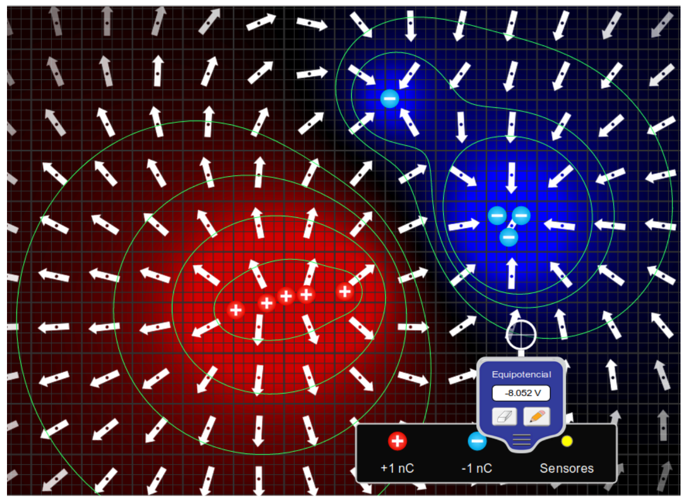
Energía electrostática

Nos ocuparemos ahora de revisitar algunos temas vistos hasta ahora haciendo énfasis en el aspecto energético de cada situación. Comencemos para ello considerando la distribución de cargas fuente, 5 positivas y 4 negativas, que se muestra en la siguiente figura. Las flechas representan la dirección local del campo eléctrico en cada punto y un código de colores se utiliza para describir al potencial electrostático, $V(\vec{r})$. Colores azules y rojos se utilizan para indicar valores negativos y positivos de dicho campo escalar respectivamente. Finalmente, las curvas verdes ilustran curvas equipotenciales.

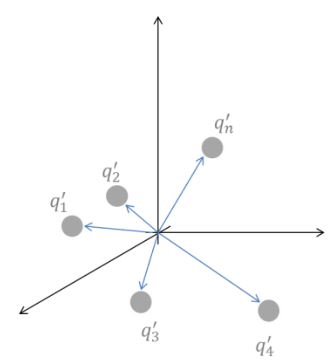


Ya hemos visto en clase el significado físico de $V(\vec{r})$ para casos de fuentes localizadas como éste. En cada punto del espacio, el valor de dicho campo escalar representa la cantidad de trabajo cuasiestático, por unidad de carga, que es necesario realizar para traer una carga de prueba q desde el infinito hasta $\vec{r}$. Recordando esto resulta natural entender por qué cerca de donde se acumula carga positiva se encuentran puntos de alto valor de potencial (zonas rojas) al tiempo que, cerca de cargas negativas, los valores de potencial resultan negativos dando cuenta el hecho de que el trabajo **cuasiestático** para dejar una carga de prueba en esa región también lo es.

1. Energía de un sistema de cargas localizadas

Como vimos arriba, la energía necesaria para ubicar una carga de prueba en algún punto del espacio **en presencia de un conjunto de fuentes** resulta: $U = q.V(\vec{r})$, donde $V\left(\vec{r}\right)$ es el potencial electrostático generado por las fuentes *{q'}*.

Lo que queremos estimar ahora es cuanta energía nos cuesta (i.e. cuánto trabajo debemos hacer para) armar dicha distribución de fuentes.



Consideremos como ejemplo la distribución de *n* fuentes que se muestra en la Fig 2 y preguntémonos cuánto trabajo debemos hacer para disponerlas, unas frente a otras, en las posiciones que definen dicha configuración. Imaginemos para ello que procedemos a armar la configuración de fuentes trayendo **en orden y secuencialmente** a cada una de las cargas q_i' desde el infinito hasta la posición $\vec{r}_i'$ respectiva.

El trabajo necesario para traer la primer carga es nulo (es la primera, no hay ninguna otra carga que establezca un campo contra el cual sea necesario realizar trabajo para llevar a $q_1{}'$ desde el infinito hasta $\vec{r}_1{}'$).

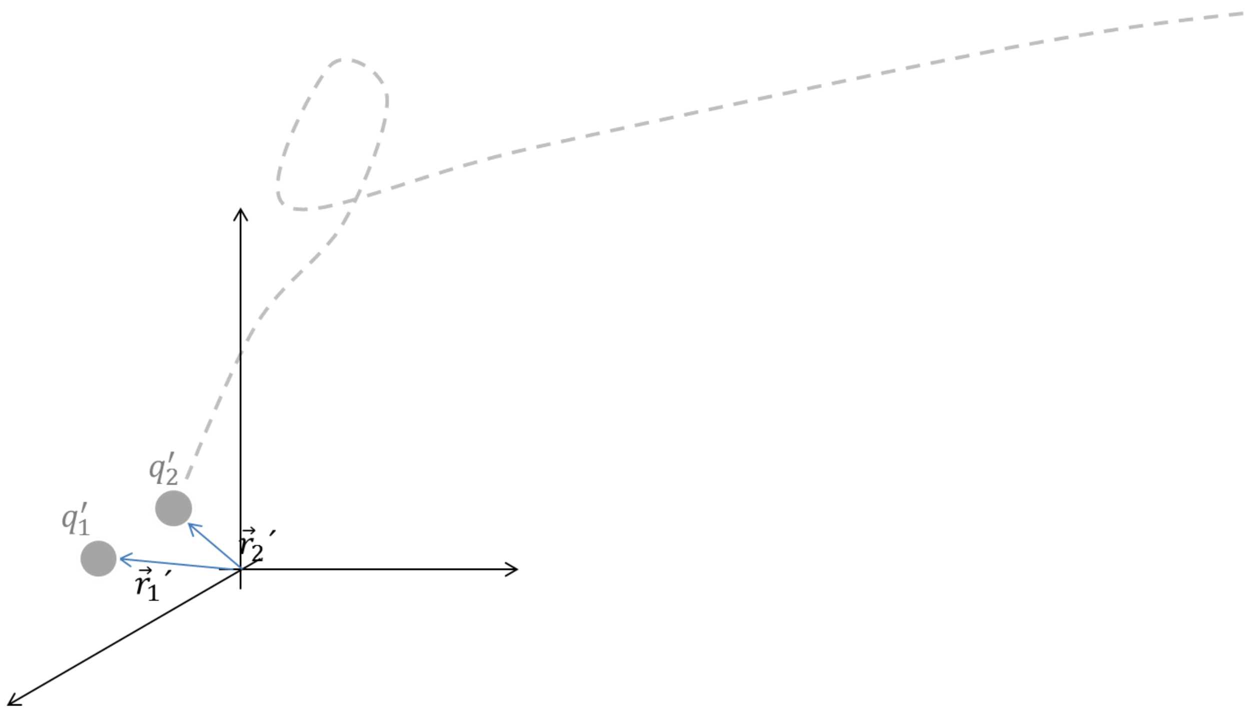


Fig 3 Trayendo a la segunda carga en el proceso de armado de la configuración de fuentes.

Sin embargo para la segunda carga la situación es diferente, porque ahora su traslado se hace en presencia del campo generado por $q_1{}'$. Por esta razón deberemos realizar un trabajo no nulo e invertir una energía U_2:

$$U_2 = U_{21} = q_2' V_{q_1'}\left(\vec{r}_2{}'\right) = \frac{k q_2' q_1'}{r_{21}} = q_2' V_{21} \qquad [1]$$

donde definimos a V_{21}como el potencial que experimenta la carga fuente $q_2{}'$ en presencia de $q_1{}'$.

De esta manera es fácil ver que el trabajo que tendremos que invertir para traer la tercera carga en presencia de la primer y segunda fuente ya ubicadas resultará:

$$U_3 = U_{31} + U_{32} = q_3' \left(V_{q_1'}\left(\vec{r}_3{}'\right) + V_{q_2'}\left(\vec{r}_3{}'\right) \right) = q_3'\left(V_{31} + V_{32}\right) \qquad [2]$$

para la cuarta

$$U_4 = U_{41} + U_{42} + U_{43} = q_4^{'}\left(V_{q_1^{'}}\left(\vec{r}_4{}'\right) + V_{q_2^{'}}\left(\vec{r}_4{}'\right) + V_{q_3^{'}}\left(\vec{r}_4{}'\right)\right) = q_4^{'}\left(V_{41} + V_{42} + V_{43}\right)$$

y en general, para la i-esima carga, se debe invertir una energía U_i

$$U_i = U_{i1} + \ldots + U_{i(i-1)} = q_i^{'}\left(V_{i1} + .. + V_{i(i-1)}\right)$$

El trabajo total, U_{Tot}, que será necesario realizar para armar la configuración completa resultará entonces:

$$U_{Tot} = U_{21} + U_{31} + U_{32} + U_{41} + U_{42} + U_{43} + \ldots$$

Esta expresión puede reescribirse como:

$$U_{Tot} = \sum_{i>j} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} U_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} q_i^{'} V_{ij} \qquad [3]$$

La segunda igualdad surge del hecho que $U_{ij} = \frac{kq_i^{'}q_j^{'}}{r_{ij}} = U_{ji}$.

Por un lado, ésta simetría nos indica que el cálculo de la energía de una configuración de fuentes es independiente del orden que utilicemos para traer las cosas desde el infinito (cosa sumamente razonable). Por el otro, utilizando que $U_{ij} = U_{ji}$, vemos que sumar las contribuciones de las U_{ij} con *i<j* es lo mismo que sumar todas las combinaciones de ij y dividir por dos.

De esta manera,

$$U_{Tot} = \frac{1}{2}\sum_{i,j\neq i} q_i^{'} V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_i q_i^{'} \underbrace{\sum_{j\neq i} V_{ij}}_{V_i} = \frac{1}{2}\sum_i q_i^{'} V_i \qquad [4]$$

donde V_i es el potencial que todas las cargas $j \neq i$ producen en la posición de la i-esima carga.

Finalmente

$$\boxed{U_{Tot} = \frac{1}{2}\sum_i q_i^{'} V_i} \qquad [5]$$

2. El caso continuo

Para el caso de una distribución continua se puede seguir un razonamiento análogo, según el cual vamos armando la configuración trayendo desde el infinito una carga $\delta q = \rho dv$.

$$U_{Tot} = \frac{1}{2}\sum_i \delta q_i' V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \rho\left(\vec{r}_i\right)V\left(\vec{r}_i\right)dv \; n\rightarrow\infty, dv\rightarrow 0\rightarrow \frac{1}{2}\int \rho\left(\vec{r}\right)V\left(\vec{r}\right)dv$$

Por lo que, para una distribución continua resulta

$$U_{Tot} = \frac{1}{2}\int_{R^3} \rho\left(\vec{r}\right)V\left(\vec{r}\right)dv \qquad [6]$$

donde la integral la podemos realizar en todo el espacio habida cuenta de que ρse anula fuera del volumen donde se encuentra la densidad de carga que describe la configuración continua de interés.

3. Energía y campos eléctricos

Las ecuaciones (5) y (6) dan cuenta del trabajo necesario para armar configuraciones de cargas discretas y continuas respectivamente. Cabe ahora preguntarse, en dónde queda almacenada dicha energía?

Para responder a esta pregunta utilicemos el hecho de que ρ es fuente de divergencia del campo eléctrico: $\vec{\nabla}.\vec{E} = 4\pi k\rho$ por lo que podemos reescribir la ecuación (6) como

$$U_{Tot} = \frac{1}{8\pi k}\int \vec{\nabla}.\vec{E}\left(\vec{r}\right) V\left(\vec{r}\right)dv \qquad [7]$$

Utilizando ahora la siguiente identidad vectorial

$$\vec{\nabla}.\left(V\,\vec{E}\right) = V\,\vec{\nabla}.\vec{E} + \vec{E}.\,\vec{\nabla}V = V\,\vec{\nabla}.\vec{E} - E^2$$

la ecuación (7) puede reescribirse como

$$U_{Tot} = \frac{1}{8\pi k}\int_{R^3} E^2 dv + \underbrace{\frac{1}{8\pi k}\int_{R^3} \vec{\nabla}.\left(V\,\vec{E}\right)dv}_{\oiint_{S_\infty} V\,\vec{E}\, d\vec{s}}$$

donde el segunda término, vía el teorema de Gauss, toma la forma de una integral que se corresponde con el flujo del campo vectorial $V\,\vec{E}$ sobre una superficie S_∞ que se encuentra en el infinito (frontera de R^3)

Lo interesante es que podemos dar argumentos para darnos cuenta que

$$\oiint_{S_\infty} V\,\vec{E}\, d\vec{s} = 0$$

Esto sucede porque $V\sim\frac{1}{r}$, $E\sim\frac{1}{r^2}$, $ds\sim r^2$ de manera que $V\vec{E}\ \vec{ds}\sim\frac{1}{r}$ por lo que en el infinito la contribución del flujo sobre cada diferencial de superficie es nula, y por lo tanto la integral sompleta se anula.

En definitiva, pudimos mostrar que la energía invertida en construir una ρ resulta

$$U_{Tot} = \int_{R^3} \frac{E^2}{8\pi k} dv \qquad [8]$$

Esto es interesante porque vemos que la cantidad $u(\vec{r}) = \frac{E^2}{8\pi k}$ funciona como una **densidad de energía** y permite explicitar que el trabajo realizado para armar la configuración de cargas fue utilizado para generar el campo eléctrico asociado a las mismas. De esta manera podemos pensar que la energía entregada al sistema a lo largo del proceso de armado queda efectivamente almacenada en el campo eléctrico que la configuración de fuentes produce.

4. Autoenergías

La expresión de la Ec (5) nos permite estimar el trabajo se necesita para armar una configuración de cargas discretas, pero cuanta energía es necesaria para armar una única carga puntual? A esta cantidad se la denomina autoenergía. Para contestar a esta pregunta supongamos una esfera de radio R que contiene una densidad de carga constante ρ. El campo eléctrico generado por esta configuración particular de cargas resulta

$$\vec{E}(\vec{r}) = \{\frac{4\pi k}{3}\rho r\,\hat{r} \quad r < R \quad \frac{4\pi k}{3}\rho\frac{R^3}{r}\hat{r} \quad r > R$$

Como indica la ecuación (8), conocer el campo eléectrico producido por una configuración de cargas, nos habla sobre el trabajo invertido en construirla. En este caso resulta:

$$U_{Tot} = \int_{R^3} \frac{E^2}{8\pi k} dv = \int \frac{E^2}{8\pi k} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2k}\int_0^R \left(\frac{kQ}{R^3}\right)^2 r^4 dr + \frac{1}{2k}\int_R^\infty (kQ)^2 \frac{1}{r^2} dr$$

$$U_{Tot} = \frac{1}{2k}\left(\frac{kQ}{R^3}\right)^2 \frac{R^5}{5} + \frac{(kQ)^2}{2k}\left[\frac{1}{R} - \frac{1}{\infty}\right]$$

$$U = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R} \qquad [9]$$

El resultado de la ec (9) indica que la energía de configuración resulta inversamente proporcional al radio de la esfera. Esto implica que el trabajo necesario para armar una configuración de densidad ρ cte con $R \rightarrow 0$ diverge.

Por lo tanto, el trabajo necesario para armar una carga puntual es infinito (!). De hecho, pueden verificar que la integral de la ecuación (8) calculada para el campo producido por una única carga puntual en realidad diverge dando cuenta que el trabajo necesario para armar una carga puntual q a partir de $\delta q's$ que converjan en un único punto del espacio es infinitamente grande.

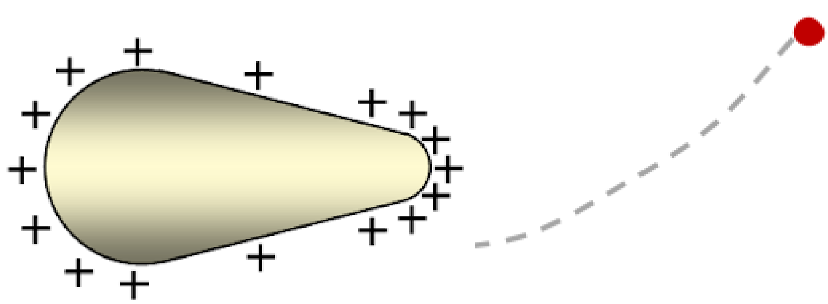
Ahora que sabemos esto recapitulemos al procedimiento que utilizamos para armar configuraciones de cargas discretas y notemos que para llegar a la ecuación (5) traíamos desde el infinito **cargas ya armadas** q_i que dejábamos unas en presencia de otras. Por esta razón lo que estábamos calculando era una energía de interacción entre las mismas y no la energía necesaria para armar cada una de ellas (que como vimos es infinita).

Tengamos presente entonces que si utilizamos la expresión (8) para calcular energías de configuraciones que involucren cargas discretas a partir de campos, encontraremos que dichas integrales divergen ya que incluyen la contribución de autoenergías infinitas. La expresión (8) sólo será de utilidad en el caso de distribuciones continuas de carga. En ese caso, el hecho de trabajar con una descripción mesoscópica asegura que dicha contribución no esté contemplada, los potenciales no diverjan y la integral de cuenta de interacciones entre cargas almacenadas en δv que no se solapen microscópicamente

5. Energia almacenada en conductores aislados

Hemos visto en clase que, en el equilibrio, los materiales conductores son equipotenciales y también comprobamos en clase que existe una proporcionalidad entre el valor del potencial electrostático que presenta un dado conductor y su carga neta: $V = \frac{1}{C} Q$ (en última instancia, esto está relacionado con el hecho de que tanto la fuerza coulombiana, la energía potencial y el potencial electrostático son proporcionales a la caga)

Lo que queremos estimar ahora es cuánta energía se encuentra almacenada en un conductor cargado o, equivalentemente, cuanto trabajo fue necesario hacer para cargarlo.



Para ello, podemos imaginar un proceso mediante el cual vamos trayendo desde el infinito una carga infinitesimal δq y depositándola sobre la superficie del conductor. Si lo hacemos de manera cuasiestática deberemos invertir una cantidad de trabajo infinitesimal, dado por la expresión: $dU = V(Q)\,\delta q$, donde V(Q) es el potencial electrostático que presenta el conductor cuando se encuentra cargado hasta un nivel de carga Q.

En definitiva, para cargarlo desde 0 hasta Q:

$$\Delta U = \int_0^Q V(q)\,dq = \frac{1}{C}\int_0^Q q\,dq = \frac{Q^2}{2C}$$

6. Energía almacenada en un capacitor

Podemos hacer esta cuenta de muchas maneras. Vamos a elegir mostrarlo usando la ecuación (6) que expresa la energía de una configuración continua de cargas:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv \qquad [10]$$

Ahora bien, consideremos nuestro capacitor como compuesto por dos conductores, cada uno con un potencial y una densidad de carga V_i, σ_i, $i = 1, 2$.

La ecuación (10) adopta para esta configuración de conductores la forma

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} \oiint \sigma_i V_i dS_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} V_i \oiint \sigma_i dS_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} V_i Q_i$$

por lo que para un capacitor con carga Q y diferencia de potencial DV finalmente resulta

$$U = V_1 Q_1 + V_2 Q_2 = Q(V_1 - V_2)$$

$$U = \frac{1}{2}Q\Delta V$$

Notar que para el caso del capacitor no-aislado la carga la podemos pensar como función del voltaje ($Q=C\,\Delta V$) por lo que $U=½\,C\,\Delta V^2$ mientras que para el caso de capacitor aislado (para el cual tiene sentido plantear la relación carga-voltaje como $\Delta V=Q/C$) la expresión de la energía queda: $U=½\,\Delta Q^2/C$

7. Trabajos virtuales

A DESARROLLAR

8. Energía electrostática en presencia de dieléctricos

Imaginemos una distribución de cargas y dieléctricos como muestra la Fig 4. Nos preguntamos ahora sobre el trabajo necesario para generarla.

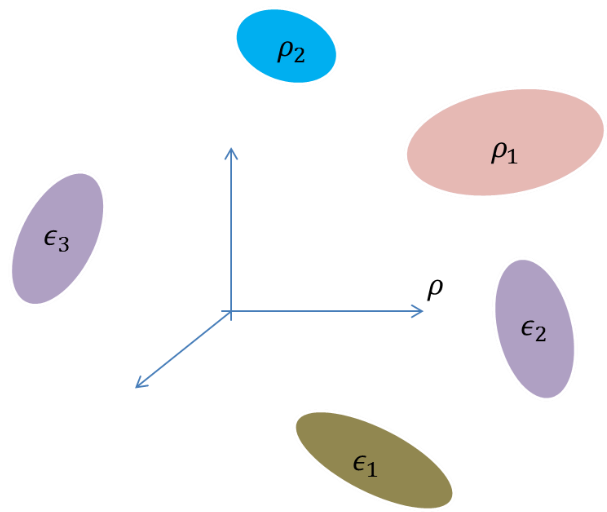


Fig 4 Configuración de distribución de cargas continuas en presencia de 3 dieléctricos

La energía de una configuración no puede depender del orden en que vamos ubicando los elementos de la misma. Aprovechamos esto para simplificar su estimación e imaginamos que lo primero que hacemos es traer desde el infinito en primer lugar a los dieléctricos. En este caso no realizamos trabajo alguno , ya que no se establece ningún campo eléctrico durante el proceso. Una vez ubicados los dieléctricos comenzamos a traer las cargas. En este caso sigue valiendo la expresión (10)

$$U = \frac{1}{2}\int \rho(\vec{r})V(\vec{r})dv = \frac{1}{2}\int \rho_{libre}(\vec{r})V(\vec{r})dv \qquad [11]$$

La ultima igualdad surge del hecho de que el gasto energético se realiza en relación a la localización de las cargas libres (los dieléctricos ya se encuentran en sus lugares). Por lo tanto, en el integrando , $\rho(\vec{r}) = \rho_{libre}(\vec{r})$, mientras que $V(\vec{r})$ sigue siendo el potencial electrostático total, producido tanto por cargas libres como por las cargas de polarización que podrían aparecer. Recordando la definición de campo desplazamiento $\vec{D}$, la ecuación (11) puede reescribirse como:

$$U = \frac{1}{2}\int \rho_{libre}(\vec{r})V(\vec{r})dv = \frac{1}{2}\int \vec{\nabla}.\vec{D}(\vec{r})\, V(\vec{r})dv \qquad [12]$$

Fijense que esta expresión es la equivalente a la que obtuvimos en la Ec (7). De hecho, repitiendo los pasos que seguimos en la sección 2 es fácil ver que:

$$\vec{\nabla}.\left(V\,\vec{D}\right) = V\,\vec{\nabla}.\vec{D} + \vec{D}.\,\vec{\nabla}V = V\,\vec{\nabla}.\vec{D} - \vec{D}.\,\vec{E}$$

Y siguiendo el mismo razonamiento que antes (ver Ec 7 y subsiguientes) llegamos a que

$$U_{Tot} = \int_{R^3} \frac{\vec{D}.\vec{E}}{2} dv \qquad [13]$$

Vemos entonces que, en presencia de dieléctricos, la densidad de energía queda definida como

$$u(\vec{r}) = \frac{\vec{D}.\vec{E}}{2} \qquad [14]$$

Para un medio lineal, isótropo y homogéneo tenemos que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, por lo que

$$u(\vec{r}) = \frac{\vec{D}.\vec{E}}{2} = \frac{\varepsilon E^2}{2} = \frac{D^2}{2\varepsilon} \qquad [15]$$

9. Energía y trabajos virtuales en presencia de dieléctricos

A DESARROLLAR