Partamos de que conocemos el campo sobre el eje de un anillo:

$$\vec{B}(z) = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R_a^2}{[(z-z_0)^2 + R_a^2]^{3/2}}\,\hat{z} \tag{1}$$

en donde el anillo puede estar desplazado en una distancia z_0 del origen. Además al radio del anillo lo llamamos R_a para distinguirlo del radio de la esfera.

La esfera rotando la podemos pensar como un montón de anillos como el dibujado en la figura:

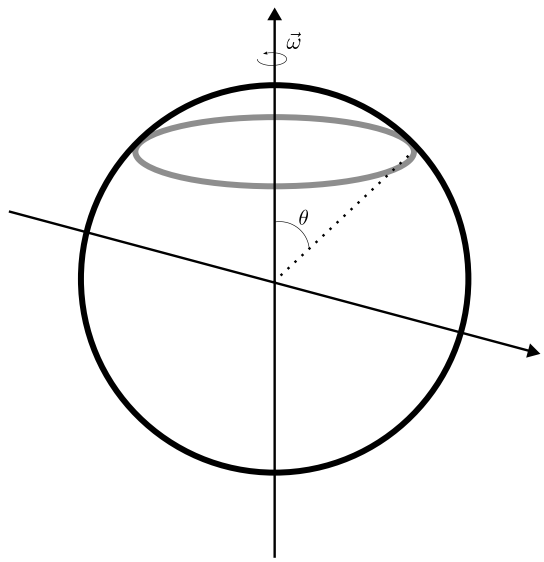

Figura 1: .

Cada anillo generará un campo, y el campo total será la suma (la integral) de todos los anillos:

$$\vec{B}(z) = \int_0^\pi \vec{B}(z,\theta)\,d\theta$$

El campo $\vec{B}(z,\theta)$ es el que genera el anillo caracterizado por el ángulo θ en la posición z. Ahora los parámetros que están en la ecuación 1, van a depender del ángulo θ:

- $z_0(\theta) = R\cos(\theta)$
- $R_a(\theta) = R\sin(\theta)$
- $I(\theta) = \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{\sigma ds}{dt} = \dfrac{\sigma R^2 \sin(\theta) d\theta d\varphi}{dt} = \sigma R^2 \sin(\theta)\;\omega d\theta$ donde usamos el diferencial de superficie en esféricas y que $\dfrac{d\varphi}{dt} = \omega$.

Bueno la integral entonces queda:

$$\vec{B}(z) = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I(\theta)}{2} \frac{R_a(\theta)^2}{\left[(z - z_0(\theta))^2 + R_a(\theta)^2\right]^{3/2}}\,\hat{z}\,d\theta = \frac{\mu_0 \sigma\omega R^4 \hat{z}}{2} \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{\left[(z - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta\right]^{3/2}}\;d\theta$$

Un primera mirada a esa integral puede despertar cierto temor en el lector. Sin embargo, podemos convencernos sin demasiada dificultad de que en realidad sabemos como calcularla. Usando que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ podemos re-escribrila así:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta\left[1-\cos^2\theta\right]}{\left[z^2 + R^2 - 2zR\cos\theta\right]^{3/2}}\;d\theta \underbrace{=}_{u=\cos\theta} \int_{-1}^1 \frac{1-u^2}{\left[z^2 + R^2 - 2zRu\right]^{3/2}}\;du \tag{2}$$

Para ahorrar tinta, definamos $a = R^2 + z^2$ y $b = -2zR$. La integral que tenemos que hacer, sale con una sustitución:

$$\int \frac{1-u^2}{(a+bu)^{3/2}}\, du \underbrace{=}_{a+bu=y} \frac{1}{b}\int \frac{1-\left(\frac{y-a}{b}\right)^2}{y^{3/2}}\, dy = \frac{1}{b}\int \left[\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)y^{-3/2} - \frac{y^{1/2}}{b^2} + \frac{2a}{b}y^{-1/2}\right] dy =$$

$$= \frac{1}{b}y^{-1/2}\left[-2\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right) - \frac{2}{b^2}y^2 + \frac{4a}{b}y\right] + C$$

Ahora falta volver atrás en las sustituciones que hicimos, reemplazando y por $a+bu$, luego u por $\cos\theta$ y tenemos el resultado!

Es cierto que si bien no hay mucha complejidad, estas cuentas son engorrosas. Es recomendable ayudarse con algún software que nos ahorre trabajo (y errores de cuentas). ¿ChatGPT? Quizás algún día. Por hoy, el mejor para esto es uno llamado Mathematica de Wolfram, que puede hacer cosas asombrosas cuando se requieren cálculos simbólicos.

En fin, la integral 2 resulta en lo siguiente:

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta\left[1-\cos^2\theta\right]}{\left[z^2+R^2-2zR\cos\theta\right]^{3/2}}\, d\theta = \begin{cases} \dfrac{4}{3z^3} & |z| > R \\[2ex] \dfrac{4}{3R^3} & |z| < R \end{cases}$$

Así que el campo resulta:

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \dfrac{2\mu_0\sigma\omega R^4}{3z^3}\,\hat{z} & |z| > R \\[2ex] \dfrac{2\mu_0\sigma\omega R}{3}\,\hat{z} & |z| < R \end{cases} \tag{3}$$

Vemos como curiosidad que el campo adentro es uniforme. Hagamos algunos comentarios:

- El campo lejos se comporta exactamente como un dipolo magnético, porque decae como z^{-3}. Este problema en particular, puede resolverse exactamente para cualquier punto del espacio, es decir no solo para los puntos sobre el eje de rotación (ver ejemplo 5.11 en el libro de Griffiths). Resolviendo en todo el espacio también se ve que el campo se parece mucho al de un dipolo magnético ideal centrado en el origen.

- Una esfera que rota sobre su eje es algo que todos conocemos: vivimos sobre eso. Un podría preguntarse si este es el origen del campo magnético terrestre, dado que la tierra tiene carga acumuladas en su superficie. Esto explicaría la existencia de polos magnéticos, teniendo en cuenta el comentario anterior. Sin embargo, esta respuesta no es la correcta. El campo $\vec{B}$ de la tierra se origina principalmente por corrientes que están en el núcleo externo de la tierra.

- Por último, podríamos preguntarnos si podemos resolver este problema olvidándonos del anillo y haciendo uso solo de la ley de Biot y Savart. Claro que se puede. Solo hay que escribir cuanto vale la densidad de corriente superficial $\vec{g}$. Una forma de hacerlo es usando que vale $\vec{g} = \sigma\vec{v}$ (¿Por qué?) , osea la densidad de carga multiplicada por la velocidad (de cada punto sobre la superficie de la esfera). Y la velocidad de cada punto sobre la esfera es $\vec{v}(\theta) = R\sin\theta\,\dot{\varphi}\hat{\varphi} = R\sin\theta\,\omega\hat{\varphi}$. Lo importante es estar atentos y notar que en este problema hay una mezcla entre coordenadas esféricas y cilíndricas. Bueno esta $\vec{g}(\theta)$ es la que podemos meter en la ley de Biot-Savart, y recuperaríamos, claro, el resultado 3.