Problema 12 Guia 1

Llamemos R_1 al radio del cilindro, R_2 al radio del hueco, y $\vec{d}$ a la posición del centro del hueco respecto al eje del cilindro.

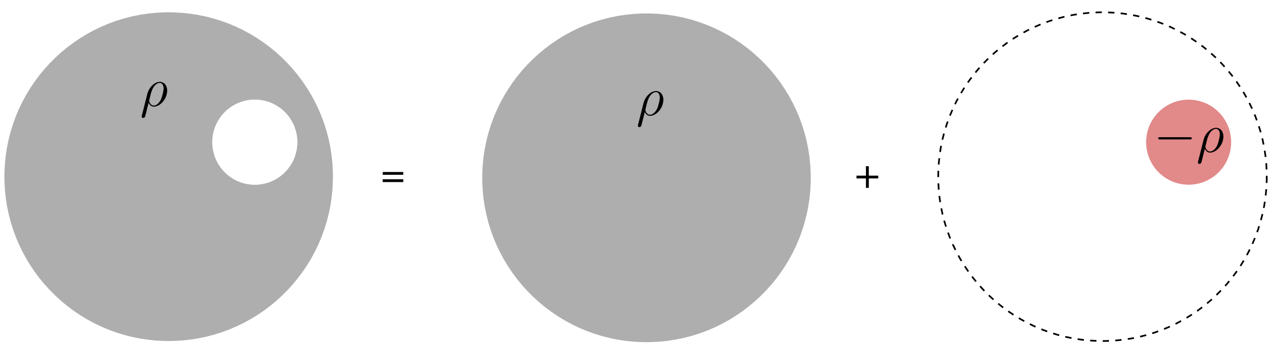
Para resolver este problema, lo primero que tenemos que hacer es calcular el campo de un cilindro (infinito) cargado con densidad de carga ρ y radio R. Por la simetria cilindrica del problema, esto podemos hacerlo con Gauss: el campo solo puede depender de r y ademas apunta en r. Por lo tanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{\text{enc}}}{\varepsilon_0} \Longrightarrow h2\pi r E(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho h \pi r^2}{\varepsilon_0} & r < R \\ \\ \dfrac{\rho h \pi R^2}{\varepsilon_0} & r > R \end{cases} \tag{1}$$

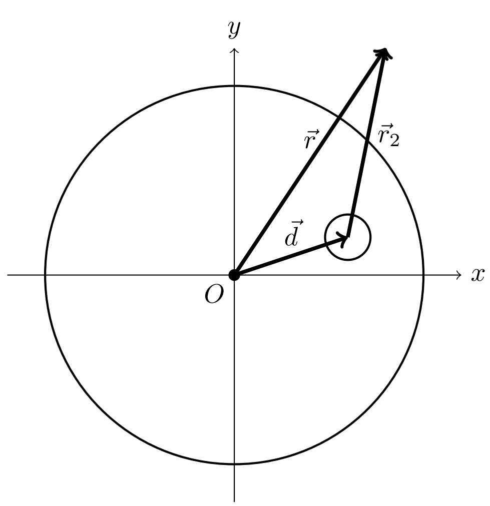
y por lo tanto

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} & r < R \\ \\ \dfrac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > R \end{cases} \tag{2}$$

Vayamos ahora al problema del cilindro con un hueco. El primer paso es convencerse de que este problema es la superposición de dos cilindros cargados así:



Por lo tanto, todo lo que hay que hacer es escribir el campo de ambos cilindros y sumarlos... pero claro la dificultad está en que los cilindros no son concéntricos. Para encarar eso, definamos algunos vectores: $\vec{d}$ es la posición del centro del hueco, $\vec{r}$ es la posición genérica en la que vamos a calcular el campo y $\vec{r}_2$ es la posición en la que calculamos el campo pero visto desde el centro del hueco. A continuacion dibujamos todo esto:



Del dibujo notemos que $\vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{d}$. Tenemos ahora que escribir el campo de los dos cilindros y luego simplemente sumarlos:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r})$$

.

Para el campo del cilindro con carga ρ, el campo es sencillamente la expresión 2 con radio R_1:

$$\vec{E}_\rho(\vec{r}) = \vec{E}_\rho(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} & r < R_1 \\ \\ \dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} & r > R_1 \end{cases} \tag{3}$$

Hasta acá nada raro. Veamos qué hacer con el cilindro de carga $-\rho$: ahora también el campo es como el de la expresión 2, *pero* hay que tener el cuidado de escribir correctamente este campo desde el mismo sistema de referencia que usamos para el anterior. El r que va a aparecer ahora, no es la distancia al origen, sino la distancia al centro del hueco. Es decir que en lugar de r debe ir $r_2 = |\vec{r}_2| = |\vec{r} - \vec{d}|$. Además, el radio involucrado ahora es R_2. Y por último, **el versor involucrado** ahora es

$$\hat{r}_2 = \frac{\vec{r}_2}{|\vec{r}_2|} = \frac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|}$$

Ahora sí con esto podemos reemplazar en la expresión 2 y obtener $\vec{E}_{-\rho}(\vec{r})$:

$$\vec{E}_{-\rho}(\vec{r}) = -\begin{cases} \dfrac{\rho r_2}{2\varepsilon_0}\hat{r}_2 & r_2 < R_2 \\ \\ \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0 r_2}\hat{r}_2 & r_2 > R_2 \end{cases} \tag{4}$$

y tenemos que reemplazar con $r_2 = |\vec{r} - \vec{d}|$ y $\hat{r}_2 = \dfrac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|}$:

$$\vec{E}_{-\rho}(\vec{r}) = -\begin{cases} \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{d}\right) & |\vec{r} - \vec{d}| < R_2 \\ \\ \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^2} & |\vec{r} - \vec{d}| > R_2 \end{cases} \tag{5}$$

Solo nos queda sumar las expresiones 3 y 5. Quedará dividido en tres regiones: una dentro del cilindro chico, otra dentro del cilindro grande (pero fuera del chico) y otra fuera del cilindro grande:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r}) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} - \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0}\left(\vec{r} - \vec{d}\right) & |\vec{r} - \vec{d}| < R_2 \\ \\ \dfrac{\rho r}{2\varepsilon_0}\hat{r} - \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^2} & r < R_1 \wedge |\vec{r} - \vec{d}| > R_2 \\ \\ \dfrac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}\hat{r} - \dfrac{\rho R_2^2}{2\varepsilon_0}\dfrac{\vec{r} - \vec{d}}{|\vec{r} - \vec{d}|^2} & r > R_1 \end{cases} \tag{6}$$

Como comentario final, notemos que el campo no tiene simetría cilíndrica. La presencia del hueco la rompe. Sin embargo, gracias a que es posible descomponer el problema en el de dos cilindros que si tienen esa simetría, pudimos usar el teorema de Gauss para calcular los campos y luego sumarlos con los debidos cuidados.