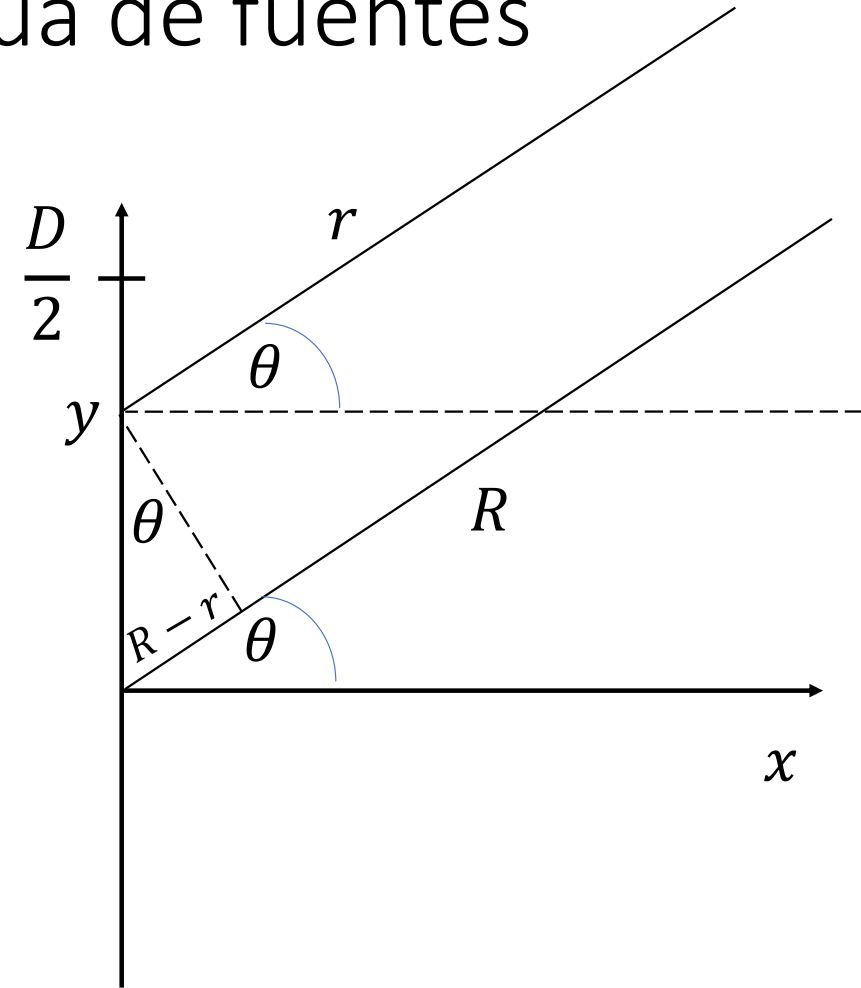
$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \frac{\sin[(kD/2) \sin \theta]}{(kD/2) \sin \theta} \sin(\omega t - kR)$$

- Si hacemos

$$\beta \equiv (kD/2) \sin \theta$$

- Tenemos

$$E = \frac{\mathcal{E}_L D}{R} \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right) \sin(\omega t - kR)$$



Fraunhofer para línea continua de fuentes

- La irradiancia entonces, es proporcional al promedio temporal del cuadrado del campo electrico

$$I(\theta) = \langle |E|^2 \rangle$$

- Como $\langle |\sin(\omega t - kR)|^2 \rangle = 1/2$ obtenemos:

$$I(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{\mathcal{E}_L D}{R} \right)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Analicemos esta curva en función de la variable $\sin \theta$
- Tenemos un máximo en $\beta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0$

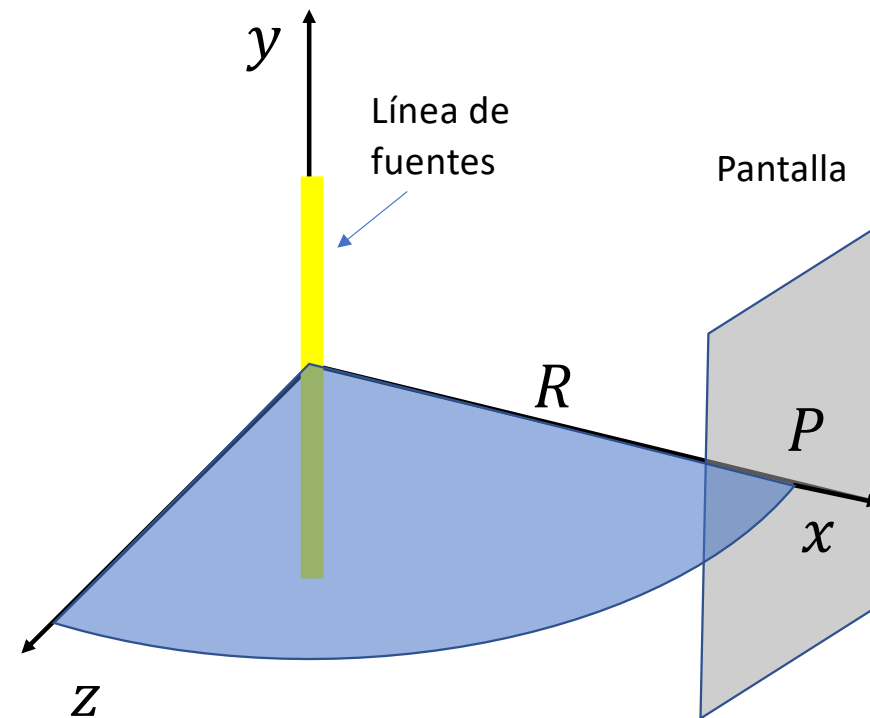
$$I(0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_L D}{R} \right)^2$$

- Tendremos mínimos $I(\theta_{min}) = 0$ en $\beta = \pm n\pi$ para $n = 1, 2, 3, 4 \dots$
- Esto implica

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kD} = \pm \frac{n\lambda}{D}$$

Fraunhofer para línea continua de fuentes

- Notemos que cuando $D \gg \lambda$ entonces la irradiancia decae muy rápido con θ por culpa de β en el denominador
- Esto se ve para valores de $D \approx 1\text{cm}$ para luz visible
- En cuanto a la fase, es como si toda la línea fuera una fuente puntual situada en el centro de la línea a una distancia R de P
- Es como si irradiara una onda circular en el plano $\theta = 0$ (perpendicular a la línea)



Para $D \gg \lambda$ la emisión se da en el plano xz

Fraunhofer para línea continua de fuentes

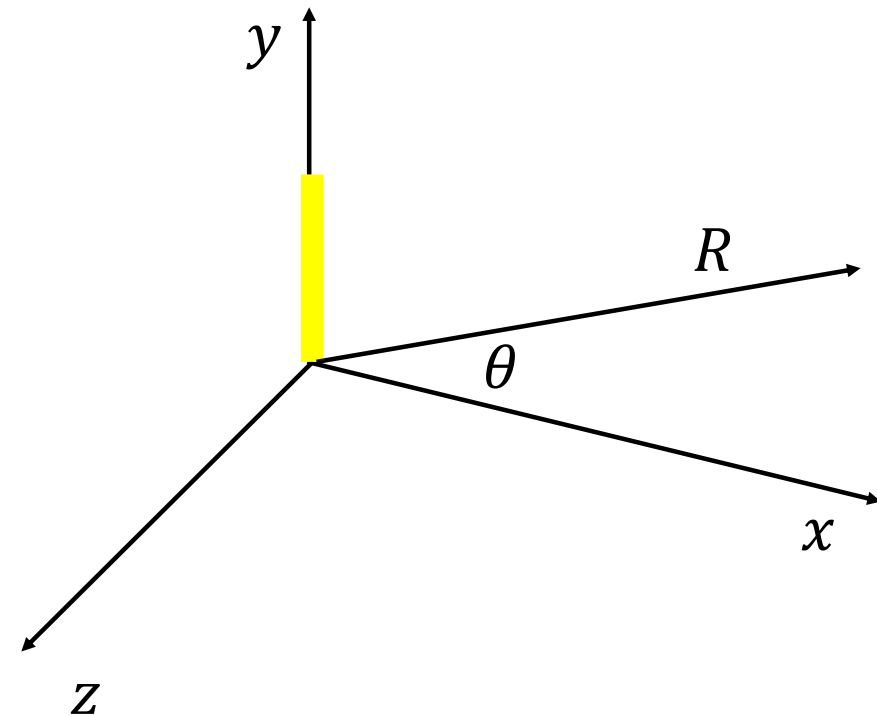
- Si, por el contrario $\lambda \gg D$ entonces β es pequeño y luego:

$$\beta \cong \sin \beta$$

- Entonces:

$$I(\theta) = I(0)$$

- Entonces la irradiancia es constante para todo θ y entonces la línea parece una fuente puntual en el centro emitiendo ondas esféricas

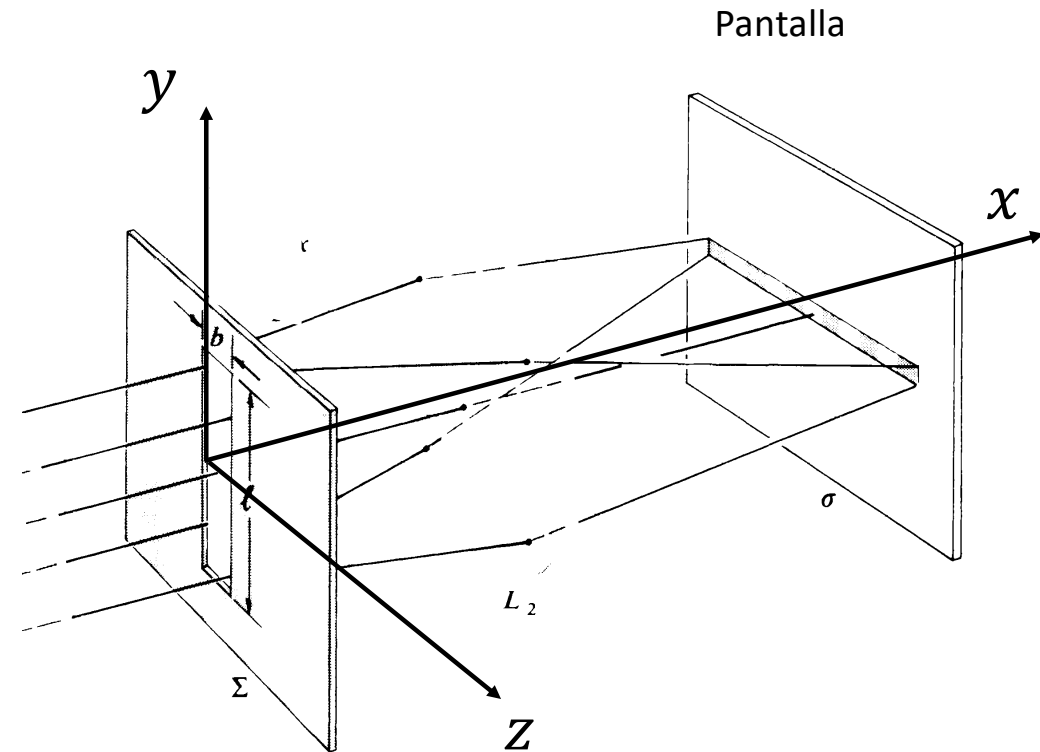


Para $\lambda \gg D$ la irradiancia es la misma para todo θ

Difracción de Fraunhofer de una rendija

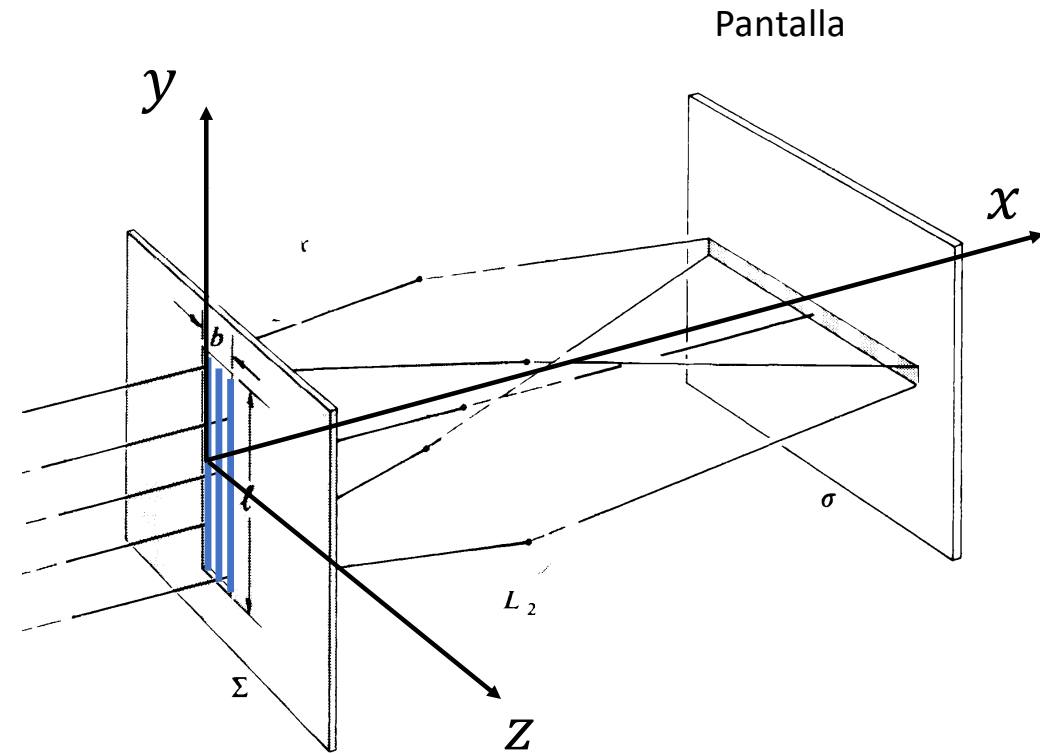
Rendija Única

- Consideremos ahora la difracción de Fraunhofer de ondas planas a través de una abertura rectangular tal que:
- La abertura tiene un largo l de varios cm $l \gg \lambda$.
- El ancho de la abertura b es de algunos cientos de λ .



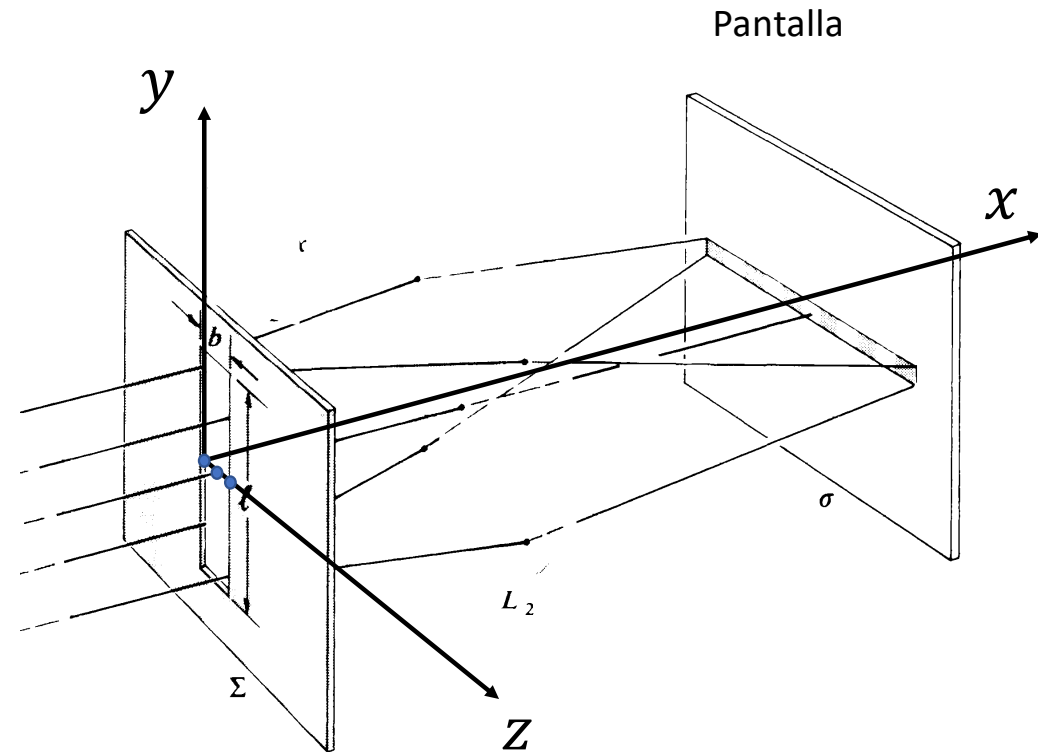
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.



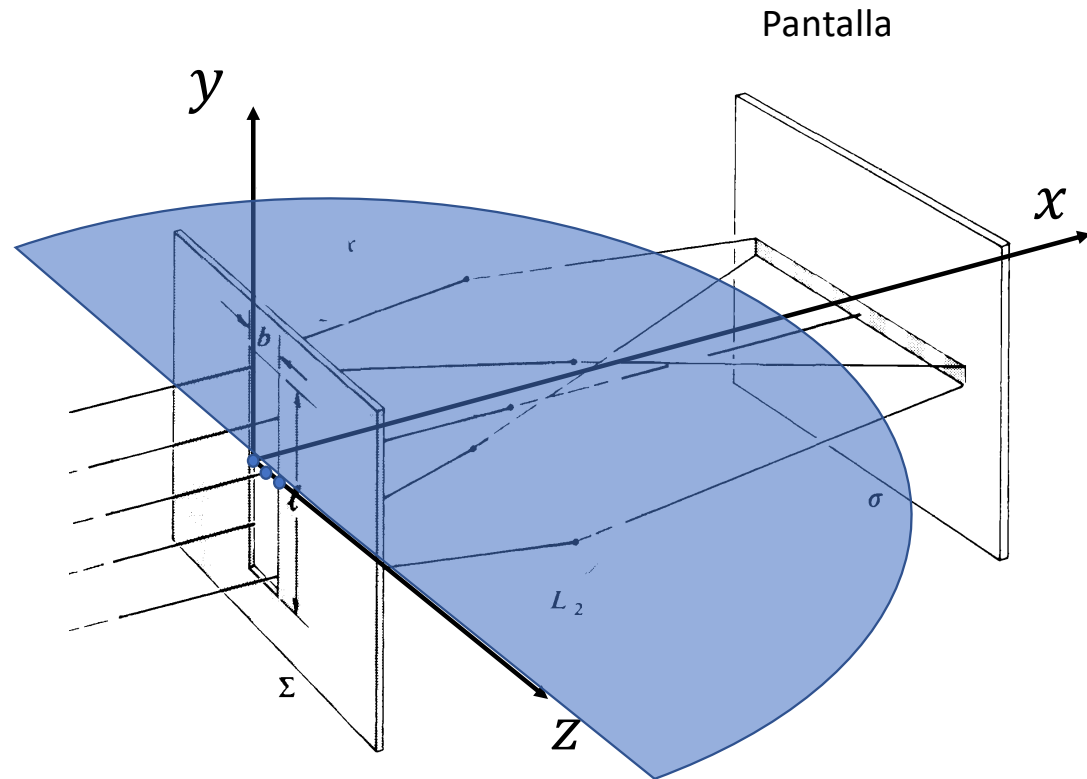
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l \gg \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz



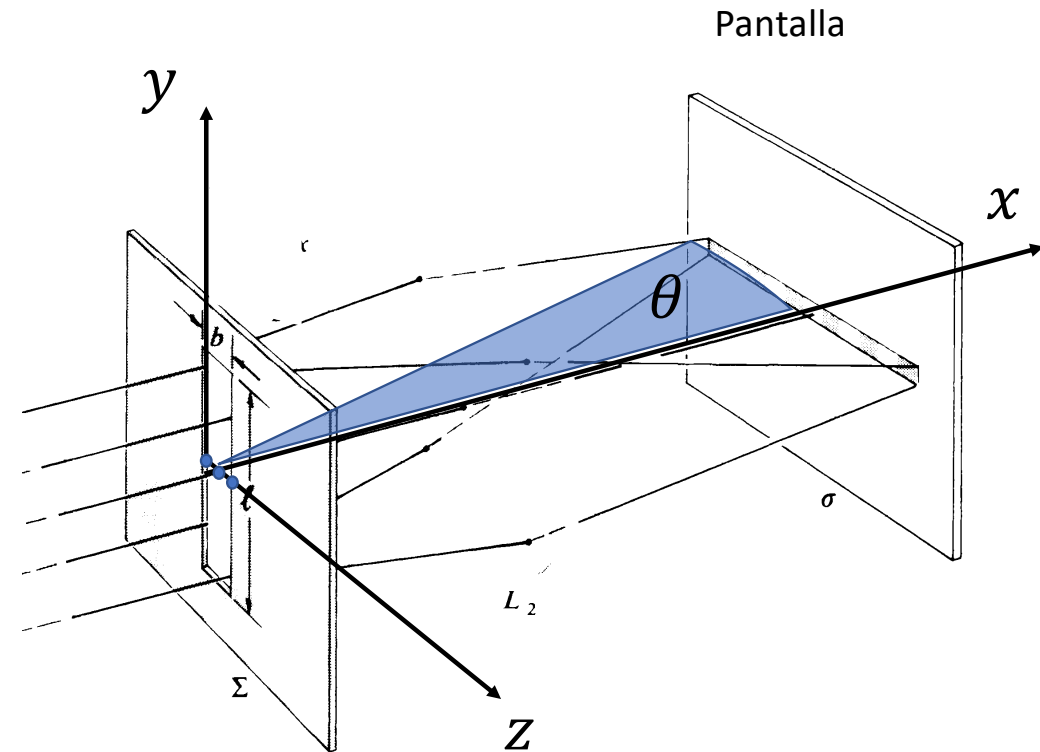
Rendija Única

- Lo que se hace normalmente es dividir la ranura en segmentos verticales de fuentes coherentes como las que vimos anteriormente.
- Por lo que acabamos de ver, cuando $l \gg \lambda$ cada segmento puede representarse como una sola fuente puntual a lo largo del eje z que irradia en el plano xz
- Entonces habrá muy poca difracción en la dirección paralela a los bordes de la rendija.



Rendija Única

- En esas condiciones, el ángulo θ indica la dirección al punto de evaluación de la irradiancia sobre la pantalla.
- θ se mide desde el eje x sobre el plano xz

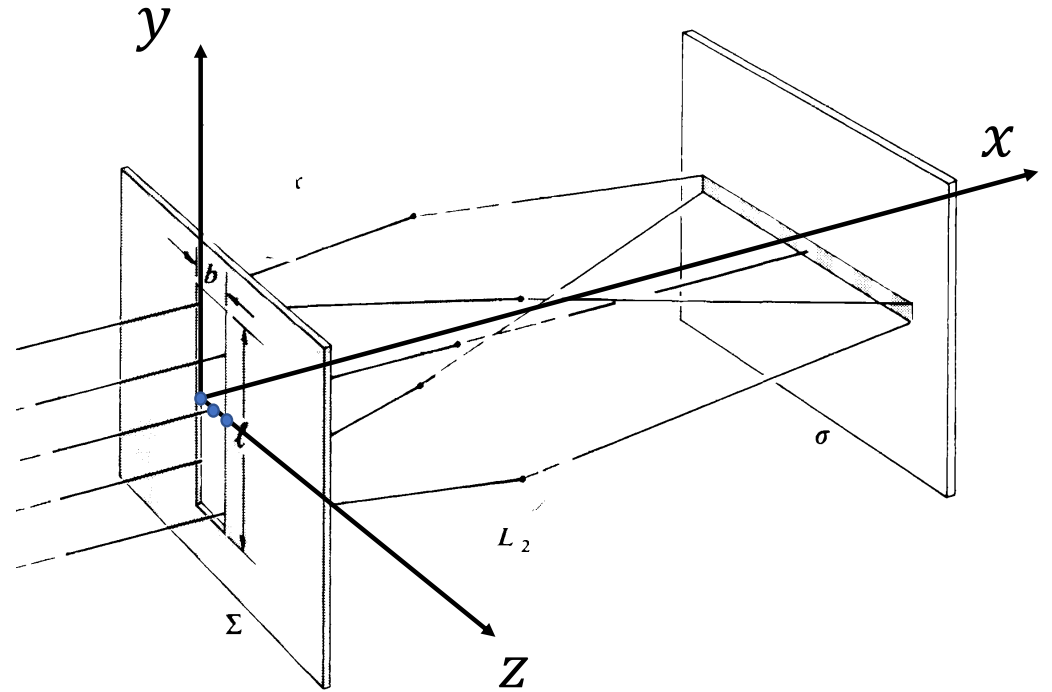


Rendija Única

- Entonces, el problema se limita al de una serie de fuentes coherentes en el eje z a lo largo de una distancia b .
- Este problema ya lo analizamos y la irradiancia resultante es

$$I(\theta) = I(0) \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$$

- donde $\beta = (kb/2) \sin \theta$



En la pantalla el patrón es perpendicular al lado mayor de la rendija

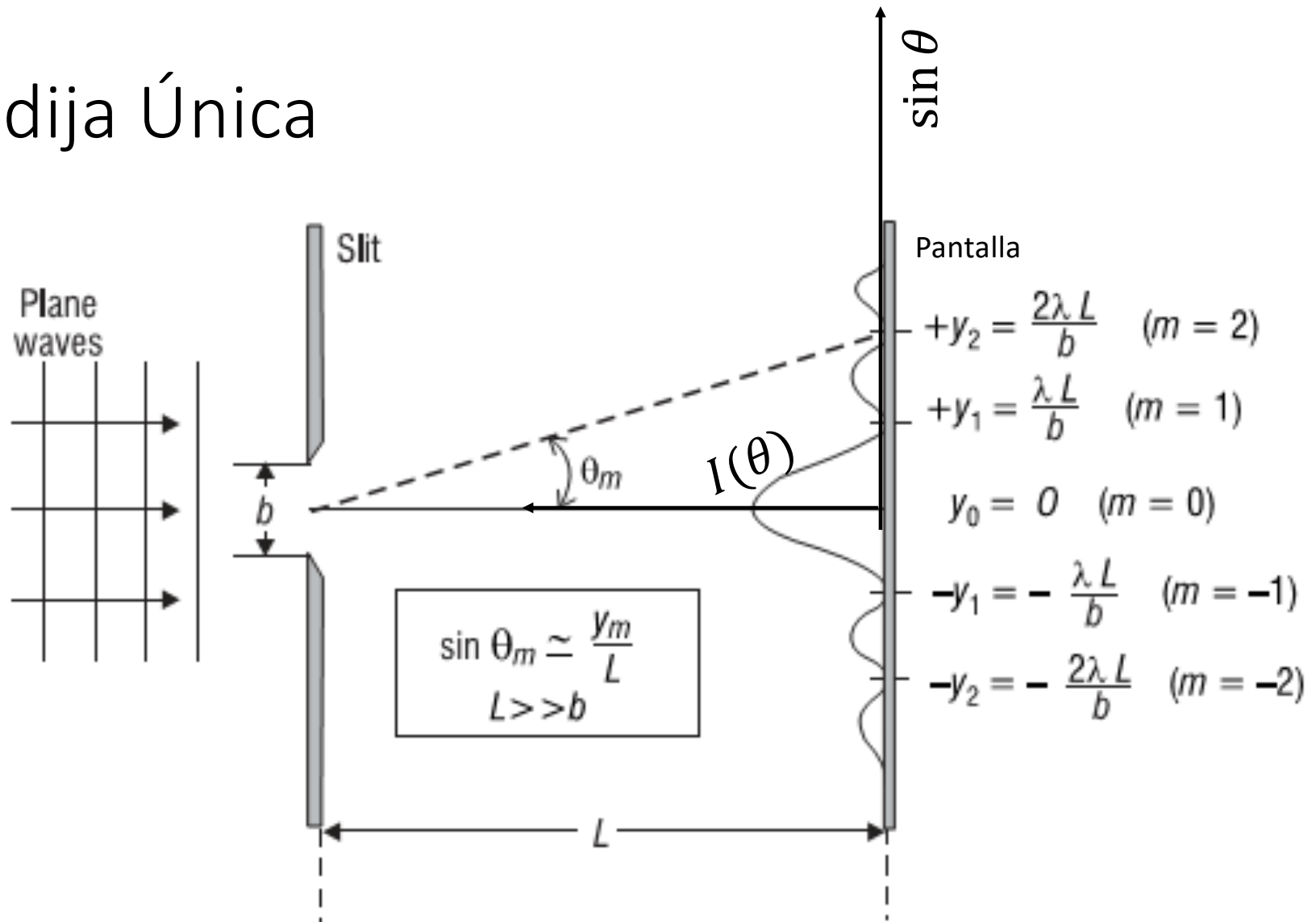


Rendija Única

- Para graficar $I(\theta)$ versus $\sin \theta$ volvamos a ver sus máximos y mínimos.
- $I(\theta) \geq 0$ por definición
- Máximo en $\theta = 0$ lo cual ocurre sí y solo sí $\beta = 0$
- Mínimos ($I = 0$) cuando $\beta = \pm\pi, \pm2\pi \dots \pm n\pi$. Esto implica que los mínimos se hallan en:

$$\sin \theta_{min} = \pm \frac{2n\pi}{kb} = \pm \frac{n\lambda}{b}$$

Rendija Única



Rendija Única

- Ahora, que haya mínimos en $\beta = \pm\pi, \pm2\pi \dots \pm n\pi$ implica que entre ellos debe haber máximos.
- Entre los mínimos de primer orden, en $\sin \theta_{1min} = \pm \frac{\lambda}{b}$ tenemos el máximo central del patrón de difracción.
- ¿Qué pasa con los otros?
- Busquemos otros valores de $I(\beta)$ extremos haciendo $\frac{dI(\beta)}{d\beta} = 0$

Rendija única

- Derivando tenemos:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

- Por un lado tenemos máximo cuando $\beta = 0$ y mínimos cuando

$$\beta = \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \dots$$

Rendija única

- Entonces la otra manera de que esta expresión sea cero:

$$\frac{dI}{d\beta} = I(0) \frac{2 \sin \beta (\beta \cos \beta - \sin \beta)}{\beta^3} = 0$$

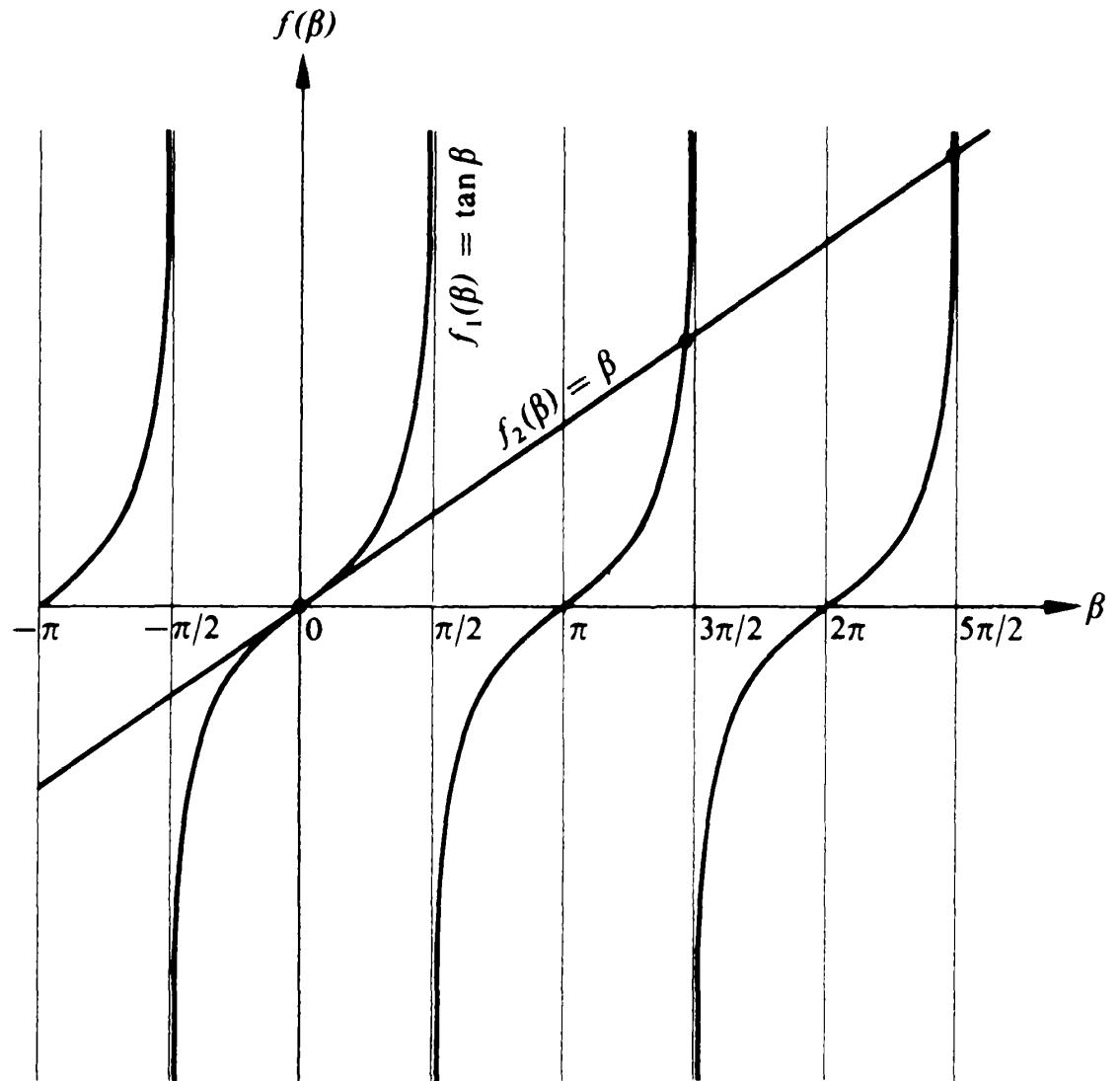
- Es que el término encerrado sea cero. De ahí se obtiene:

$$\beta \cos \beta - \sin \beta = 0$$

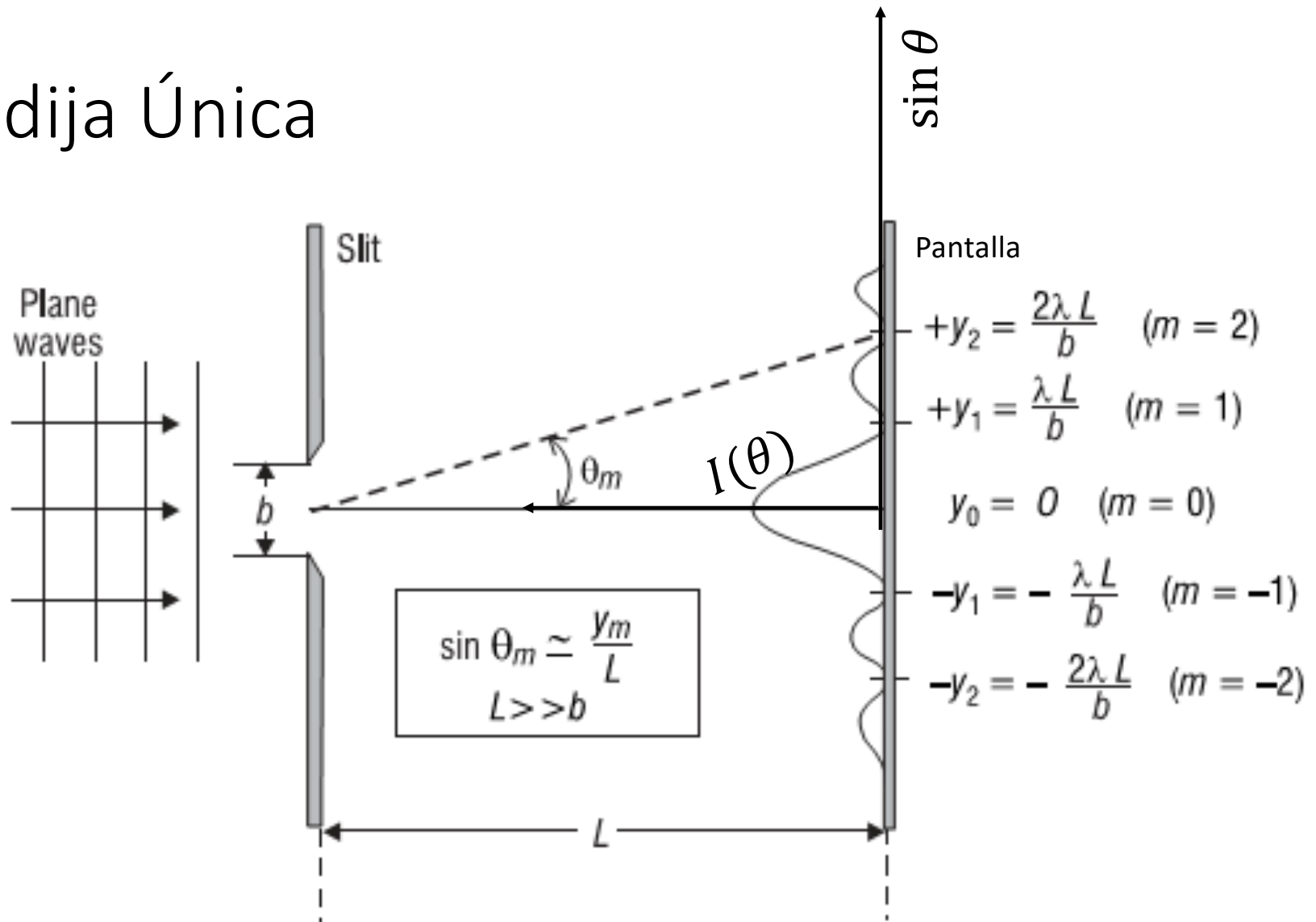
$$\tan \beta = \beta$$

Rendija única

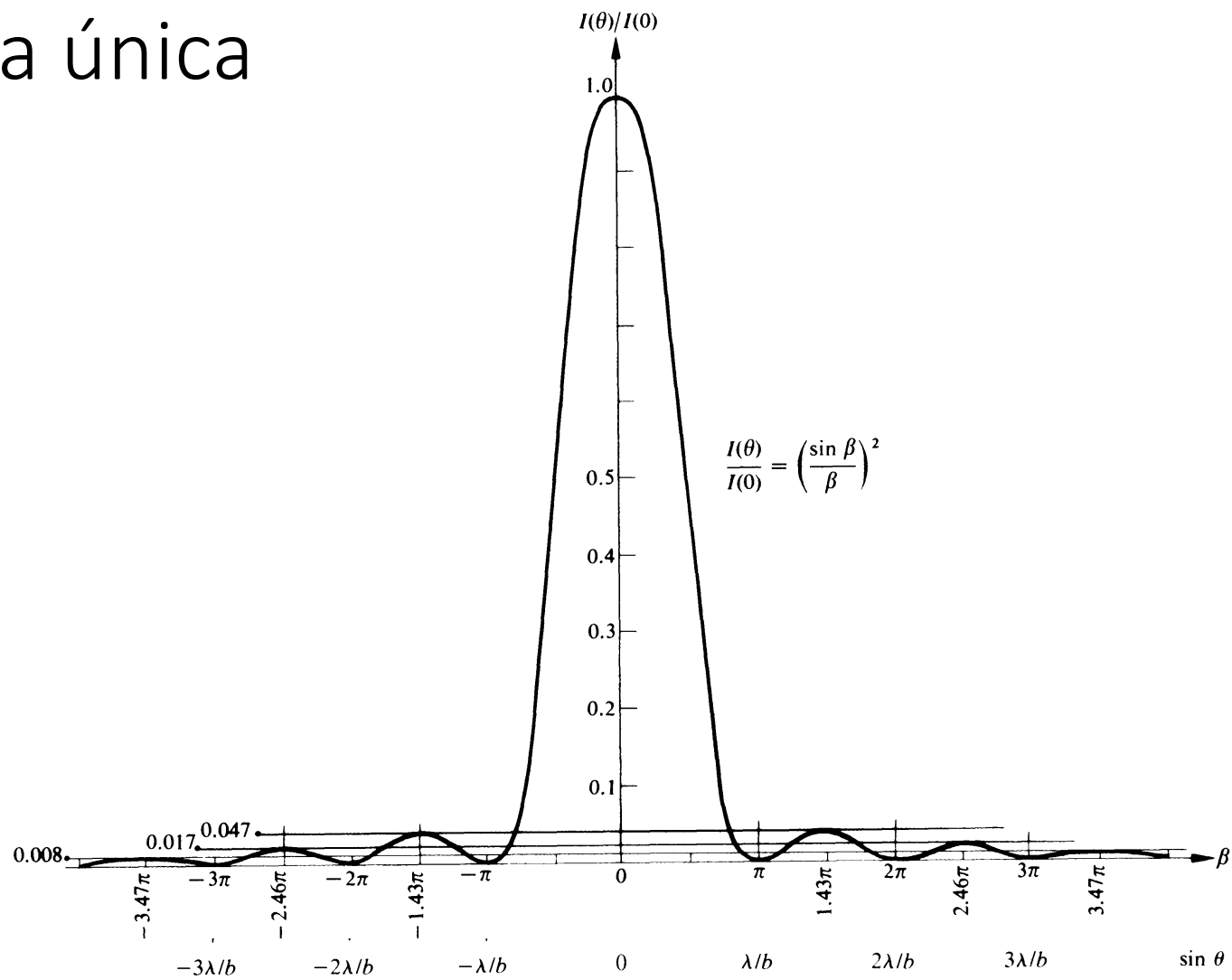
- La ecuación anterior no tiene soluciones analíticas, pero sí numéricas.
- Sus primeras raíces son:
 $\beta = \pm 1,4303\pi,$
 $\pm 2,4590\pi, \pm 3,4707\pi...$
- Esto es casi a mitad de camino entre dos mínimos



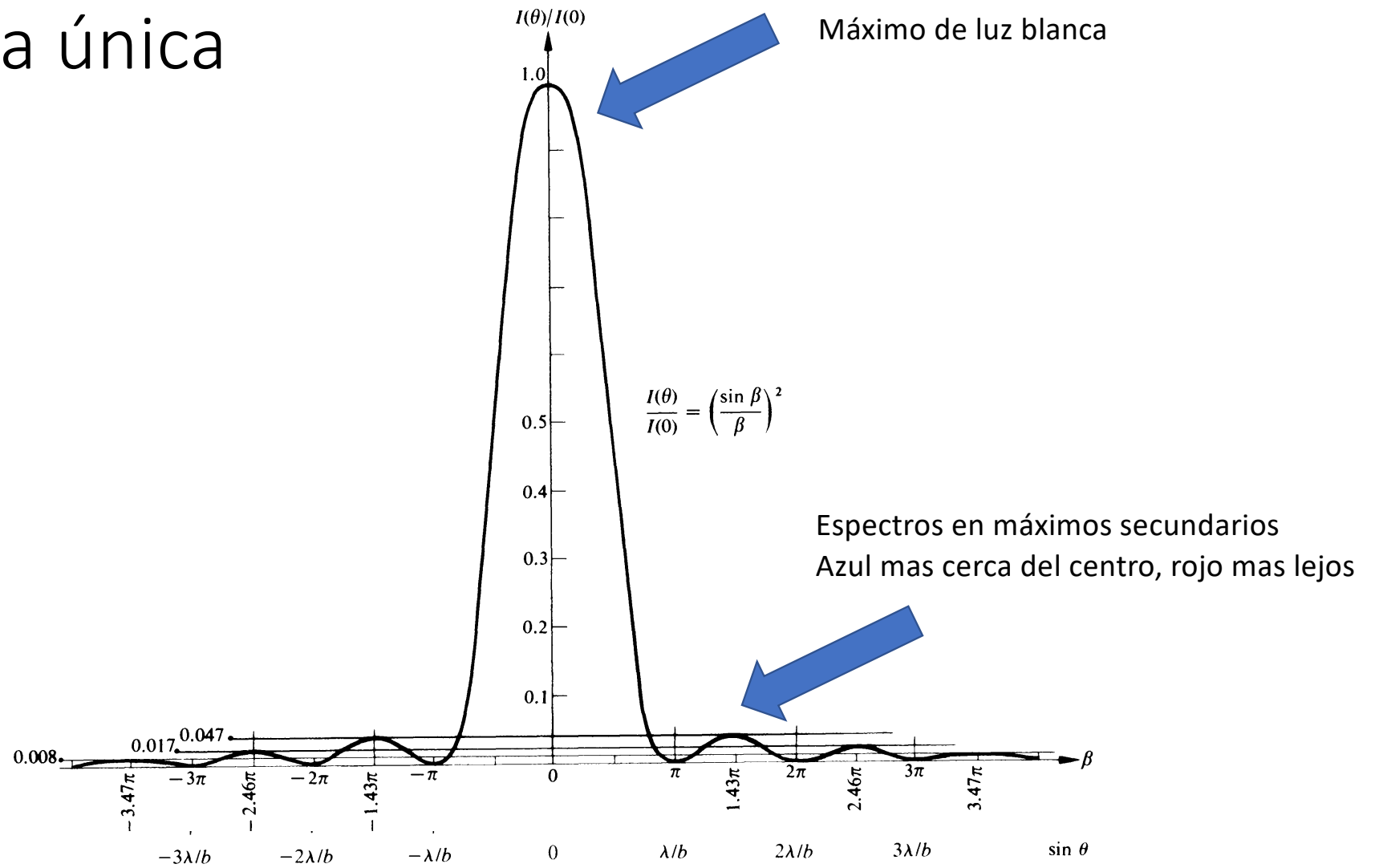
Rendija Única



Rendija única



Rendija única



Luz blanca

Luz monocromática

