

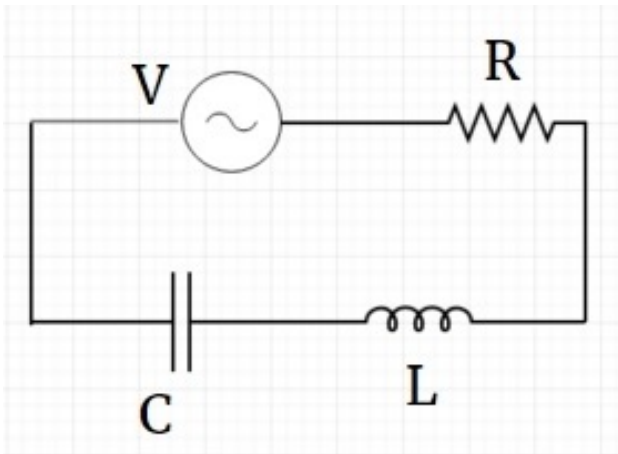
Circuito RLC en serie

- Estas propiedades de los números complejos nos permiten hallar la solución de la ecuación diferencial del circuito. Entonces

$$V_0 \cos \omega t = IR + L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt$$

Como **la ecuación es lineal**, esto equivale a

$$\text{Re}(V_0 e^{i\omega t}) = \text{Re}(R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt)$$



Circuito RLC en serie

- Resolvamos entonces en complejos y luego tomemos la parte real

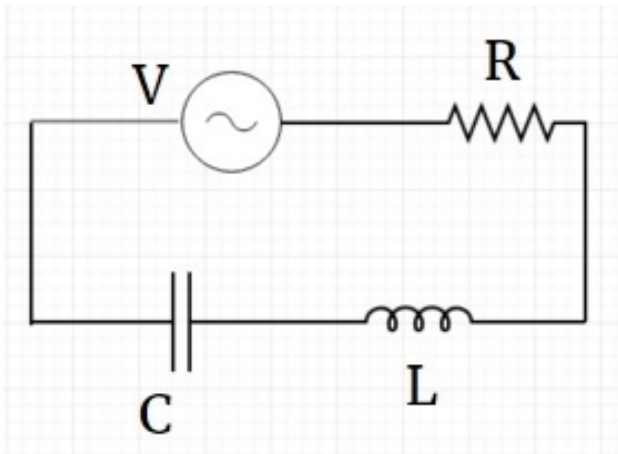
$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + L \frac{d\tilde{I} e^{i\omega t}}{dt} + \frac{1}{C} \int \tilde{I} e^{i\omega t} dt$$

- Reemplazamos la integral y la derivada

$$V_0 e^{i\omega t} = R\tilde{I} e^{i\omega t} + i\omega L\tilde{I} e^{i\omega t} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I} e^{i\omega t}$$

- simplificamos $e^{i\omega t}$

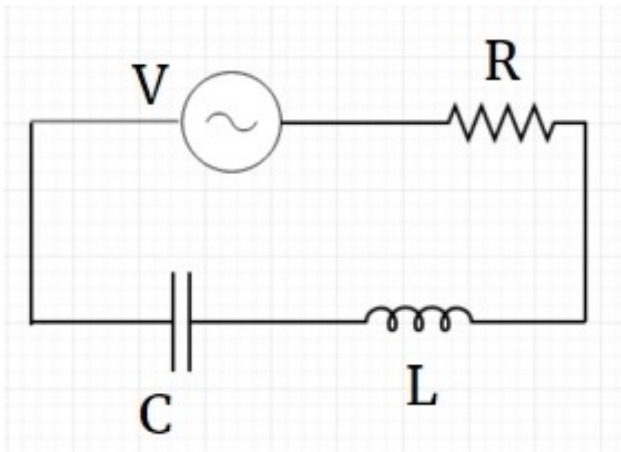
$$V_0 = R\tilde{I} + i\omega L\tilde{I} + \frac{1}{i\omega C} \tilde{I}$$



Circuito RLC en serie

- Y por último despejamos $\tilde{I}$

$$V_0 = \left[R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} \right] \tilde{I}$$

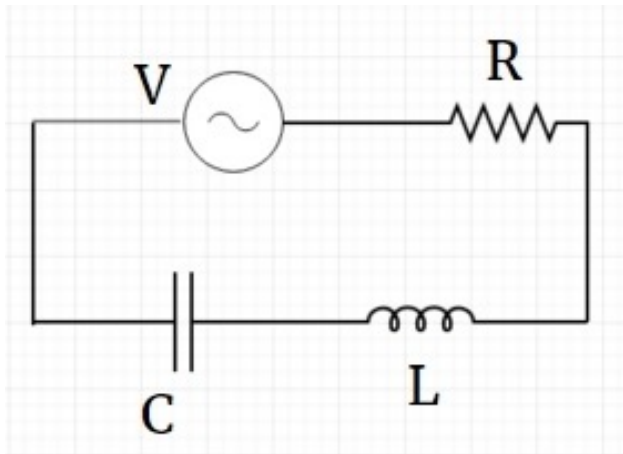


$$\tilde{I} = \frac{V_0}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{V_0}{Z}$$

donde Z es la *impedancia resultante del circuito*

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}$$

Circuito RLC en serie



- Entonces, la corriente es

$$I(t) = \text{Re}(\tilde{I}e^{i\omega t}) = \text{Re}\left[\frac{V_0}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}}e^{i\omega t}\right]$$

- Llamemos θ a la fase de la impedancia

$$Z = R + i\left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right] = |Z|e^{i\theta}$$

$$I(t) = \text{Re}\left[\frac{V_0}{|Z|e^{i\theta}}e^{i\omega t}\right] = \text{Re}\left[\frac{V_0}{|Z|}e^{i(\omega t - \theta)}\right]$$

$$I(t) = \frac{V_0}{|Z|}\cos(\omega t - \theta)$$

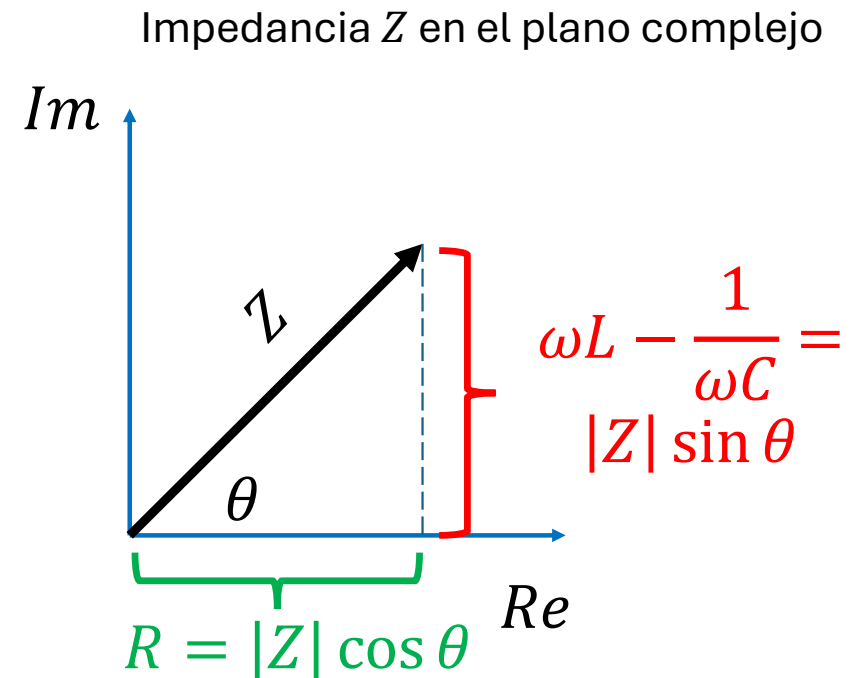
Circuito RLC en serie

- La impedancia tiene las propiedades:

$$Z = R + i \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right] = |Z| e^{i\theta}$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}$$

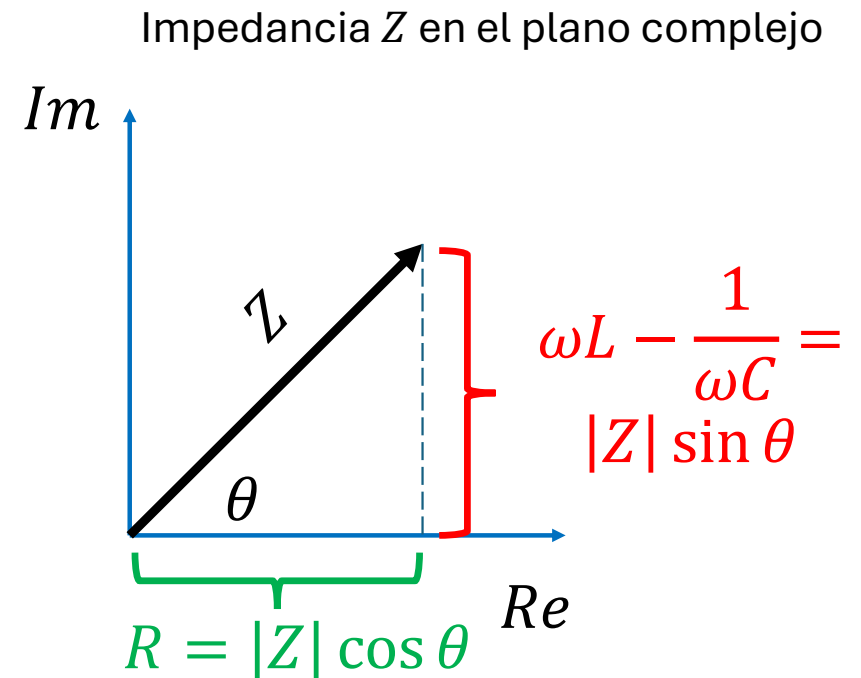
$$\tan \theta = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



Circuito RLC en serie

- Entonces la solución final es

$$I(t) = \frac{V_0 \cos \left[\omega t - \tan^{-1} \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right]}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C} \right]^2}}$$



La impedancia

- Como vemos en este caso, la intensidad de la corriente depende de ω , C , L y R .
- También de ellas depende su fase.
- Llamemos nuevamente I_0 a la amplitud real de I :

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left[\omega L - \frac{1}{\omega C}\right]^2}}$$

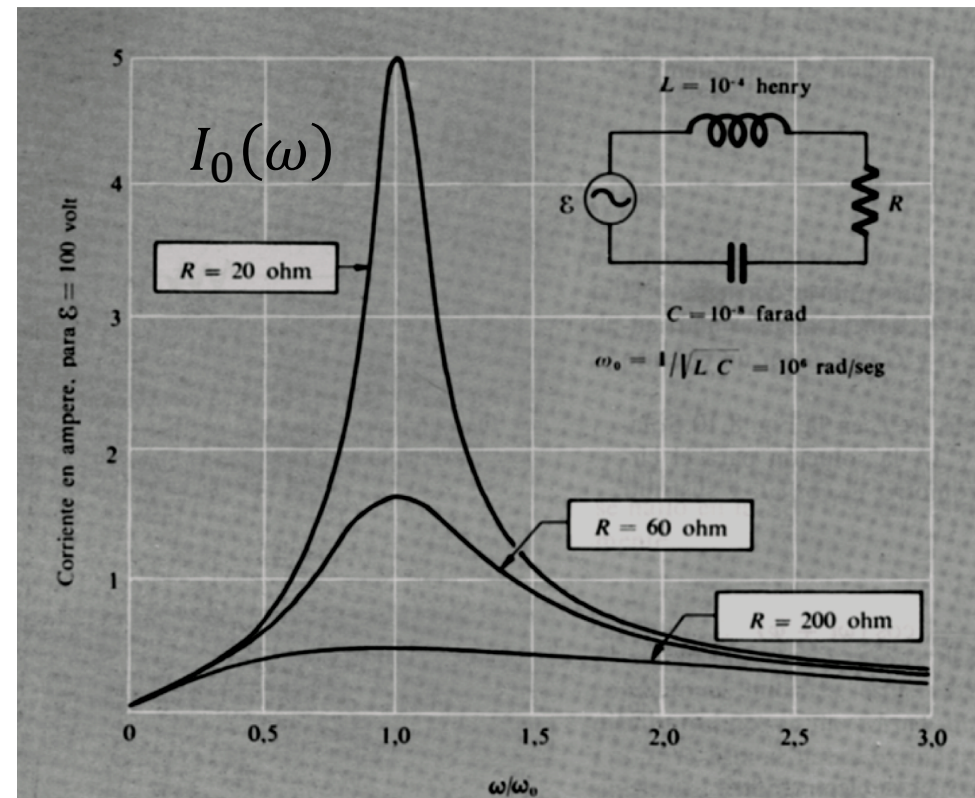
La impedancia

- En la figura vemos cómo varía I_0 en función de ω para:

$$\begin{aligned}V_0 &= 100 \text{ V} \\ C &= 10^{-8} \text{ Farad}, \\ L &= 10^{-4} \text{ H} \\ R &= 20, 60, 200 \Omega\end{aligned}$$

- Vemos que:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_0(\omega) = 0 \text{ y } \lim_{\omega \rightarrow \infty} I_0(\omega) = 0$$

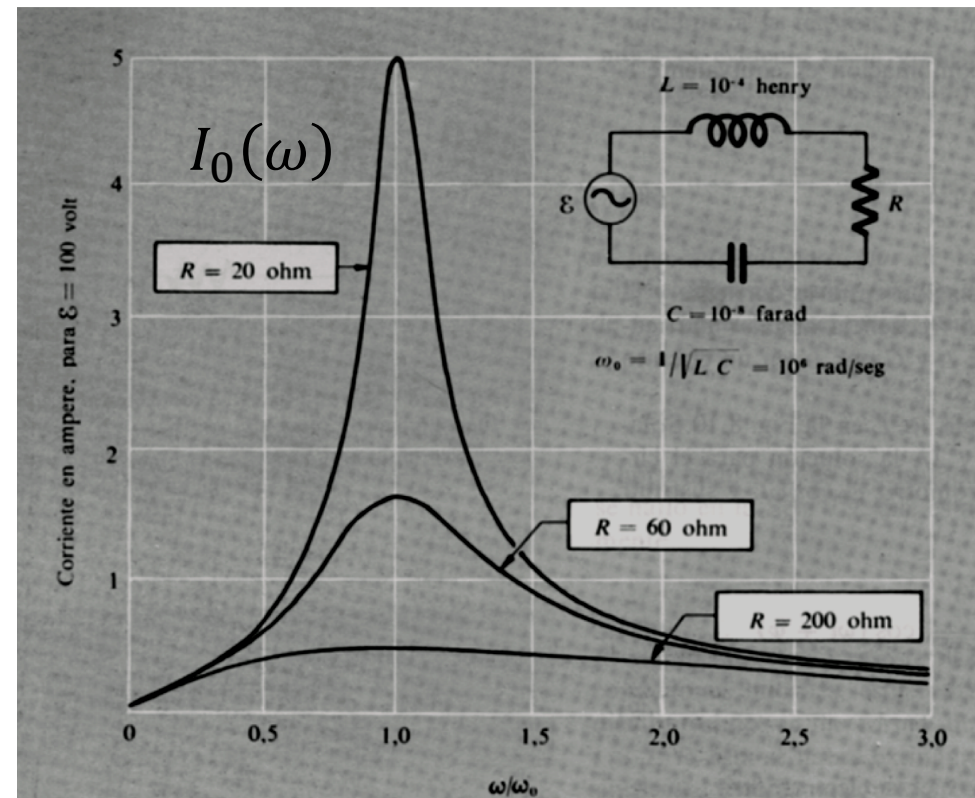


La impedancia

- $I_0(\omega)$ alcanza un máximo cuando
$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 10^4 \text{ rad/s}$$
- Cuando esto ocurre se da una resonancia y el efecto de L y C parecen desaparecer (hasta la fase)

$$I_{res}(t) = \frac{V_0 \cos \frac{1}{\sqrt{LC}} t}{R}$$

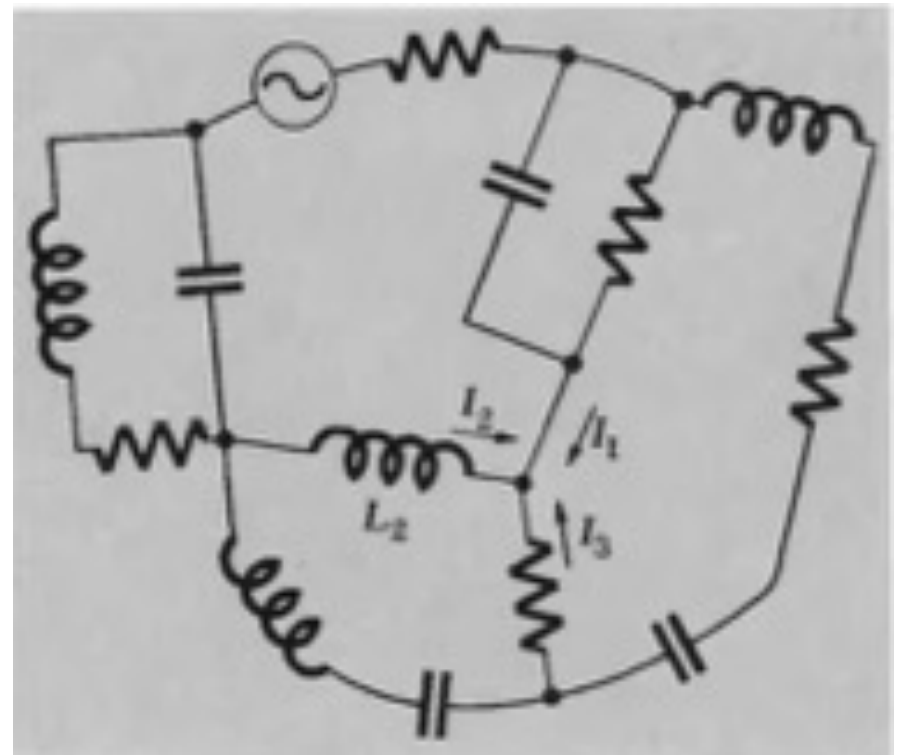
- El máximo es más intenso y más fino en la medida que R es más pequeño



Otros circuitos en alterna

Otros circuitos en alterna

- Una red de corriente alterna es un conjunto de **resistencias, capacitores e inductores** en los cuales circula corriente que oscila **estacionariamente** a una frecuencia ω .
- La frecuencia es una constante en todo el circuito.
- Para hallar la corriente en cada rama hay que saber su amplitud y su fase respecto a la fuente.

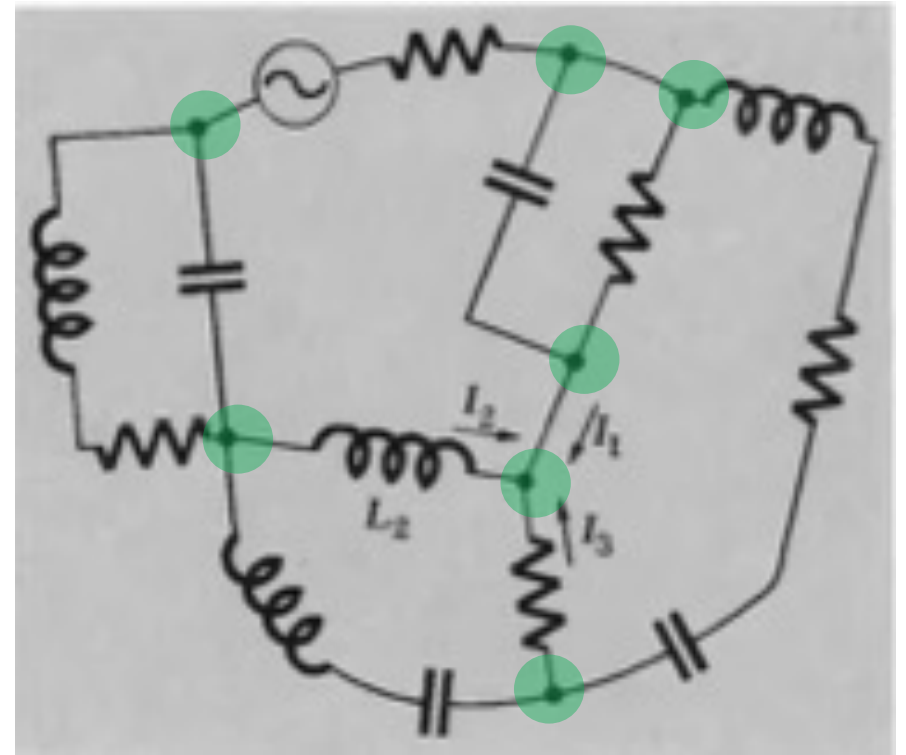


Otros circuitos en alterna

- Por conservación de la carga, las corrientes que pasan por cada nodo deben dar suma nula

$$I_1 + I_2 \dots = 0$$

- En cada rama, el voltaje también tendrá su propia amplitud y fase.

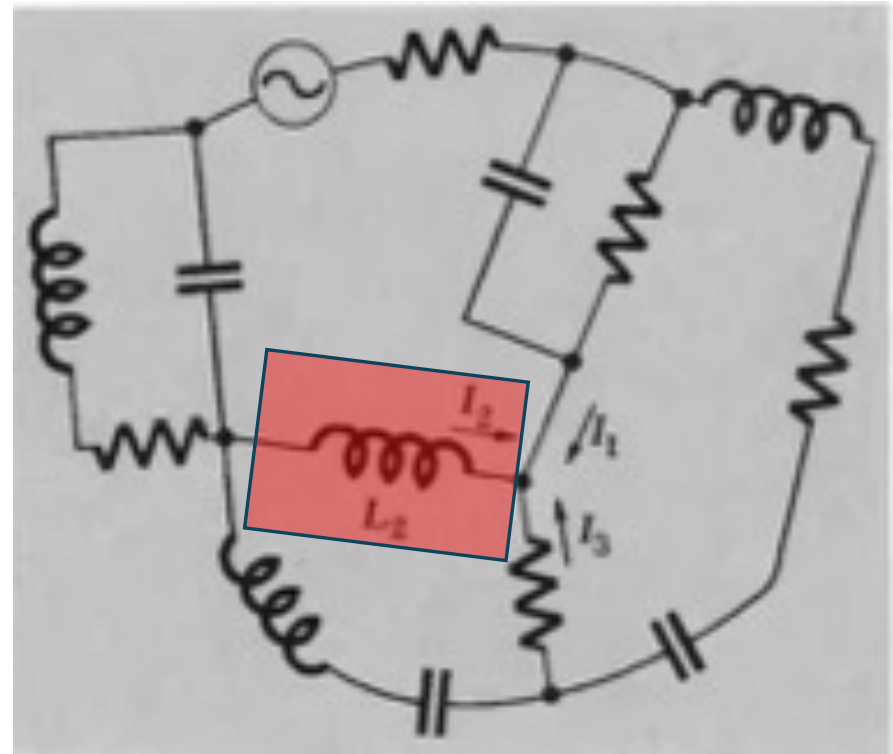


Otros circuitos en alterna

- La fase de la tensión y la corriente en cada rama puede no ser la misma.

$$I_2 = I_{02} \cos (\omega t + \varphi_2)$$

$$V_2 = V_{02} \cos (\omega t + \theta_2)$$



Impedancias y admitancias

- ¿Cómo se relacionan la tensión y la corriente complejas en cada rama k ?

$$\tilde{I}_k e^{i\omega t} = Y_k \tilde{V}_k e^{i\omega t}$$

$$\tilde{I}_k = Y_k \tilde{V}_k$$

donde $\tilde{I}_k$ y $\tilde{V}_k$ son las amplitudes complejas de la tensión y la corriente en cada rama k

$$\tilde{I}_k = |\tilde{I}_k| e^{i\varphi_k} \quad \text{y} \quad \tilde{V}_k = |\tilde{V}_k| e^{i\theta_k}$$

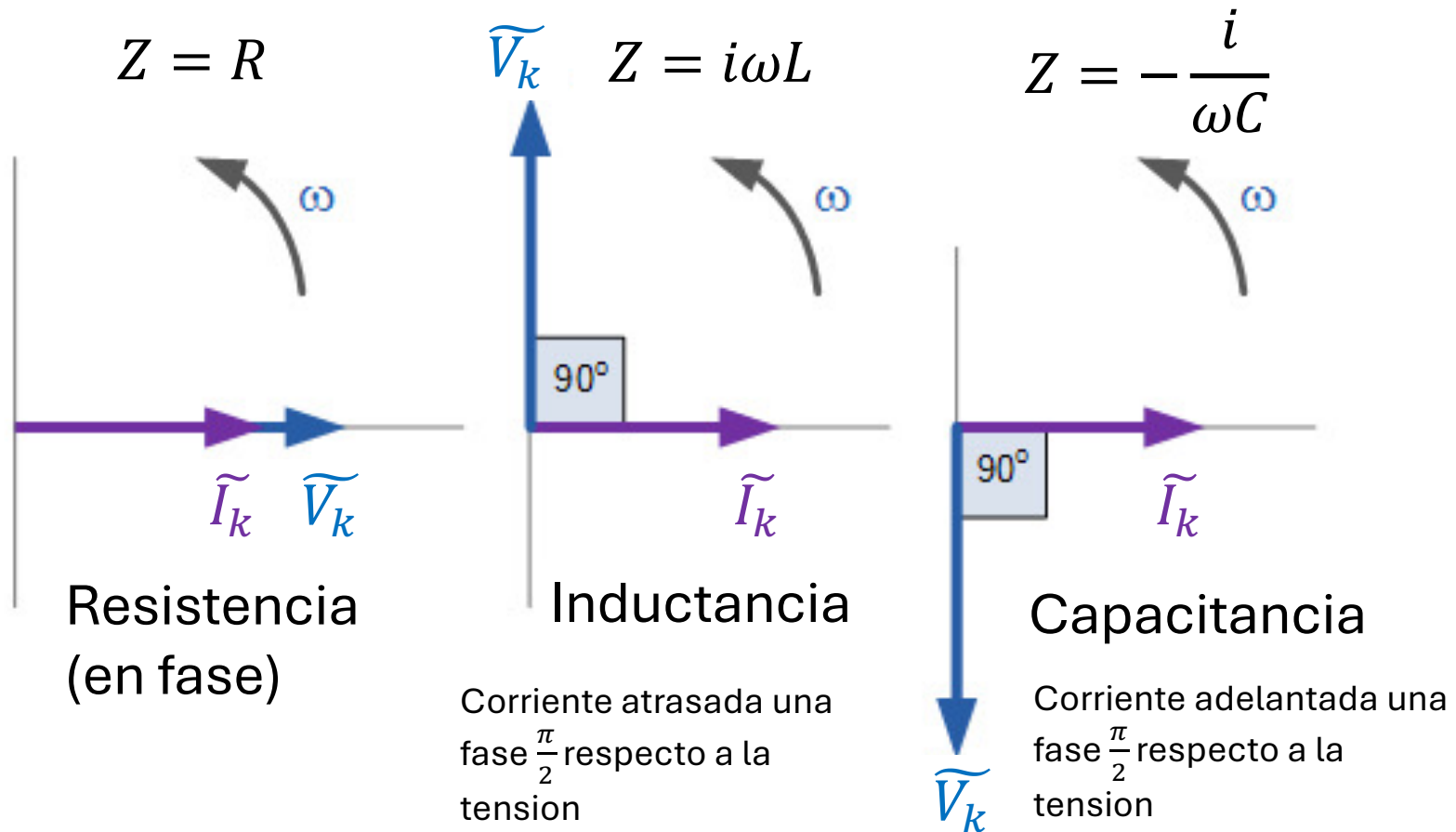
Impedancias y admitancias

- La cantidad compleja Y_k se denomina **admitancia** (*unidad* = $\frac{1}{\Omega}$).
- La inversa compleja de la admitancia es la **impedancia** Z_k (*unidad* = Ω)

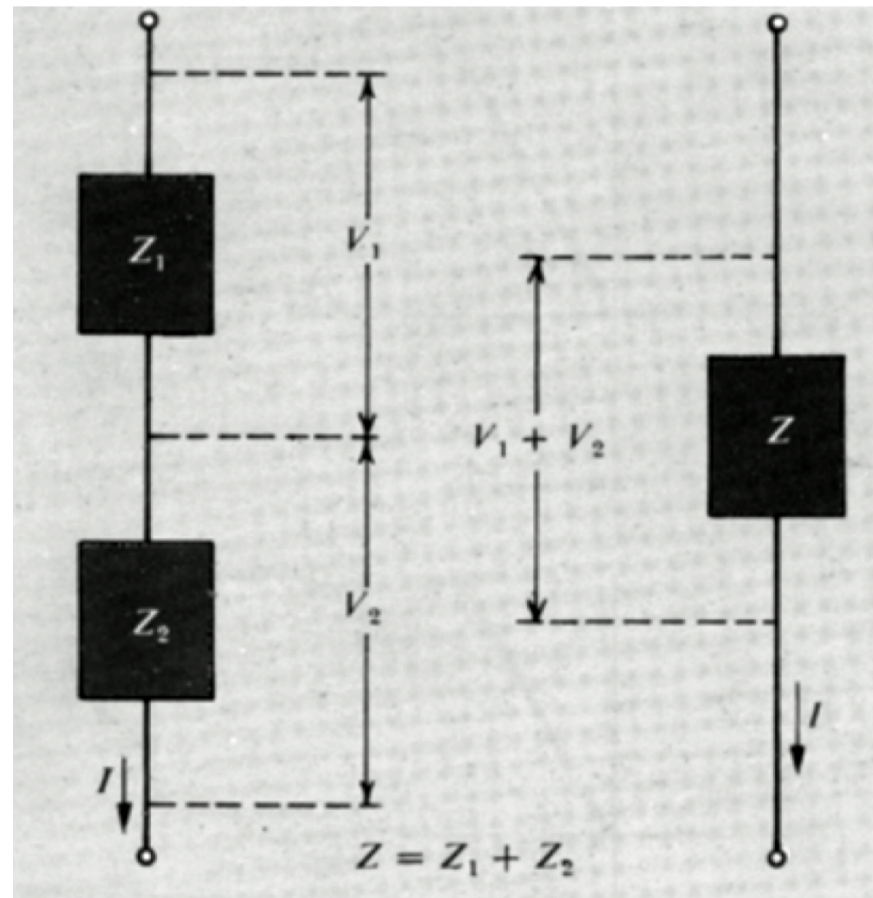
$$\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k = \frac{1}{Y_k} \widetilde{I}_k$$

<i>Símbolo</i>	<i>Admitancia, Y</i>	<i>Impedancia, Z = $\frac{1}{Y}$</i>
$\overset{R}{\text{---}\text{w}\text{---}}$	$\frac{1}{R}$	R
$\overset{L}{\text{---}\text{u}\text{---}}$	$\frac{-i}{\omega L}$	$i\omega L$
$\overset{C}{\text{---}\text{ }\text{---}}$	$i\omega C$	$\frac{-i}{\omega C}$

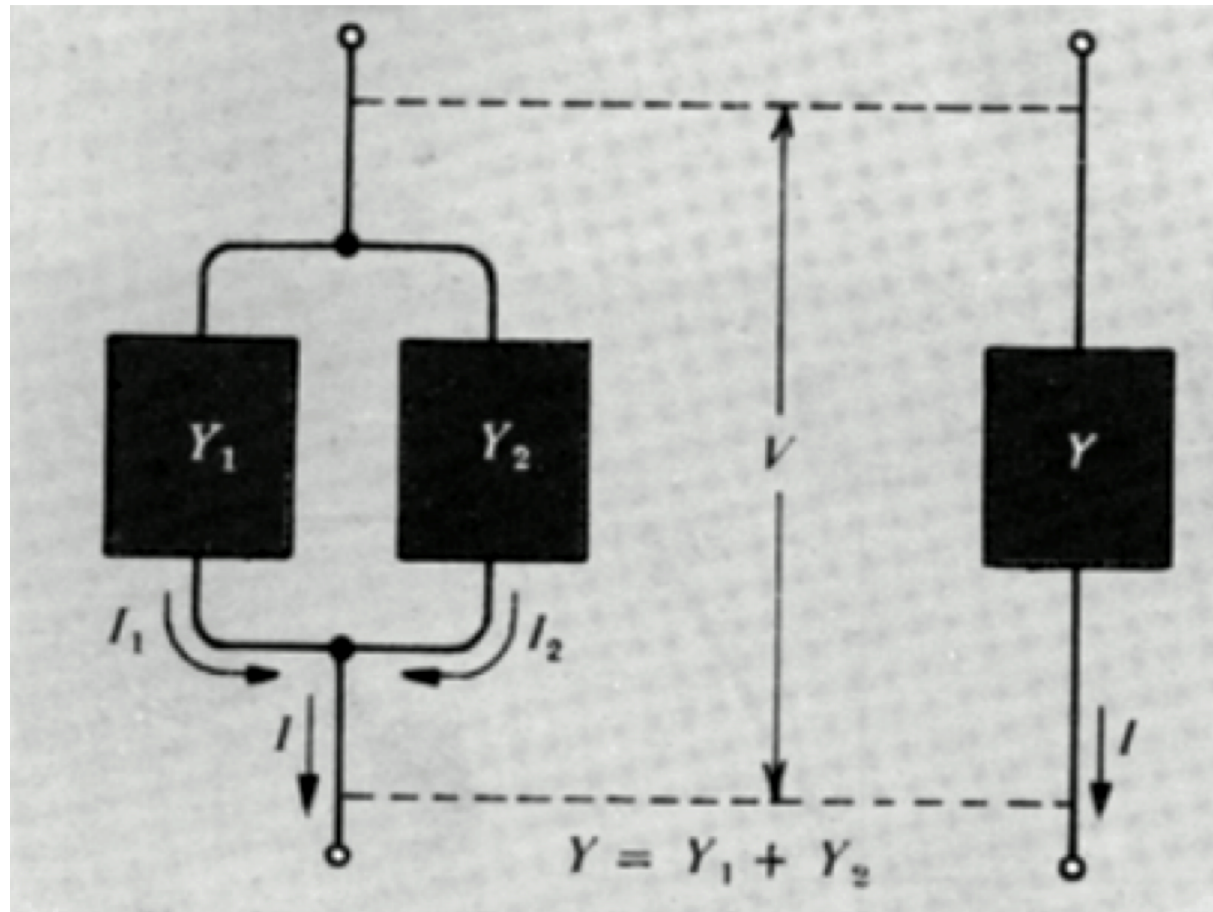
Diferencias de fase entre $\widetilde{V}_k$ e $\widetilde{I}_k$ ($\widetilde{V}_k = Z_k \widetilde{I}_k$) para distintos tipos de impedancia



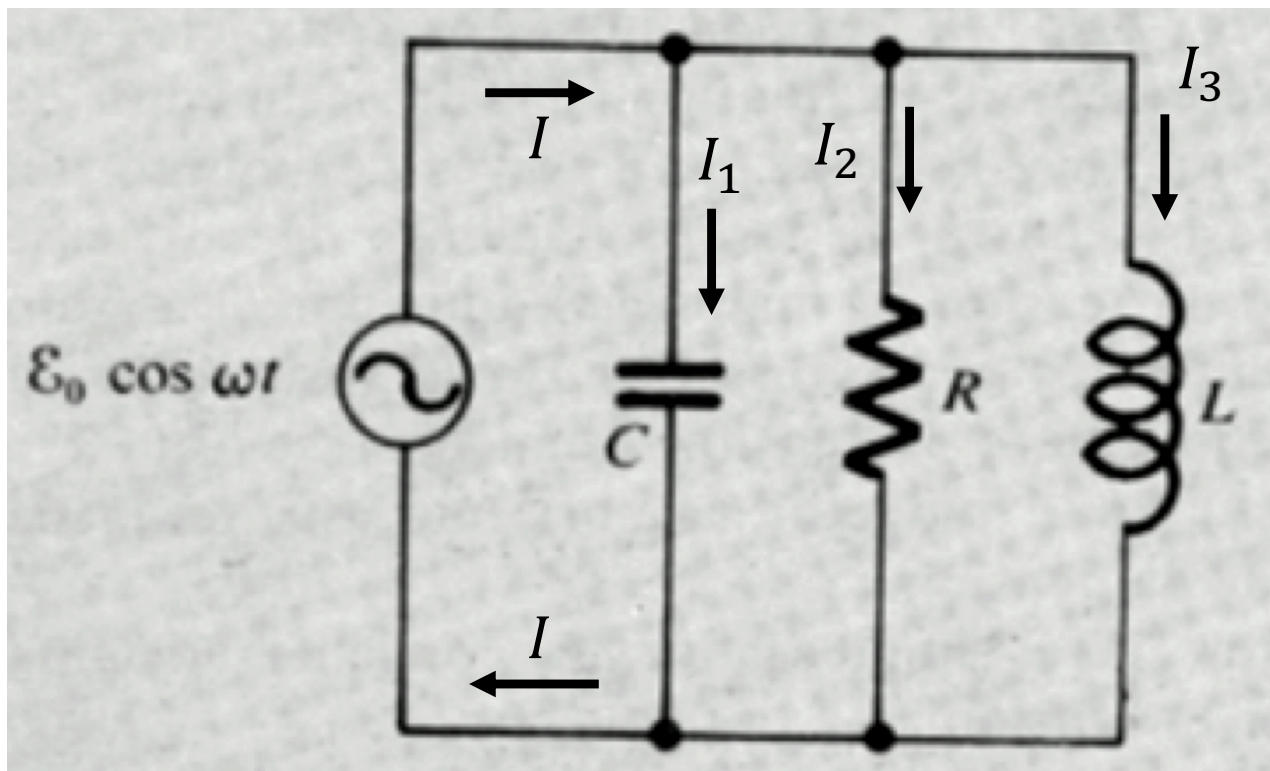
Impedancias en serie: $Z = Z_1 + Z_2$



Admitancias en paralelo: $Y = Y_1 + Y_2$



Ejercicio: RLC paralelo

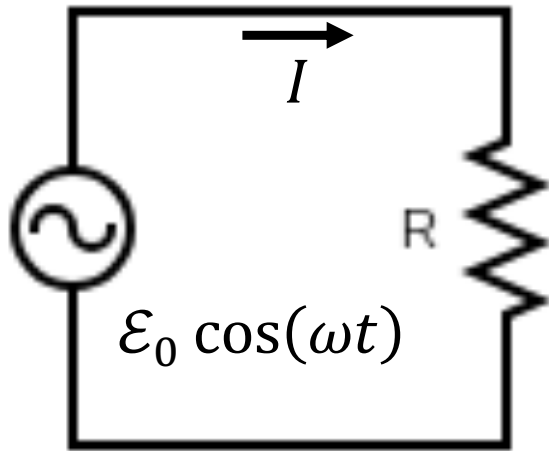


- Resolver para las corrientes:

$$I, I_1, I_2 \text{ e } I_3$$

- Estudiar la impedancia equivalente en resonancia: ¿Alcanza un máximo o un mínimo?

Potencia en un circuito de alterna



- Sea un circuito con una fuente $\mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$ y una resistencia R .

- La corriente es:

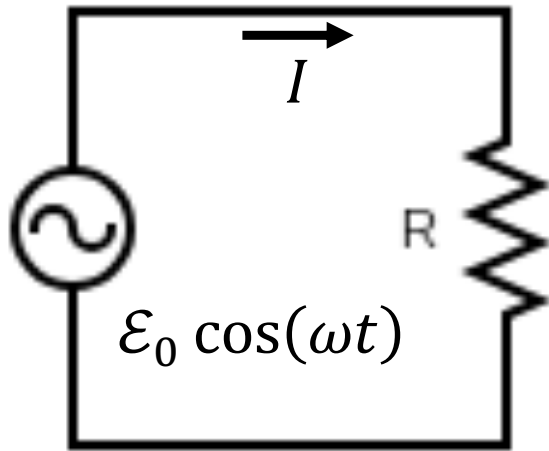
$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t)$$

- La potencia instantánea disipada en R es:

$$P = IV = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \cos(\omega t) \mathcal{E}_0 \cos(\omega t)$$

$$P = \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} [\cos(\omega t)]^2$$

Potencia en un circuito de alterna



- La potencia media en un período

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

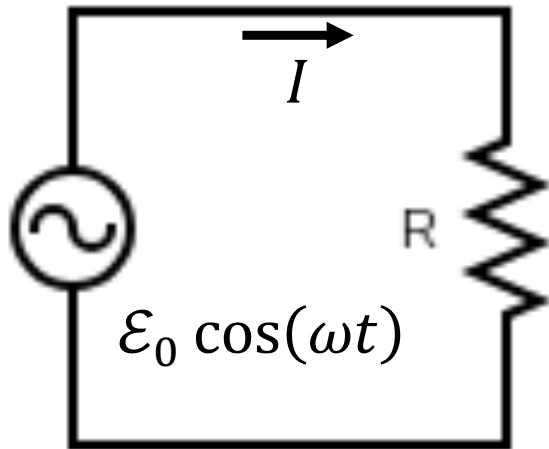
viene dada por la expresión

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} [\cos(\omega t)]^2 dt$$

$$= \frac{\mathcal{E}_0^2}{R} \frac{1}{T} \int_0^T [\cos(\omega t)]^2 dt$$

$$\langle P \rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2R}$$

Potencia en un circuito de alterna



- A veces la tensión viene dada en RMS es decir en

$$V_{RMS} = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{2}}$$

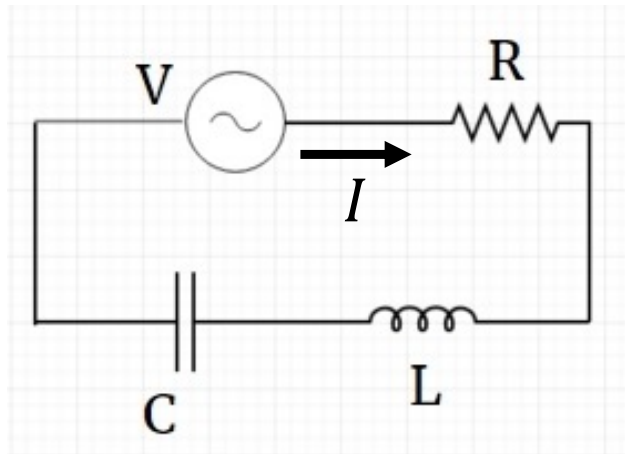
- Por ejemplo, la tensión RMS en la red doméstica es de 220 V (y frecuencia 50 Hz). Eso implica una amplitud real:

$$\mathcal{E}_0 = 220 \text{ V} \sqrt{2} = 311 \text{ V}$$

- En términos de V_{RMS} la potencia media queda:

$$\langle P \rangle = \frac{V_{RMS}^2}{R}$$

Potencia media en RLC en serie



- Si tenemos una impedancia total $Z = |Z|e^{i\theta}$

$$P = IV = \frac{\varepsilon_0}{|Z|} \cos(\omega t - \theta) \varepsilon_0 \cos(\omega t)$$

- desarmamos $\cos(\omega t - \theta)$:

$$P = \frac{\varepsilon_0^2}{|Z|} [(\cos \omega t)^2 \cos \theta + \cos \omega t \sin \omega t \sin \theta]$$

$$\langle P \rangle = \frac{\varepsilon_0^2}{2|Z|} \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{|Z|} \right)^2 |Z| \cos \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon_0}{|Z|} \right)^2 R$$

$$\langle P \rangle = \frac{I_0^2}{2} R \quad (\text{la única que disipa es } R)$$