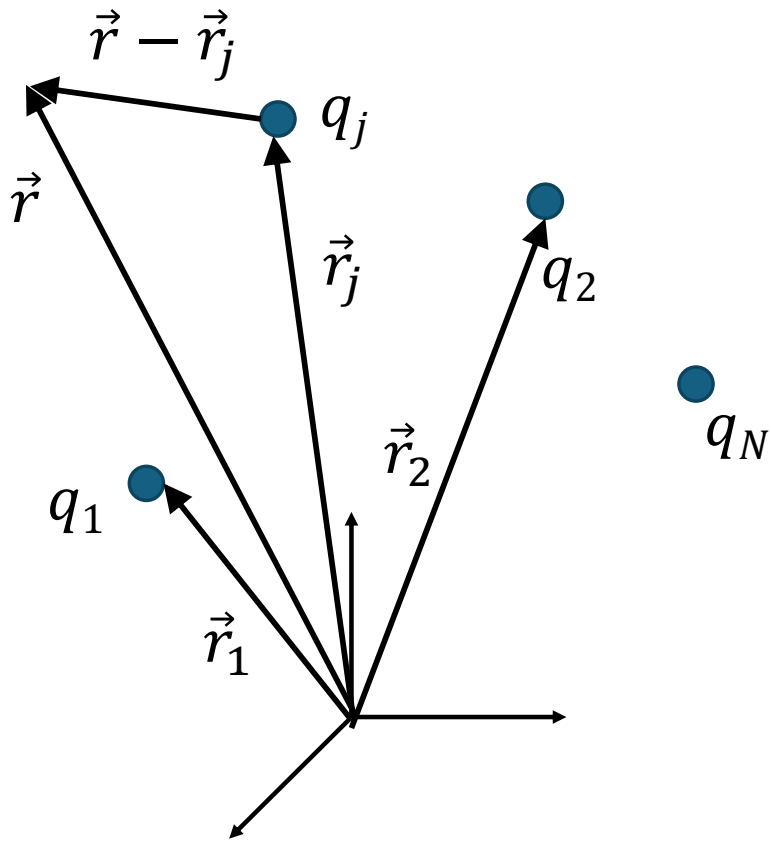


Campo eléctrico de una distribución de N cargas puntuales



- Supongamos un sistema de N cargas puntuales $\{q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_N\}$ en posiciones $\{\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_j, \dots, \vec{r}_N\}$ fijas.
- Cuánto vale el campo eléctrico de este sistema en un punto arbitrario $\vec{r}$?
- La contribución de la carga j -ésima al campo en $\vec{r}$ es

$$\vec{E}_j(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j(\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Campo eléctrico de una distribución de N cargas puntuales

- Por principio de superposición, el campo generado por todas las cargas en el punto $\vec{r}$ es la suma de las contribuciones de cada una

$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{j=1}^N \vec{E}_j(\vec{r})$$

- Reemplazando $\vec{E}_j$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^N \frac{q_j (\vec{r} - \vec{r}_j)}{|\vec{r} - \vec{r}_j|^3}$$

Energía potencial electrostática

Trabajo de la fuerza de Coulomb

- El trabajo de una fuerza $\vec{F}$ es una integral de línea a lo largo de una curva C desde una posición inicial $\vec{r}_i$ a una final $\vec{r}_f$.

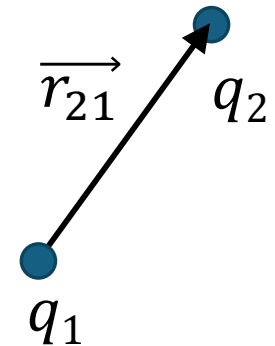
$$W = \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

Diferencial de camino



Trabajo de la fuerza de Coulomb

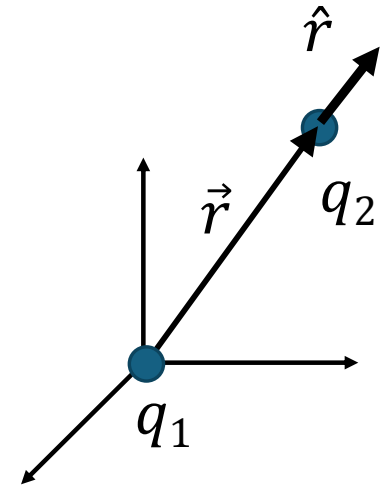
- Supongamos dos cargas q_1 y q_2
- El vector $\vec{r}_{21}$ va de q_1 a q_2 .
- Calculemos el **trabajo de la fuerza de Coulomb $\vec{F}_2$ aplicada sobre la carga q_2 a lo largo de un camino arbitrario que tiene como posición inicial $\vec{r}_{21}$ y como posición final $\vec{R}$ tal que $|\vec{R}| \rightarrow \infty$.**



Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- Nos paramos en q_1 y usamos coordenadas esféricas.
- Sea $\vec{r} = r \hat{r}$ una posición arbitraria de q_2 medida desde q_1 .
- La fuerza sobre q_2 entonces se escribe como:

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 \hat{r}}{r^2}$$



Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- Sea $\vec{dl}$ cual sea el camino, el trabajo va a depender de la componente radial de $\vec{dl}$ es decir el diferencial de coordenada radial dr

$$W = \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 (\hat{r} \cdot \vec{dl})}{r^2}$$

- Como $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1$

$$W = \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 dr}{r^2} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_{21}}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

- La integral $\int \frac{dr}{r^2}$ es $-\frac{1}{r}$ Entonces, evaluando obtenemos

$$W = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$

Notemos que $W > 0$ cuando q_1 y q_2 son de igual signo y $W < 0$ cuando tienen signos opuestos.

Trabajo de las fuerzas electrostáticas

- Este trabajo no depende del camino elegido sino de las posiciones iniciales y finales.
- Por lo tanto, la fuerza electrostática, al igual que **la fuerza gravitatoria es conservativa.**
- **Por lo tanto, esta fuerza tiene asociada una energía potencial que cambia de manera opuesta al trabajo de la fuerza.**

Teorema del Gradiente y Energía potencial

El teorema del gradiente establece que si un campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo, entonces existe una función escalar $U(r)$ tal que:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Y la siguiente integral de línea no depende del camino

$$\Delta U = U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i) = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

En electrostática, $\vec{F}$ es la fuerza de Coulomb y ΔU la variación en energía potencial

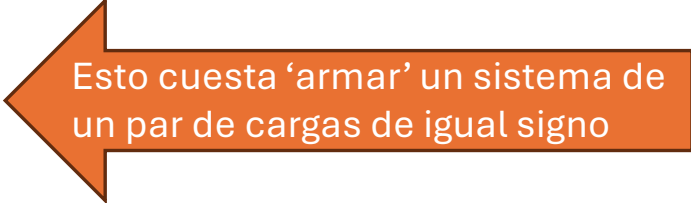
Energía potencial electrostática

- La variación de energía potencial electrostática es igual a menos el trabajo de la fuerza de Coulomb:

$$\Delta U = U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_i) = -W = - \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

- Recordamos el cálculo de W de la fuerza de Coulomb sobre la carga q_2
 - Si $W > 0$, el **trabajo positivo** redunda en una **variación negativa de la energía potencial**.
 - Si $W < 0$, el **trabajo negativo** redunda en una **variación positiva de la energía potencial**.
- En particular, si traemos una carga q_2 desde muy lejos de signo igual a una existente q_1 la energía potencial aumenta o se acumula en una cantidad:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{21}}$$



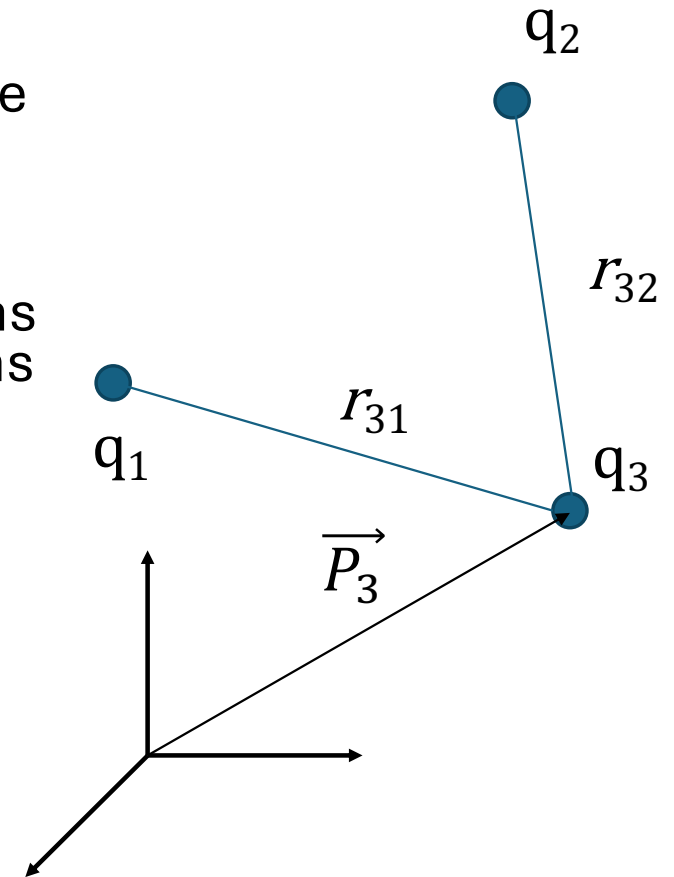
Esto cuesta 'armar' un sistema de un par de cargas de igual signo

Energía de un sistema de 3 cargas

- La energía invertida en armar un sistema de más de dos cargas es fácil de calcular porque las fuerzas electrostáticas trabajan de a pares.
- Entonces, la energía total es simplemente la suma de las energías acumuladas al traer cada una de las cargas con las fuerzas que les hace cada una de las otras que ya están en el grupo hasta su posición final.
- Por ejemplo, para tres cargas $q_1 q_2 q_3$ la energía electrostática acumulada U es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{21}} + \frac{q_1 q_3}{r_{31}} + \frac{q_2 q_3}{r_{32}} \right]$$

- Donde r_{ij} es la distancia final entre q_i y q_j



La energía
potencial
eléctrica U de
un sistema

- No depende del orden de colocación de las cargas
- Es independiente del camino seguido por cada carga



**Dependerá únicamente de la
disposición final de las cargas**

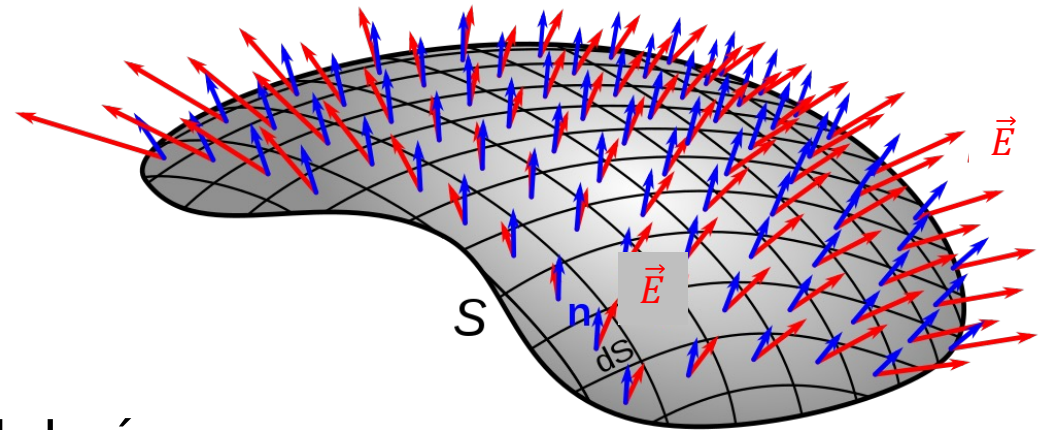
¿Hay una manera más fácil de calcular el campo eléctrico para distribuciones de carga simétricas?

Flujo de campo eléctrico a través de una superficie

- El flujo Φ de campo eléctrico a través de una superficie S se define como:

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \iint_S \vec{E} \cdot \hat{n} ds$$

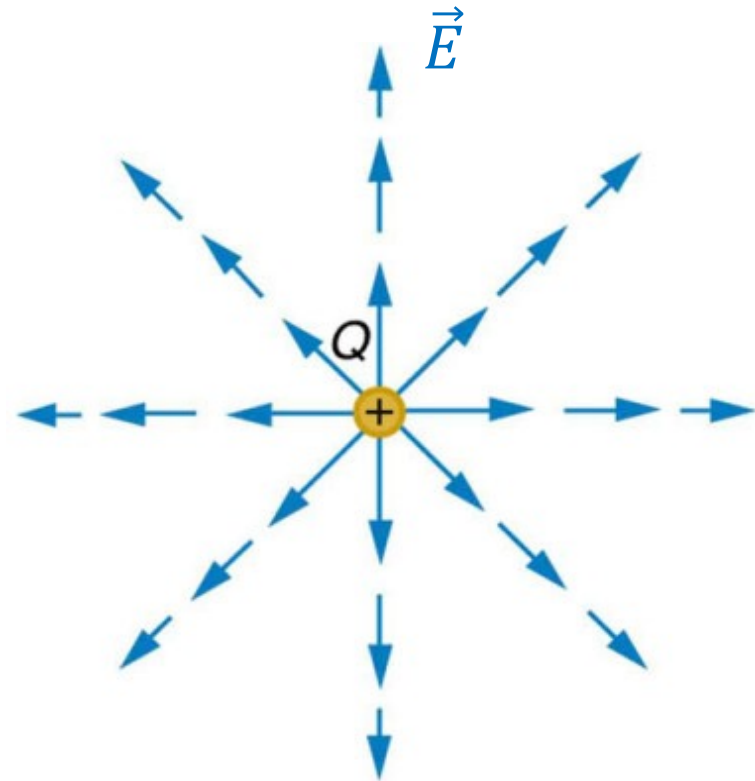
- Donde $\vec{ds} = \hat{n} ds$ es el diferencial de área perpendicular al plano tangente a S en cada punto.



Esfera centrada en carga puntual Q

- En coordenadas esféricas, el campo generado a una distancia r arbitrario es siempre radial y vale:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

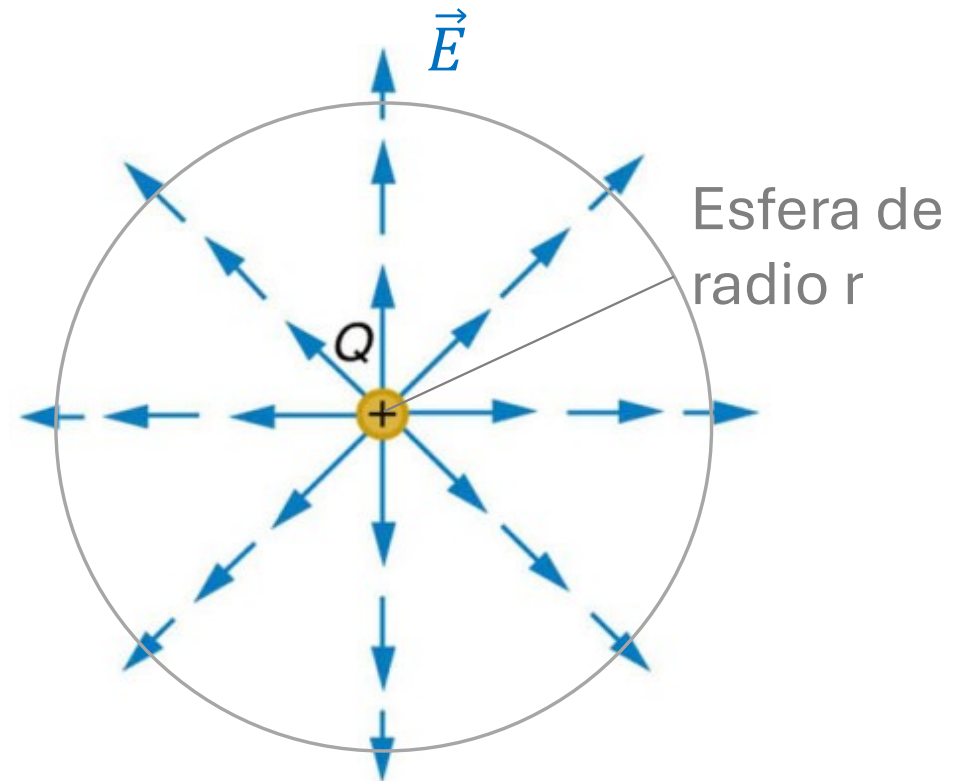


Esfera centrada en carga puntual Q

- Calculemos el flujo del campo eléctrico a través de una esfera de radio r arbitrario :

$$\Phi = \iint \vec{E} \cdot \vec{ds}$$

Superficie de
la esfera

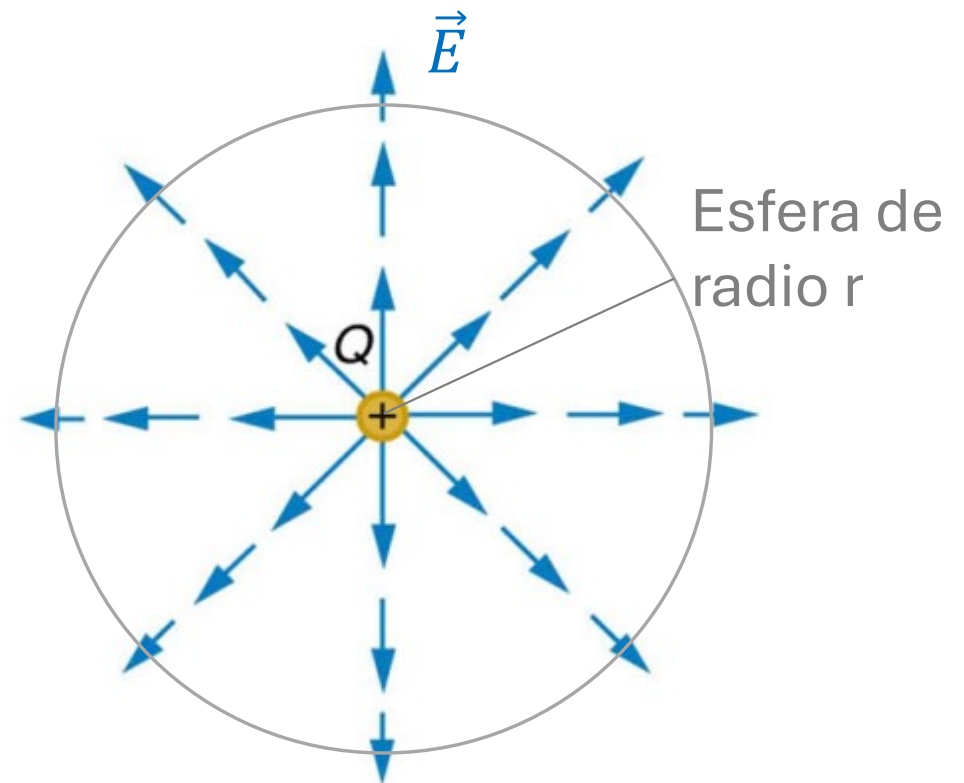


Esfera centrada en carga puntual Q

- Sobre la esfera, $\vec{E}$ apunta siempre radialmente y su módulo vale lo mismo.
- Reemplazando en el flujo:

$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot \vec{ds}$$

Superficie de
la esfera

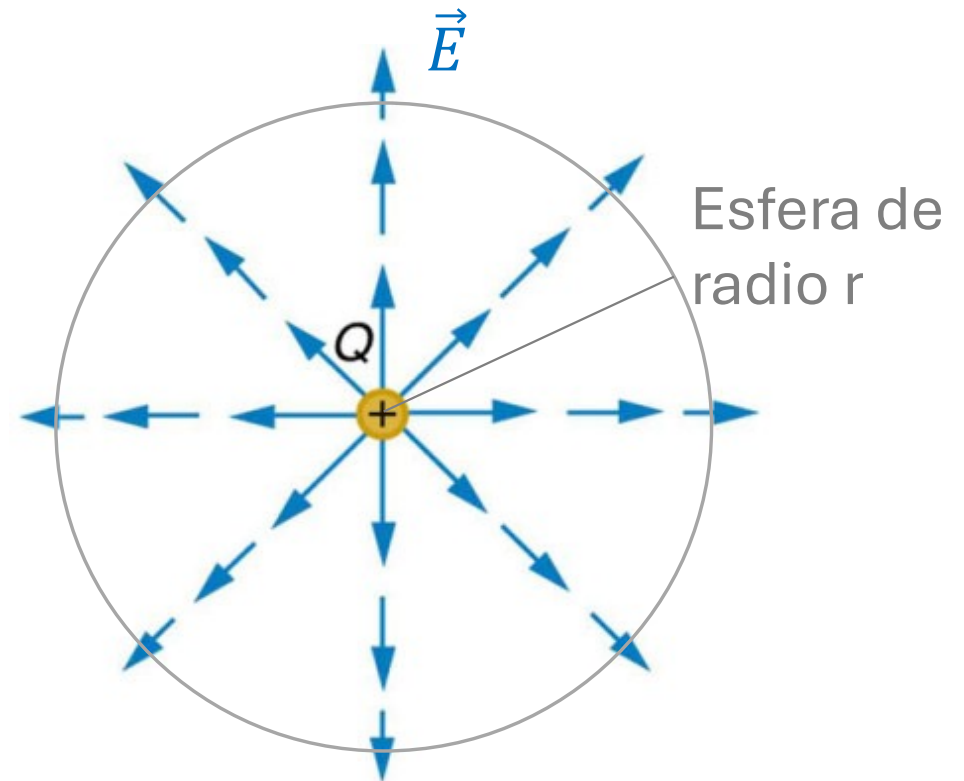


Esfera centrada en carga puntual Q

- El diferencial de área en la esfera apunta radialmente y vale $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$

$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$$

Superficie de
la esfera



Esfera centrada en carga puntual Q

- Partiendo de:

$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, \hat{r}$$

Superficie de
la esfera

- Reorganizando y simplificando:

$$\Phi = \iint \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

Superficie de
la esfera

Flujo eléctrico de una carga Q a través de una esfera de radio r

- La primera integral da 2, mientras que la segunda vale 2π , entonces

$$\Phi = \frac{1}{\cancel{4\pi}\epsilon_0} Q \cancel{4\pi} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

- Vemos que el resultado no depende del radio de la esfera, o sea que es el mismo para cualquier valor de r .

Ley de Gauss

- Supongamos una superficie cerrada S que encierra un volumen V
- Se verifica que el flujo del campo eléctrico $\vec{E}$ a través de S es proporcional a la carga total encerrada dentro de S (es decir en el volumen V)

$$\oint_{\text{Superficie cerrada } S} \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^N q_i = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_{\text{Volumen encerrado por } S} \rho dV$$



Carl Friederich
Gauss
(1777-1855)

Teorema y Ley de Gauss

- Dado un campo $\vec{E}$ y una superficie cerrada S que envuelve un volumen V

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{da} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} dV$$

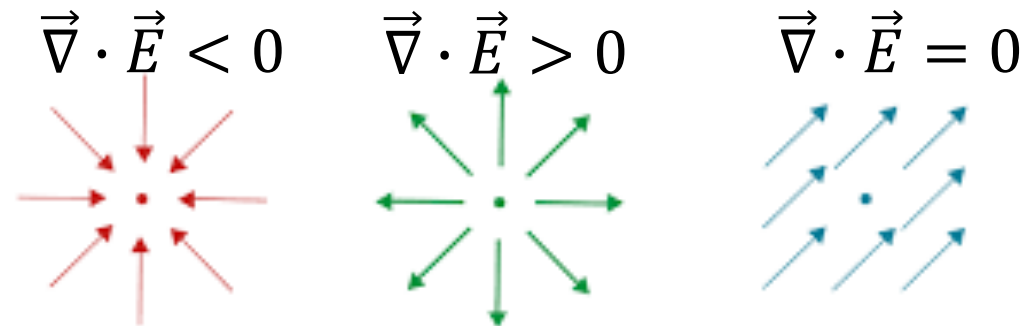
- Entonces, de la ley de Gauss deducimos que:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Esta es la versión diferencial de la Ley de Gauss. Vale punto a punto

Ley de Gauss y Divergencia de $\vec{E}$

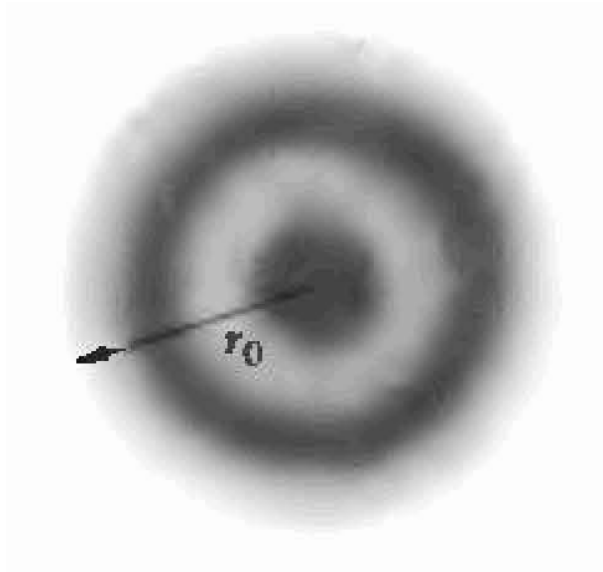
- La divergencia de un campo en un punto dado nos dice gráficamente la medida en la que el campo converge o no a ese punto. Veamos tres ejemplos:



- Esto dice que los puntos en donde hay densidad de carga positiva son manantiales de campo eléctrico y donde hay densidad negativa son ‘sumideros’

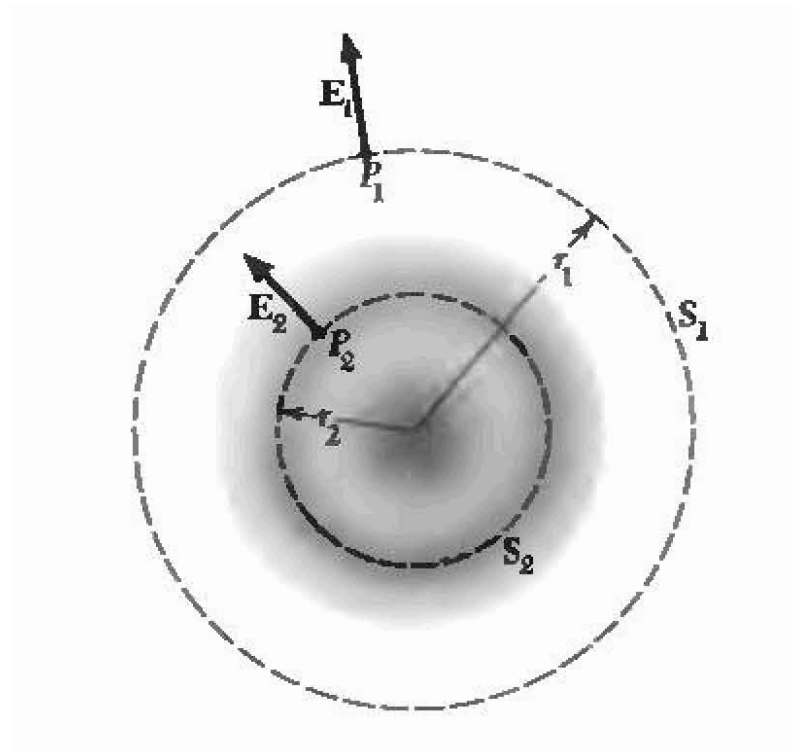
Otro ejemplo

Campo de una distribución esférica de carga



- Supongamos una distribución de carga ρ como la de la figura.
- La carga varía solamente con distancia radial y termina en $r = r_0$.
- Calculemos el campo en todo el espacio aprovechando la Ley de Gauss y la simetría del sistema.

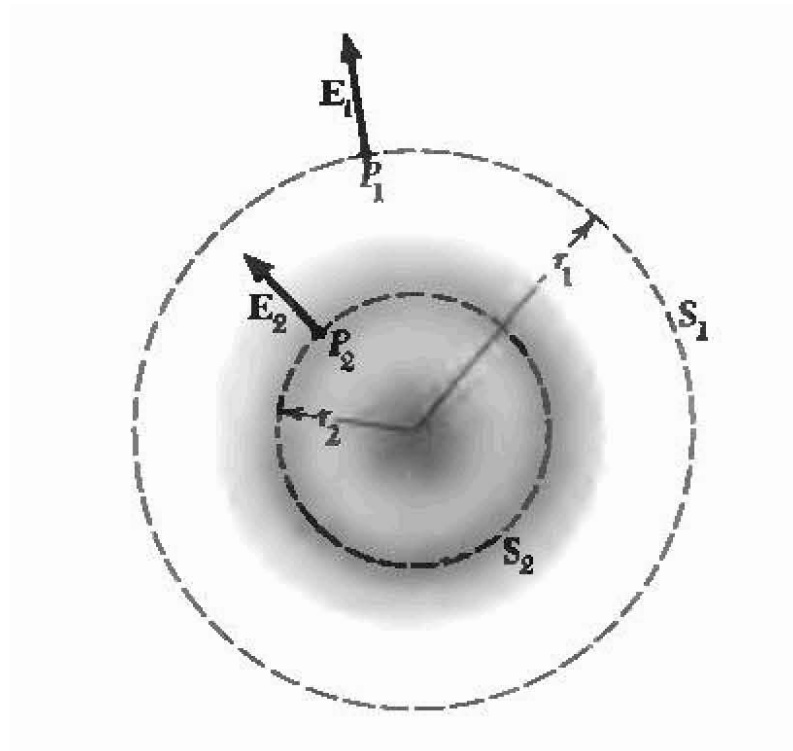
Campo de una distribución esférica de carga



- El sistema tiene simetría esférica (rotar la carga alrededor del origen no cambia nada).
- El campo debe ser radial y depender sólo de la distancia r .

$$\vec{E} = E(r) \hat{r}$$

Campo de una distribución esférica de carga



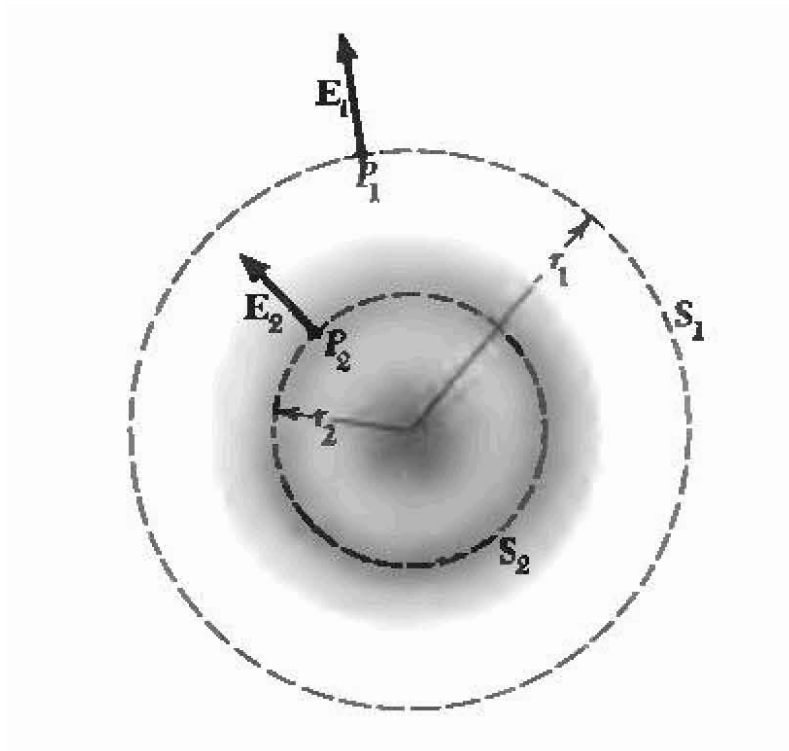
- Sobre cualquier esfera centrada en el origen el módulo de E vale siempre lo mismo.
- Si E_1 es el módulo del campo sobre la esfera S_1 de radio r_1 , el flujo será:

$$\Phi = \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{ds} = E_1 \int_{S_1} \hat{r} \cdot \hat{r} ds = 4\pi r_1^2 E_1$$

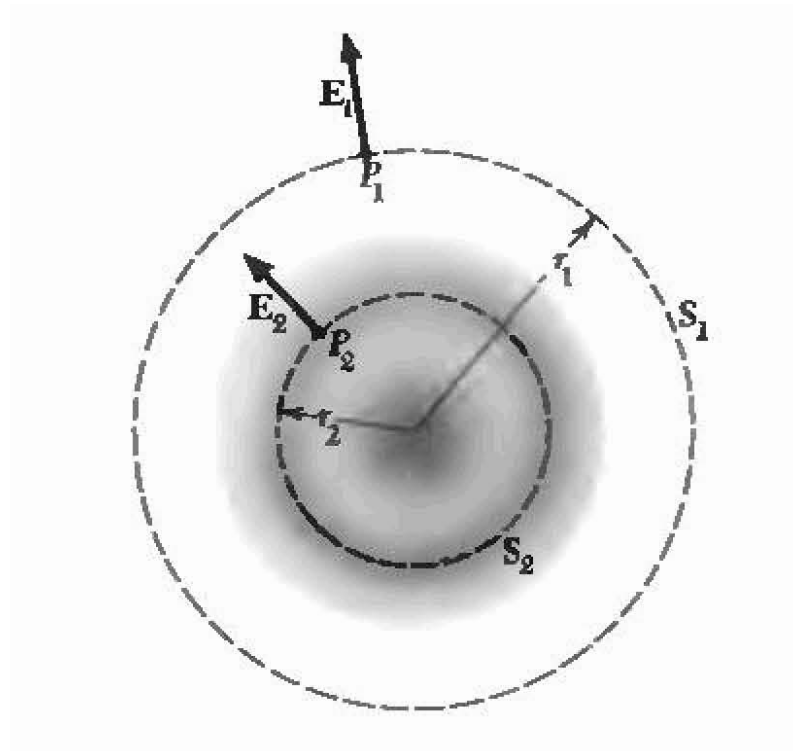
Campo de una distribución esférica de carga

- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{\text{carga encerrada por } S_1}{\epsilon_0}$$



Campo de una distribución esférica de carga



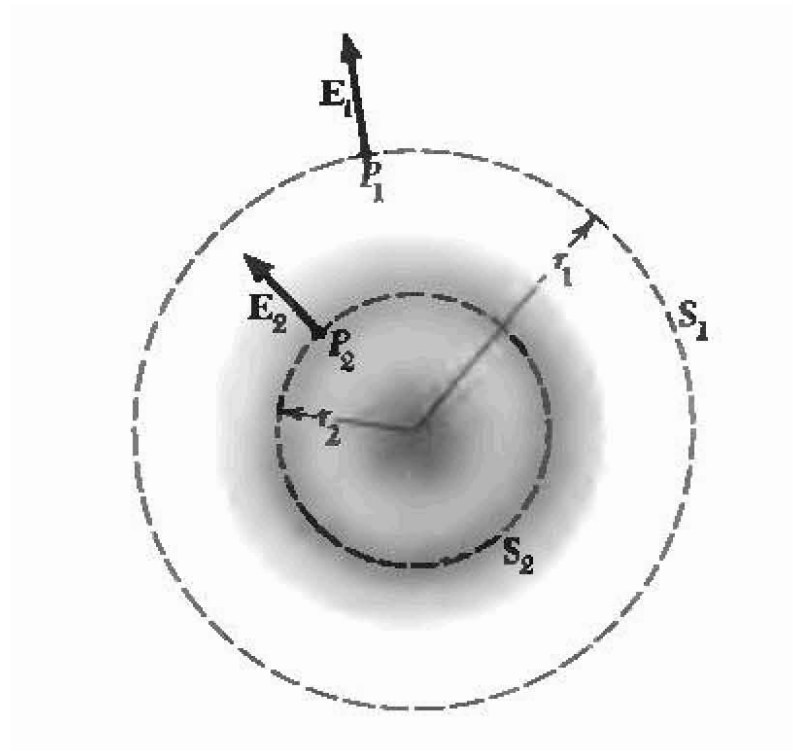
- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{\text{carga encerrada por } S_1}{\epsilon_0}$$

- Por lo tanto

$$E_1 = \frac{\text{carga encerrada por } S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Campo de una distribución esférica de carga



- Por la Ley de Gauss

$$\Phi = 4\pi r_1^2 E_1 = \frac{\text{carga encerrada por } S_1}{\epsilon_0}$$

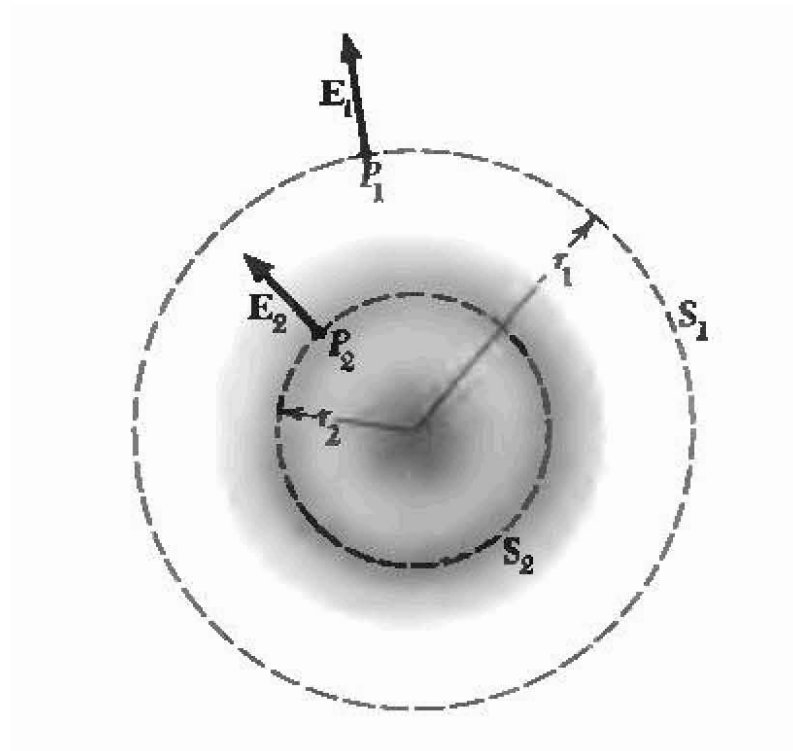
- Por lo tanto

$$E_1 = \frac{\text{carga encerrada por } S_1}{4\pi r_1^2 \epsilon_0}$$

Sirve para
todo $r_1 > r_0$

Es como si toda la carga dentro de S_1 estuviese concentrada en el origen

Campo de una distribución esférica de carga



- Análogamente, si E_2 es el módulo del campo sobre la esfera S_2 de radio r_2

$$E_2 = \frac{\text{carga encerrada por } S_2}{4\pi r_2^2 \epsilon_0}$$

- Depende de cuánta carga encierre S_2

$$\text{Carga encerrada por } S_2 = \int_{\text{Volumen encerrado Por } S_2} \rho \, dV$$

- No depende de la carga fuera de S_2 !