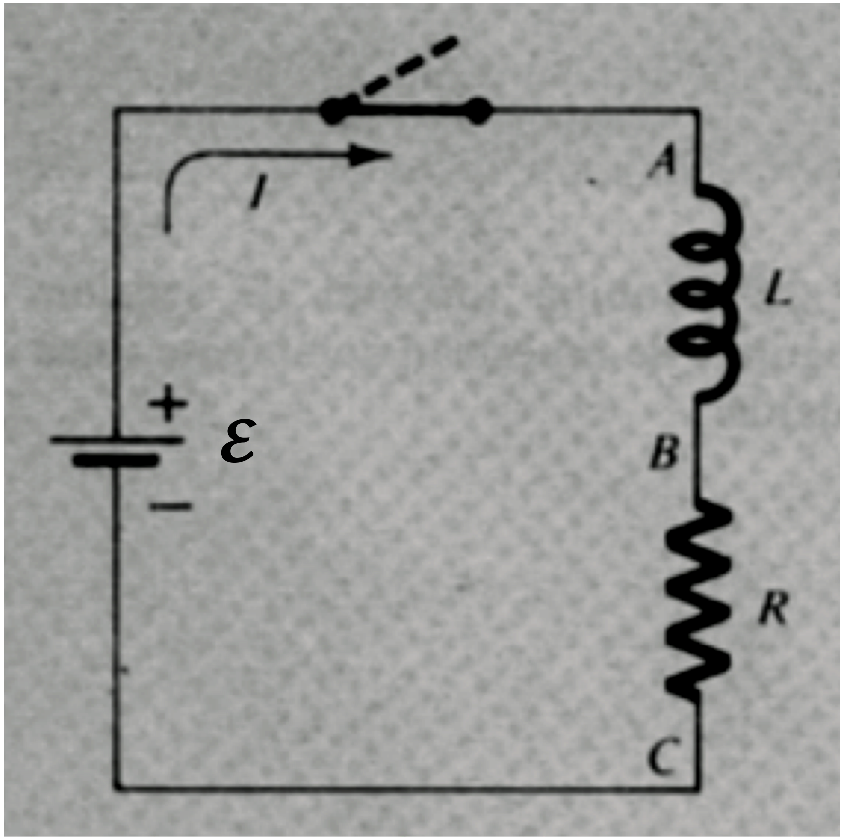
Circuitos con autoinductancias

- Supongamos el siguiente circuito que consta de una autoinductancia L y una resistencia R en serie.
- La resistencia R puede ser la de todo el circuito, no importa donde la ubique.
- L puede representar la autoinductancia de la bobina más la del circuito. No tiene resistencia.
- Un switch permite prender o apagar la corriente I.
- La batería tiene una FEM de valor $\mathcal{E}$



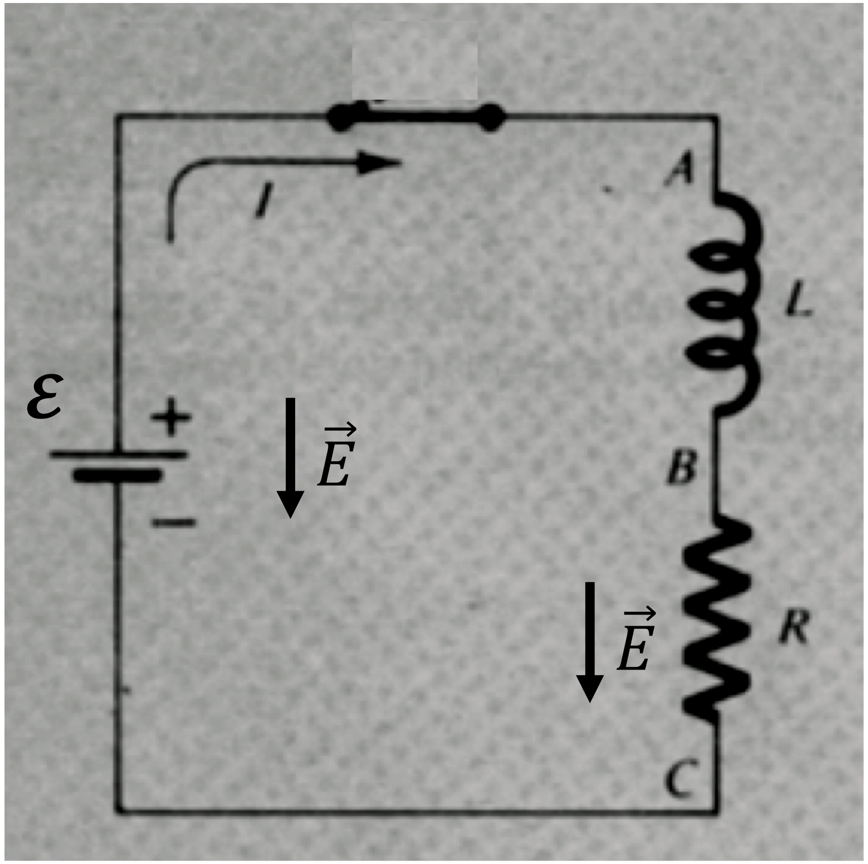
Circuitos con autoinductancias

- Cerramos el switch.
- Si la corriente varía de la manera $\frac{dI}{dt}$ se inducirá una $FEM_{ind} = -L\frac{dI}{dt}$.
- Entonces, la ley de Faraday queda:

$$\oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl} = -L\frac{dI}{dt}$$

- Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente tenemos:

$$-\mathcal{E} + IR = -L\frac{dI}{dt}$$



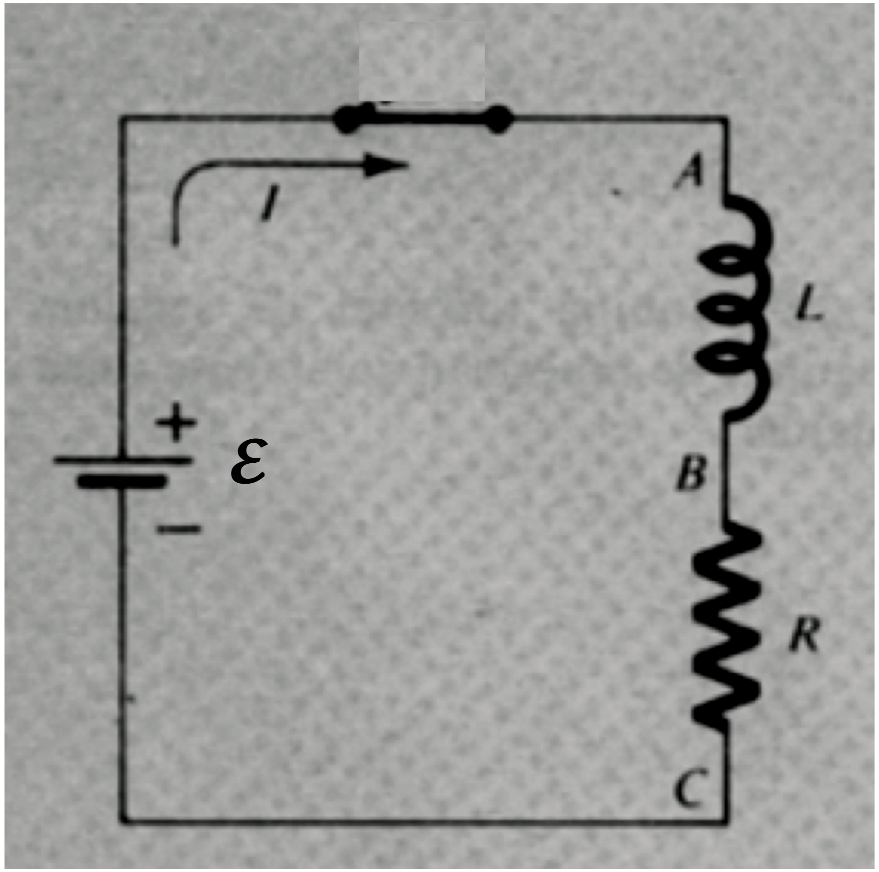
Circuitos con autoinductancias

- Formalmente esto es como una ley de Kirchhoff pero con los signos cambiados y ahora con un término dependiente de L.
- Multiplicando por -1 tenemos

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} - IR = L\frac{dI}{dt}$$

o bien

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} - IR - L\frac{dI}{dt} = 0$$



Circuitos con autoinductancias

- La ecuación diferencial ordinaria de primer orden inhomogénea

$$\frac{dy}{dx} = ay(x) + b$$

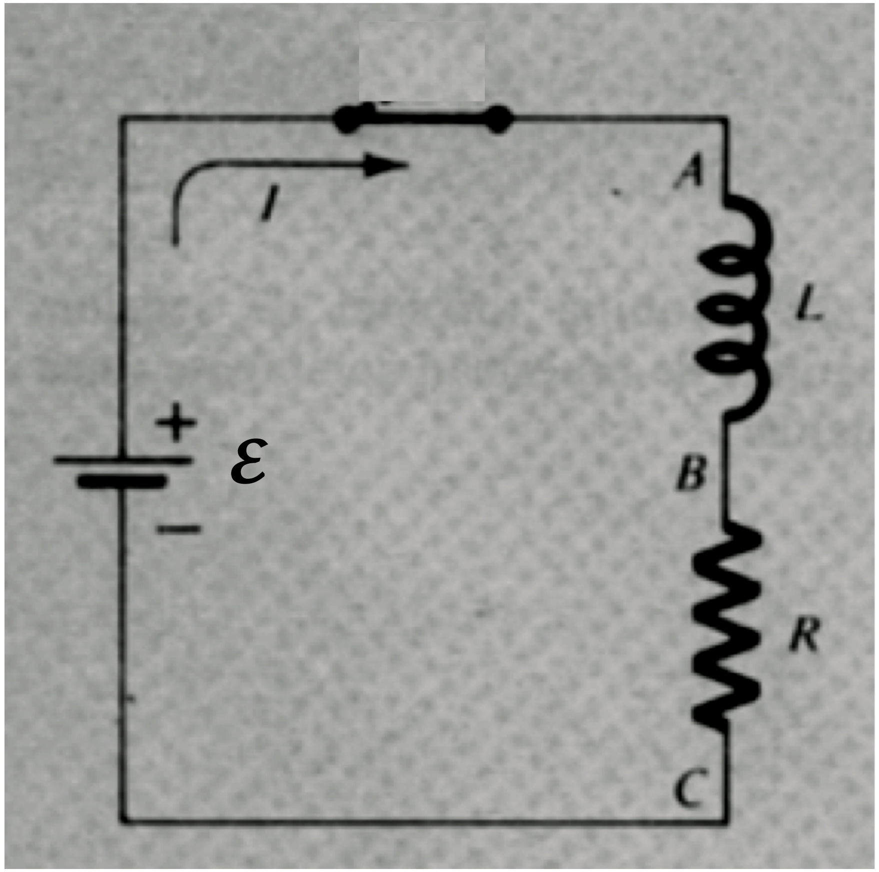
tiene como solución la suma de la solución general de la homogénea

$$\frac{dy_h}{dx} = ay_h$$

más una solución de la inhomogénea

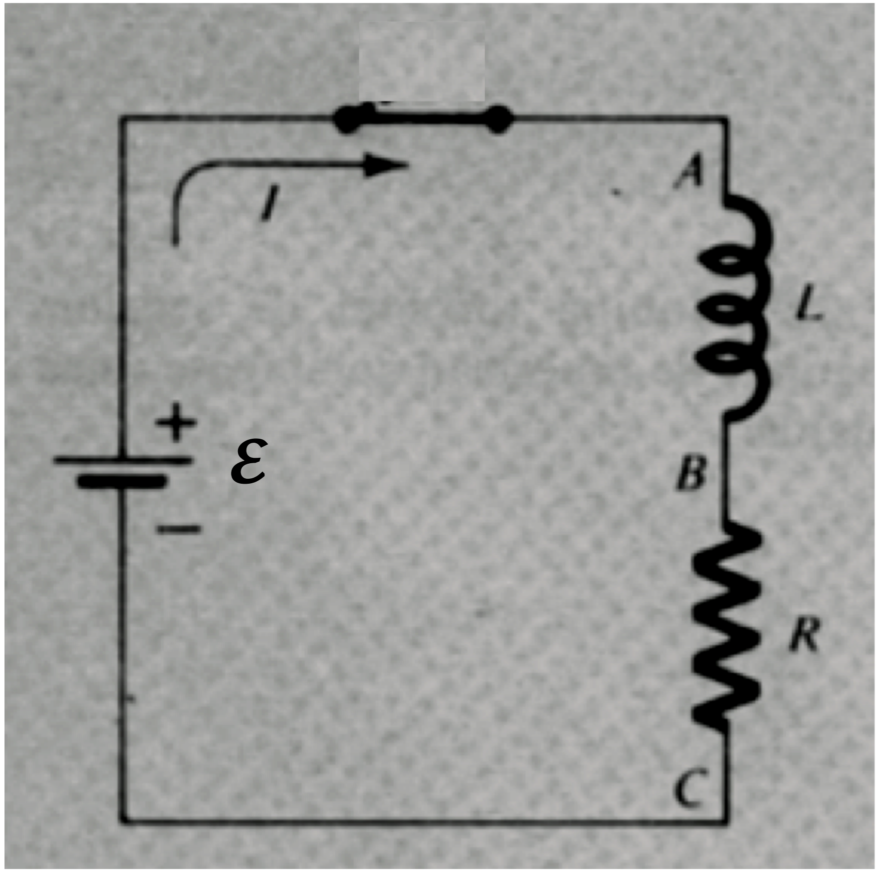
$$y = y_h + y_i$$

donde $y_i = -\frac{b}{a}$



Circuitos con autoinductancias

- En nuestro caso: $I = y, t = x, a = -\frac{R}{L}, b = \frac{\mathcal{E}}{L}$



La homogénea es

$$\frac{dI_h}{dt} = -\frac{R}{L} I_h$$

entonces

$$I_h = Ce^{-\frac{R}{L}t}$$

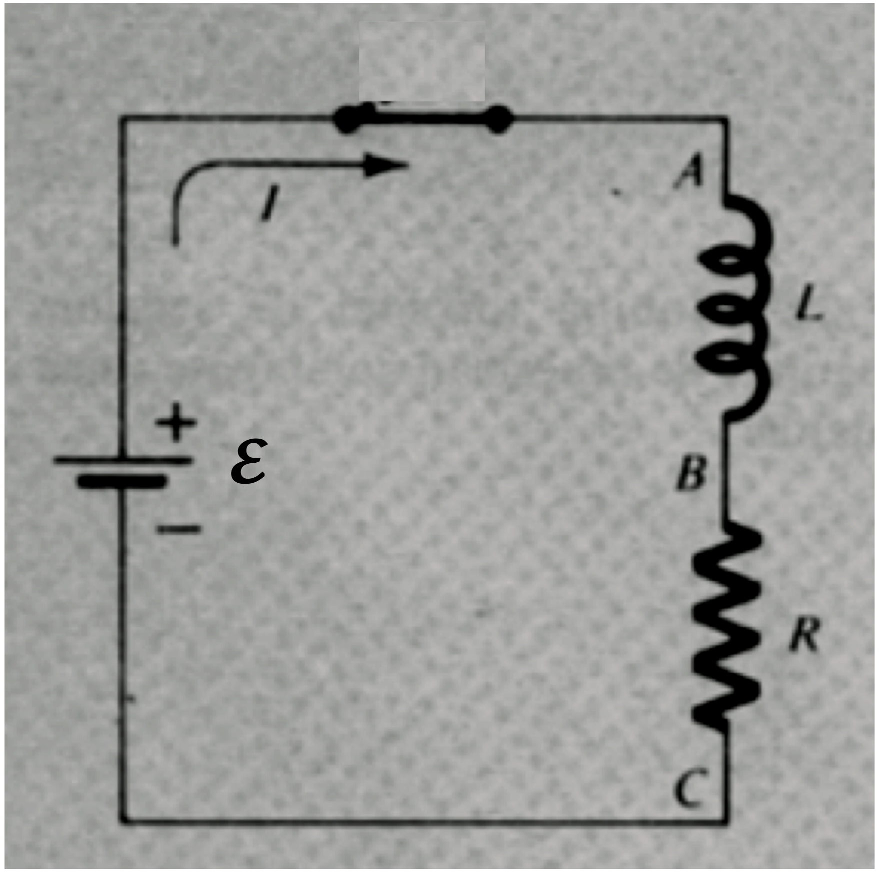
Circuitos con autoinductancias

- Por otro lado, una particular de la inhomogénea puede ser una constante:

$$I_i = -\frac{\frac{\mathcal{E}}{L}}{-\frac{R}{L}} = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

entonces

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}}{R}$$



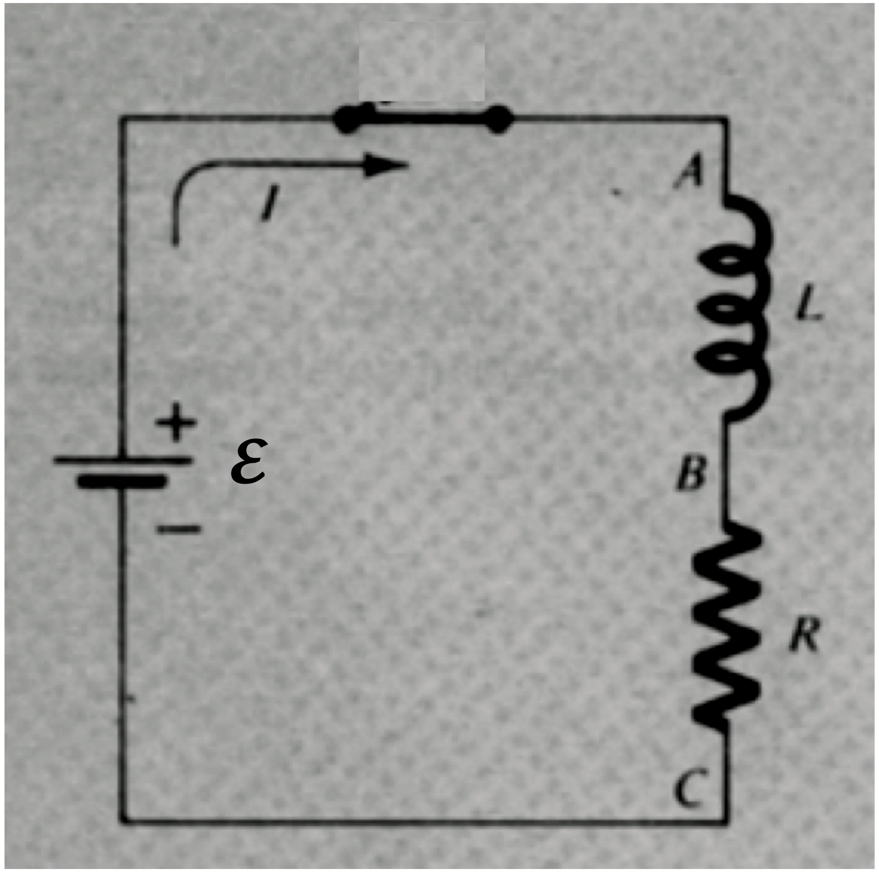
Circuitos con autoinductancias

- Apliquemos las condiciones iniciales para despejar C
- En $t = 0$ cerramos el switch y todavía no hay corriente

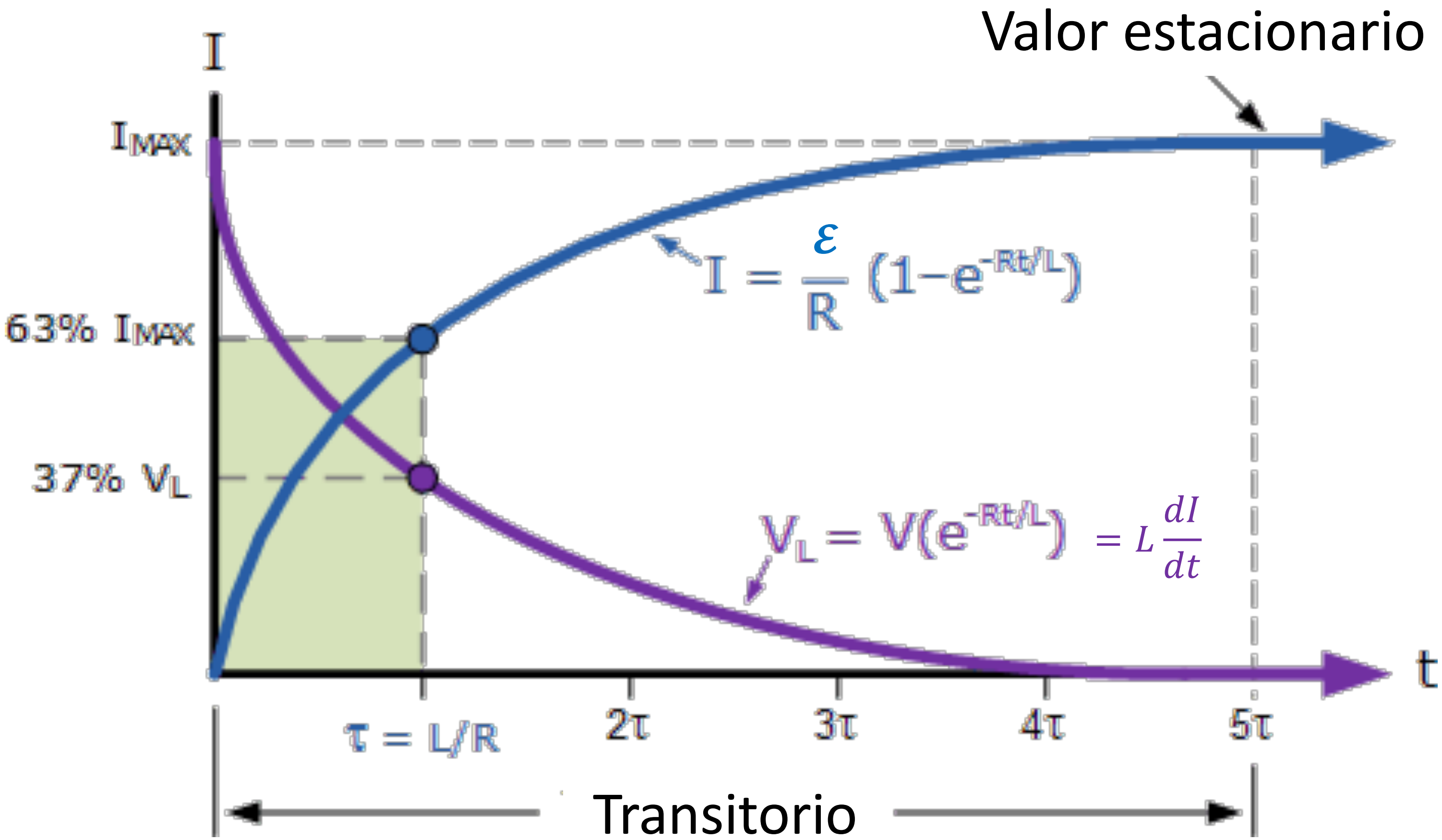
$$I(0) = 0 = C + \frac{\mathcal{E}}{R}$$
$$C = -\frac{\mathcal{E}}{R}$$

- Entonces la solución final es:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}\left[1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$



Circuitos con autoinductancias



Circuitos con autoinductancias

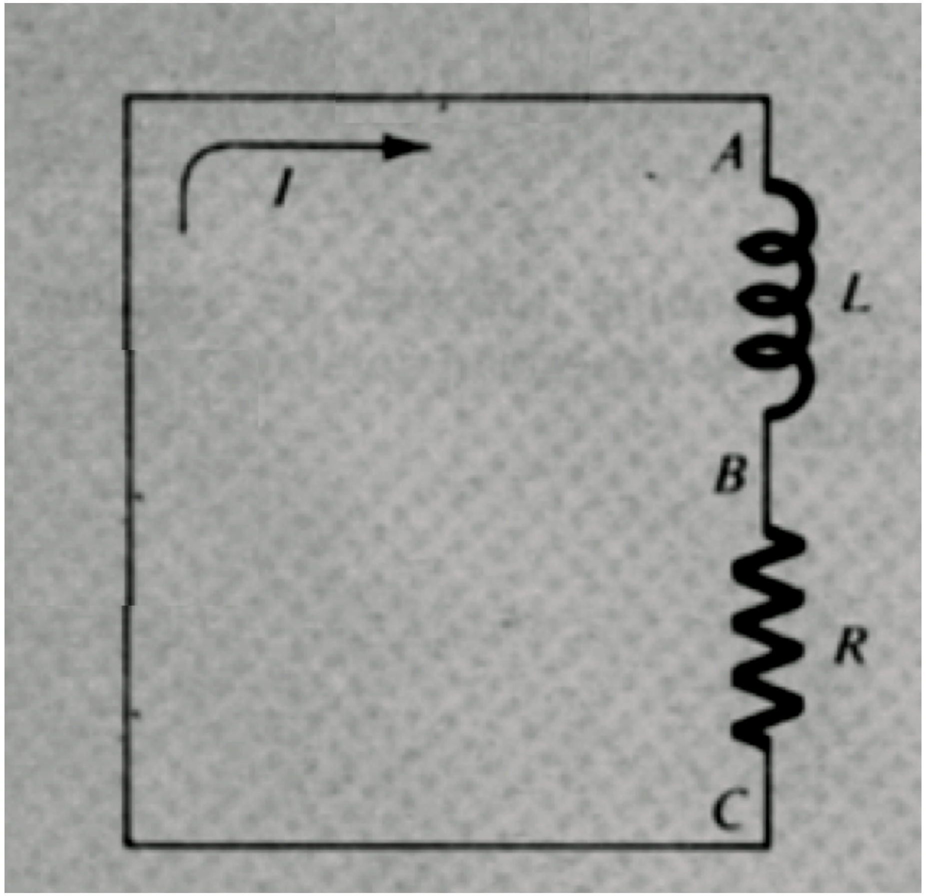
- Tras cerrar el switch, el circuito demora en alcanzar el valor estacionario de la corriente $\frac{\mathcal{E}}{R}$
- Esta demora viene dada por $\frac{L}{R}$, cuanto más grande es este cociente, más se demora.
- Esto es porque la bobina se opone via ley de Faraday a que circule la corriente que la induce.
- Esta oposición también se puede ver como una FEM inducida que se opone a $\mathcal{E}$ a medida que el flujo crece en la bobina a una tasa $L\frac{dI}{dt}$ almacenando energía.

Descarga de un circuito RL

- ¿Qué ocurre si abrimos el switch una vez que circula la corriente estacionaria?

- ¡Tenemos que tener mucho cuidado porque $\frac{dI}{dt}$ sería infinito y podríamos tener un arco en el switch!

- Entonces, conviene quitar la batería cortocircuitando la combinación RL manteniendo cerrado el switch.



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR = L\frac{dI}{dt}$$

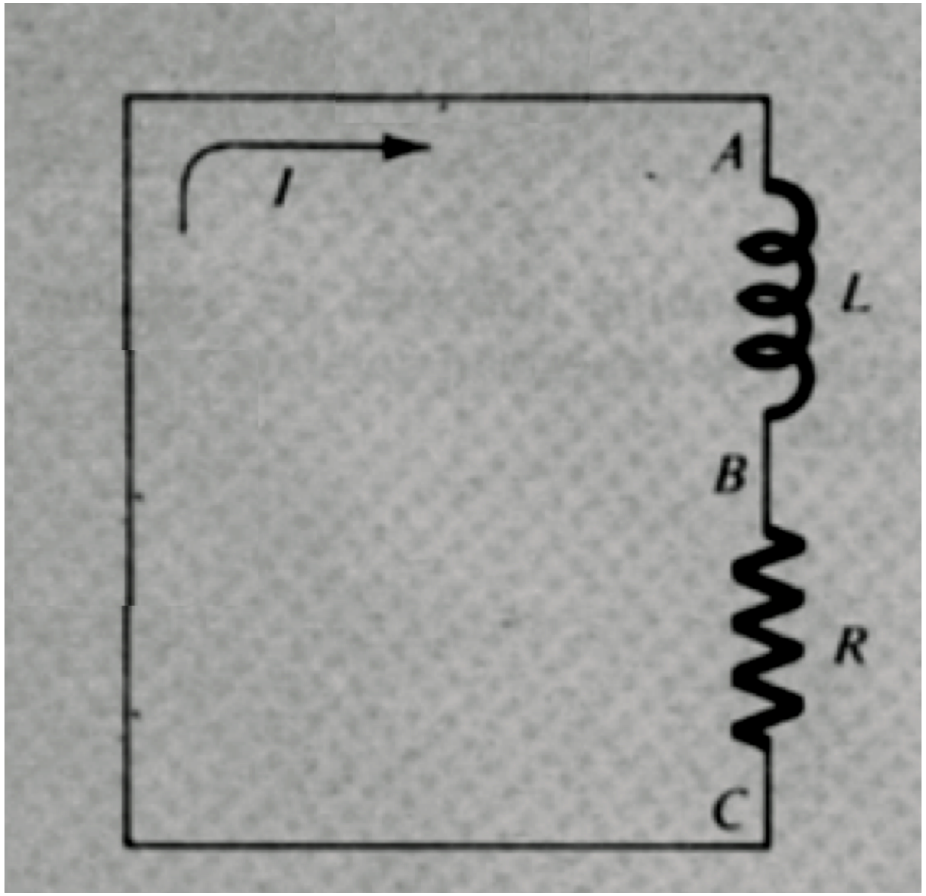
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



Descarga de un circuito RL

- Sin la fuente, la ley de Faraday queda

$$-IR = L\frac{dI}{dt}$$

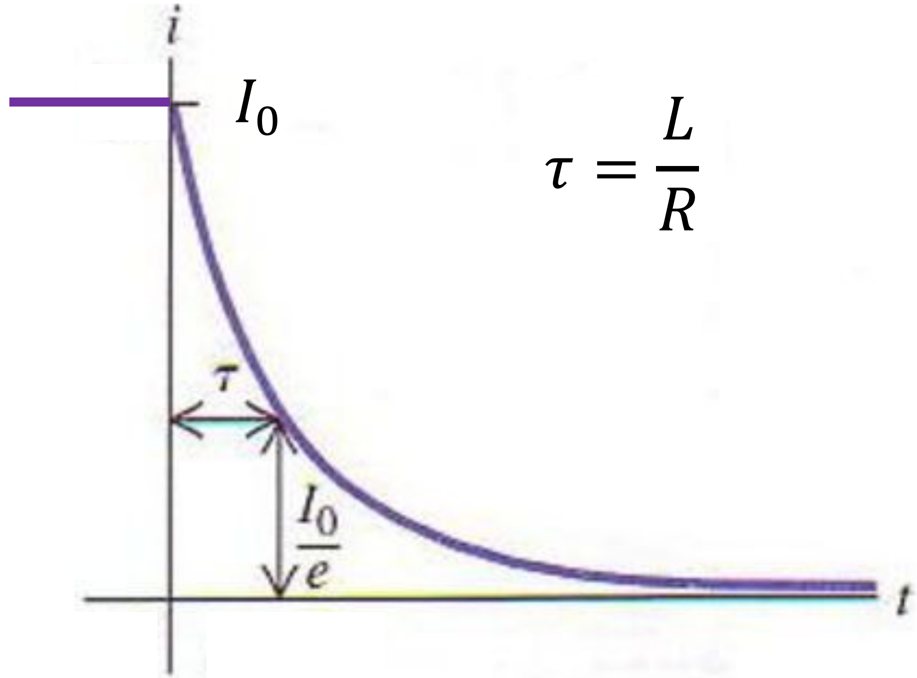
- A la solución ya la conocemos

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}$$

y si empezamos a descargar en un $t = t_1$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}(t-t_1)}$$

donde $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$



$$\tau = \frac{L}{R}$$

$t = t_1$

Almacenamiento de energía en una bobina

- Durante la descarga del circuito, la resistencia R disipa energía.

- Recordemos que la energía disipada por unidad de tiempo es
$$P = VI = I^2 R$$

- Entonces, la energía disipada a partir del instante t_1
$$U = \int_{t_1}^{\infty} I^2 R \; dt = I_0^2 R \int_{t_1}^{\infty} e^{-\frac{2R}{L}(t-t_1)} \, dt$$

reemplazando $x = t - t_1$con $dx = dt$

Almacenamiento de energía en una bobina

- Reemplazando $x = \frac{2R}{L}(t - t_1)$ con $dx = \frac{2R}{L}dt$

$$U = I_0^2 R \frac{L}{2R} \int_0^\infty e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} L I_0^2$$

…ya que $\int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$

- Entonces, en general se puede escribir

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

- Es natural considerarla como la energía almacenada en el campo magnético del inductor.

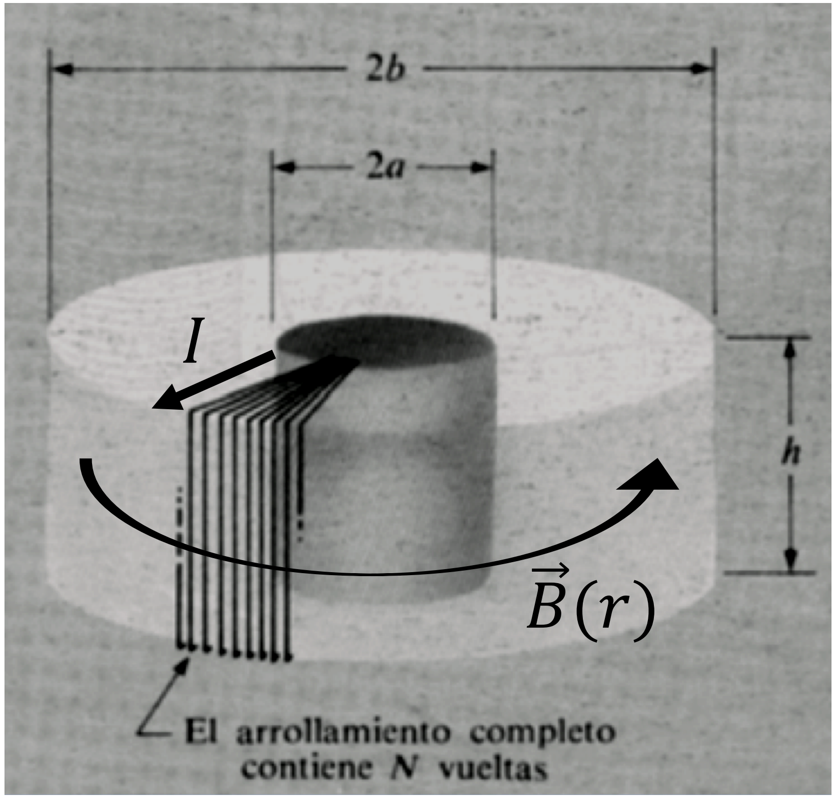
Almacenamiento de energía en una bobina

- Veamos para el caso de una bobina toroidal, la autoinductancia nos daba:

$$L = \frac{h\mu_0 N^2}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Por otro lado, el campo magnético a una distancia r

$$B(r) = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$



Almacenamiento de energía en una bobina

- Integremos B^2 en todo el volumen del toroide:

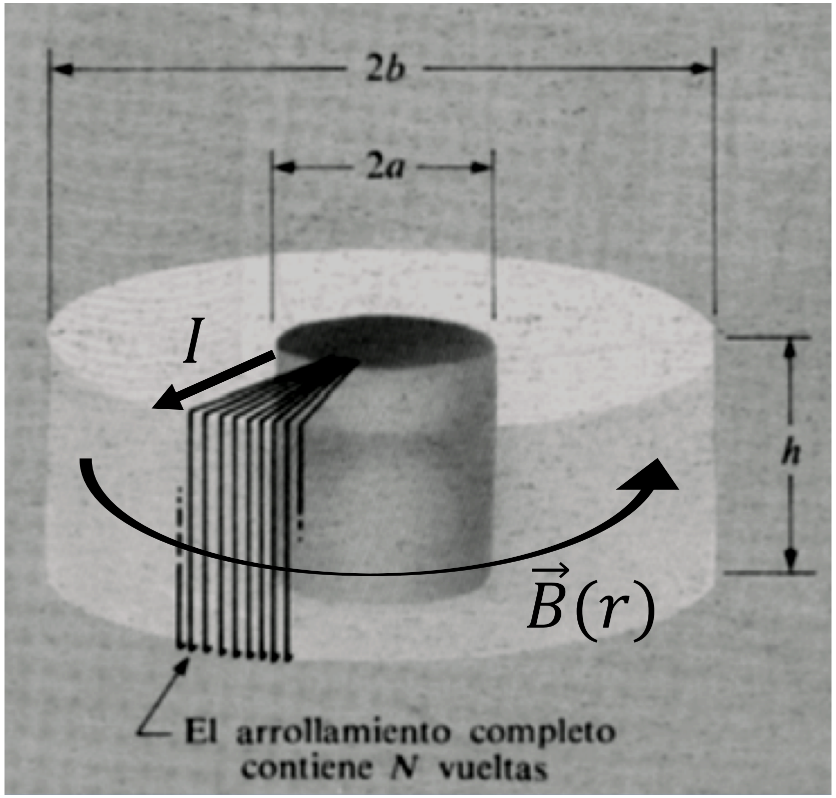
$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \frac{1}{2\mu_0}\int_a^b \left(\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{NI}{r}\right)^2 2\pi r h\,dr = \frac{\mu_0}{4\pi}N^2 h I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

- Vemos inmediatamente que:

$$\frac{1}{2\mu_0}\int B^2\,dv = \tfrac{1}{2}LI^2$$

- Entonces:

$$\boxed{U = \frac{1}{2\mu_0}\int_{\substack{\text{Todo}\\ \text{el campo}}} B^2\,dv}$$



Densidad de energía magnética

- Entonces, la cantidad de energía magnética por unidad de volumen es:

$$u = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

- Y la energía almacenada en un volumen V

$$\iiint\limits_V u\, dv = \iiint\limits_V \frac{B^2}{2\mu_0}\, dv$$