

Apuntes de Física del Plasma

Fernando O. Minotti

2do cuatrimestre de 2019 (modificado agosto 2025)

Índice general

1. Introducción	5
1.1. Generalidades	5
1.2. Longitud de Debye	5
1.3. Logaritmo de Coulomb	9
1.4. Frecuencia de Plasma	12
1.5. Reactores de fusión	13
2. Movimiento en campos magnéticos	17
2.1. Deriva generada por fuerza aplicada	18
2.2. Derivas en campo magnéticos constantes suavemente variables en el espacio.	20
2.2.1. i) $\mathbf{B}$ paralelo a $\mathbf{e}_z$ con variación perpendicular	20
2.2.2. ii) $\mathbf{B}$ de módulo constante con ligera curvatura	21
2.2.3. iii) $\mathbf{B}$ paralelo a $\mathbf{e}_z$ con variación a lo largo de z	23
2.3. Invariantes adiabáticos	25
2.4. Variaciones temporales lentas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$	27
2.5. Corrientes de deriva	29
3. Plasma como fluido	31
3.1. Descripción cinética	31
3.2. Descripción de fluido	32
3.2.1. Fluidos múltiples	32
3.2.2. Aproximación de dos fluidos	36
3.2.3. Fluido simple y MHD	37
3.2.4. Congelamiento de líneas magnéticas	42
3.2.5. Número de Lundquist	44
3.2.6. Modelo de CGL	45
3.2.7. MHD bidimensional incompresible	47
3.3. Conservación de la energía	49
3.4. Aproximación de difusión	50
3.4.1. Plasmas débilmente ionizados	50

3.4.2. Plasmas totalmente ionizados	55
4. Colisiones	57
4.1. Colisiones en plasmas totalmente ionizados	57
4.2. Ecuación de Fokker-Planck	61
4.3. Relajación en plasmas	63
4.3.1. Plasmas fríos	63
4.3.2. Plasmas maxwellianos	66
4.3.3. Electrones desbocados (runaway electrons)	68
4.4. Resistividad en plasma maxwelliano	69
5. Oscilaciones en plasmas	72
5.1. Ecuaciones básicas	72
5.2. Oscilaciones en plasmas sin campo magnético	74
5.3. Oscilaciones en plasmas con campo magnético	77
5.3.1. Propagación paralela	80
5.3.2. Propagación perpendicular	85
5.3.3. Propagación oblicua	87
5.4. Ondas de deriva (drift waves)	89
6. Equilibrios y estabilidad	92
6.0.1. Tokamak	94
6.1. Pinchs	95
6.1.1. Theta-pinch	95
6.1.2. Z-pinch	96
6.2. Ecuación de Grad-Shafranov	98
6.3. Estabilidad	99
6.4. Modos flute	102
6.5. Principio de energía de Bernstein	107
6.5.1. Estabilidad del z-pinch	111
6.6. Inestabilidad de intercambio	115
6.7. Inestabilidades tipo “ballooning”	120
6.8. Inestabilidades resistivas (modos “tearing”)	121
6.8.1. Problema interno	123
6.8.2. Problema externo	125
6.9. Modos tearing en tokamaks	126
7. Teoría cinética de plasmas	134
7.1. Aproximación de Vlasov	134
7.2. Ondas de plasma y amortiguamiento de Landau	139
7.3. Amortiguamiento de Landau en ondas iónico-acústicas	142

7.4. Inestabilidad de dos haces	143
7.5. Amortiguamiento inverso de Landau	145
7.5.1. Inestabilidad de ondas de plasma	145
7.5.2. Inestabilidad iónico-acústica	145

Capítulo 1

Introducción

1.1. Generalidades

Se denomina plasma al medio gaseoso que contiene un número apreciable de cargas libres, pero que es aproximadamente neutro en su conjunto. La gran cantidad de cargas libres da lugar a altas conductividades eléctricas y a la posibilidad de establecer fácilmente corrientes eléctricas que interactúan con campos magnéticos aplicados y con los propios generados por tales corrientes. Un enorme porcentaje ($> 99\%$) de la materia en el universo existe aparentemente en forma de plasma; el medio estelar, interplanetario e interestelar, y las altas atmósferas planetarias. Sin embargo, en los medios relativamente densos y fríos en los que se desarrolla la vida el estado de plasma es más raro por la tendencia a la recombinación de las cargas libres. En el laboratorio debe aplicarse energía a un gas para producir el estado de plasma, y su mantenimiento prolongado, sobre todo en las condiciones de densidad y temperatura necesarias para las aplicaciones, incluyendo la generación de reacciones de fusión nuclear, plantea enormes desafíos tecnológicos.

1.2. Longitud de Debye

Imaginemos entonces que entregamos energía a un gas, por ejemplo estableciendo una descarga eléctrica a través de éste. Los electrones emitidos por el cátodo disociarán y ionizarán las moléculas del gas, produciendo a su vez más electrones capaces de ionizar. A su vez, los electrones libres emiten radiación electromagnética al ser acelerados en su interacción con otras partículas, y los iones, átomos y moléculas emiten y absorben radiación al desexcitarse o excitarse a distintos niveles; esta radiación también produce ionizaciones. Se establece eventualmente un equilibrio entre los distintos tipos

de ionizaciones, recombinaciones y pérdidas y ganancias de partículas a través del contorno, sostenido por el circuito externo. En este estado de plasma tendremos una población de electrones, iones con distintos estados de carga y excitación, partículas neutras (moléculas y átomos) también en distintos estados excitados, y radiación electromagnética. La población relativa de cada una de estas especies dependerá del tipo de equilibrio que se establezca; los procesos de ionización más importantes son los debidos a impacto electrónico ($e + A \rightarrow A^+ + 2e$) y ionización radiativa ($h\nu + A \rightarrow A^+ + e$), mientras que las recombinaciones corresponden a los procesos inversos; recombinación a tres cuerpos ($A^+ + 2e \rightarrow e + A$) y recombinación radiativa ($A^+ + e \rightarrow h\nu + A$). En equilibrio termodinámico estos cuatro procesos estarían equilibrados; esto es, habría una temperatura única a la que estarían todas las especies (incluyendo la radiación) a la que cada proceso y su inverso producirían la misma cantidad de reacciones por unidad de tiempo, lo que requiere una población relativa de especies muy particular para cada temperatura. Muy rara vez el plasma es lo suficientemente extenso y denso para retener la radiación y establecer así un equilibrio con ella (esto sí es posible en los interiores estelares); de todas maneras es todavía posible tener equilibrio termodinámico entre los procesos que no involucran radiación; la ecuación de Saha permite entonces obtener la población relativa de especies. Sin embargo, a las densidades y temperaturas habituales de plasmas de laboratorio la recombinación a tres cuerpos es generalmente mucho menos probable que la recombinación radiativa. El resultado es entonces que muchas veces se establece un equilibrio de poblaciones no termodinámico, en el que la ionización por impacto es balanceada por recombinación radiativa, el denominado equilibrio corona (por ser característico de la corona solar).

Los procesos inelásticos considerados producen entonces un cierto nivel de población de las especies del plasma. Estas especies, a su vez, interactúan también a través de procesos elásticos, especialmente las especies cargadas a través de la fuerza eléctrica de largo alcance. Imaginemos un plasma en equilibrio mecánico, en el que cada elemento fluido (macroscópico) del plasma está quieto y, por simplicidad, consideremos que contiene una sola especie de iones. Tendremos una densidad volumétrica de electrones $n_e(\mathbf{x})$, y una densidad $n_i(\mathbf{x})$ de iones de carga Ze (e es el módulo de la carga del electrón). El equilibrio mecánico requiere que la fuerza neta sobre cada especie en el elemento de volumen sea cero; así, escribimos

$$\begin{aligned} -T\nabla n_e + en_e\nabla\phi &= 0, \\ -T\nabla n_i - Zen_i\nabla\phi &= 0, \end{aligned}$$

donde hemos aproximado la presión de cada especie por nT , la expresión de gas ideal (con la temperatura T medida en unidades de energía), y supuesto

temperatura uniforme. Por la condición de estacionariedad el campo eléctrico es potencial, con potencial ϕ , que estará determinado por la ecuación de Poisson (unidades MKS)

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_{elec}}{\varepsilon_0},$$

dada la densidad de carga ρ_{elec} . Imaginemos que en el seno de tal plasma existe una partícula quieta de carga Q , que consideramos en el origen de coordenadas, y determinemos entonces la distribución de equilibrio de densidades y de potencial eléctrico. Las condiciones de equilibrio se integran trivialmente dando

$$n_e = n_{e0} \exp(e\phi/T), \quad (1.1a)$$

$$n_i = n_{i0} \exp(-Ze\phi/T), \quad (1.1b)$$

por lo que escribimos la ecuación de Poisson como

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\varepsilon_0} [Q\delta(\mathbf{x}) + Zen_{i0} \exp(-Ze\phi/T) - en_{e0} \exp(e\phi/T)].$$

Como esperamos campo eléctrico nulo lejos del origen, tomando $\phi = 0$ muy lejos, debe ser

$$Zn_{i0} = n_{e0}, \quad (1.2)$$

que es la condición de que el plasma sean neutro lejos de la carga Q . La ecuación obtenida para el potencial es extremadamente complicada, por lo que la aproximaremos suponiendo que ϕ es lo suficientemente pequeño para aproximar las exponenciales a primer orden (esto no será correcto muy cerca de Q , pero será suficiente en las zonas de interés). Escribimos entonces, usando la (1.2), y usando simetría esférica

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \delta(r) + \frac{e^2 n_{e0}}{\varepsilon_0 T} (1 + Z) \phi,$$

cuya solución es

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \exp(-r/\lambda_D),$$

donde hemos introducido la denominada *longitud de Debye*

$$\lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_0 T}{e^2 n_{e0} (1 + Z)}}$$

$$\lambda_D [m] = 7,4 \times 10^3 \sqrt{\frac{T [eV]}{n_{e0} [m^{-3}] (1 + Z)}}.$$

(1 eV = $1,6 \times 10^{-19} J = 11600^\circ K$).

Vemos que el potencial de la carga es apantallado a distancias mayores que λ_D . La razón es clara de las relaciones (1.1); si $Q > 0$ el potencial cercano a la carga es positivo y las (1.1) indican entonces que n_e será mayor allí que muy lejos, mientras que n_i será menor (lo opuesto ocurre si $Q < 0$), manifestando la tendencia de las cargas a acumularse cerca de la carga de signo contrario. La presencia de un gran número de cargas, así como la agitación térmica microscópica impiden el aglutinamiento excesivo y determina una distancia característica de apantallamiento finita.

Lo dicho para la carga Q vale para cualquiera de las partículas cargadas del plasma; cada electrón o ión siente el campo individual de las partículas que están dentro de una esfera de radio $\approx \lambda_D$ alrededor de él. El campo de cada partícula fuera de esta esfera de Debye es fuertemente apantallado y el electrón o ión sólo percibe el campo macroscópico (o colectivo) generado por todas las partículas fuera de su esfera de Debye.

El número de partículas dentro de la esfera de Debye es

$$\begin{aligned} N_D &\simeq \frac{4\pi}{3} n_{e0} \left(1 + \frac{1}{Z}\right) \lambda_D^3 \\ &= \frac{1,7 \times 10^{12}}{Z} \sqrt{\frac{T^3 [eV]}{n_{e0} [m^{-3}] (1 + Z)}}, \end{aligned}$$

que normalmente es un número muy grande; aun en plasmas relativamente fríos, de unos pocos eV, con densidades características de $10^{20} m^{-3}$, tenemos $N_D \gtrsim 100$. De hecho, la condición $N_D \gg 1$ es la que caracteriza cuantitativamente a un plasma, porque le otorga su dinámica particular al tener un gran número de partículas interactuando simultáneamente a través de la fuerza eléctrica. El denominado *parámetro de plasma* es la inversa de N_D

$$g \equiv N_D^{-1} \ll 1.$$

Notemos el hecho importante que, al haber una separación media entre partículas dada por (no hacemos distinción entre especies)

$$d \approx n^{-1/3},$$

la energía media de interacción por partícula es

$$\langle U \rangle \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \approx \frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_0},$$

que si la comparamos con la energía cinética media $\langle W \rangle$ que, por equipartición, es del orden de T , tenemos

$$\frac{\langle W \rangle}{\langle U \rangle} \approx \frac{4\pi\epsilon_0 T}{e^2 n^{1/3}} \approx N_D^{2/3} \gg 1.$$

Al ser la energía de interacción media mucho menor que la energía cinética, es una buena aproximación considerar al plasma como un gas ideal desde el punto de vista termodinámico, como hicimos más arriba.

1.3. Logaritmo de Coulomb

El hecho que cada partícula interactúa simultáneamente con $\approx N_D$ partículas a través de la fuerza de Coulomb genera desviaciones de su trayectoria que se consideran como colisiones. Estimemos primero cuán cerca debe pasar una partícula de otra para sufrir una desviación apreciable. Esto requiere que llegue a distancias b_c en las que la energía de interacción es comparable a la cinética; como ya vimos, podemos escribir

$$T \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b_c} \implies b_c \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 T}.$$

Notemos primero que, como es natural de la discusión anterior, esta distancia es mucho menor que la separación media entre partículas

$$\frac{b_c}{d} \approx \frac{e^2 n^{1/3}}{4\pi\epsilon_0 T} \approx N_D^{-2/3} \ll 1.$$

Designemos a este tipo de colisión binaria colisión de Coulomb. La sección eficaz correspondiente es

$$\sigma_c \approx \pi b_c^2 \approx \frac{e^4}{16\pi\epsilon_0^2 T^2} \simeq \frac{6,5 \times 10^{-26}}{T^2 [keV]} m^2.$$

En términos de la sección eficaz y de la densidad de partículas blanco podemos definir un camino libre medio entre colisiones de Coulomb

$$\lambda_c = \frac{1}{n\sigma_c} \approx \frac{16\pi\epsilon_0^2 T^2}{ne^4},$$

que, comparado con la longitud de Debye, es

$$\frac{\lambda_c}{\lambda_D} \approx \frac{16\pi\epsilon_0^2 T^2}{ne^4} \sqrt{\frac{e^2 n}{\epsilon_0 T}} \approx N_D \gg 1. \quad (1.3)$$

El punto importante es ver ahora qué sucede con las interacciones Coulombianas débiles (con parámetros de impacto grandes) que sufre la partícula al interactuar con las $\approx N_D$ partículas dentro de su esfera de Debye. Para esto estimemos el ángulo que se desvía una partícula al pasar a una distancia b de

otra. El cambio de velocidad perpendicular al movimiento original será del orden de la aceleración, debida a la interacción, por el tiempo de duración de la misma

$$\Delta u_{\perp} \approx \frac{1}{m} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \Delta t \approx \frac{1}{m} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b^2} \frac{b}{u},$$

por lo que el ángulo de desviación será

$$\delta\theta \approx \frac{\Delta u_{\perp}}{u} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 b m u^2} = \frac{b_0}{b}, \quad (1.4)$$

donde hemos introducido una constante similar a b_c

$$b_0 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m u^2}. \quad (1.5)$$

El $\delta\theta$ estimado corresponde a la desviación por interacción con una sola partícula, si superponemos las desviaciones simultáneas al interactuar con las $\approx N_D$ partículas dentro de la esfera de Debye, el valor medio $\langle\delta\theta\rangle$ se anulará por ser las desviaciones equiprobables en cualquier dirección; sin embargo, la desviación cuadrática media no es nula, sino del orden

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle \approx \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} (\delta\theta)^2 2\pi n b db L$$

donde $2\pi n b db L$ es el número de partículas blanco que encuentra la partícula a una distancia b cuando recorre una dada longitud L . Usando (1.4) tenemos inmediatamente

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle \approx 2\pi n b_0^2 \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right) L.$$

Como la interacción está apantallada a distancias mayores que λ_D tomamos $b_{\max} \approx \lambda_D$, mientras que, como consideramos desviaciones pequeñas, debe ser $b_{\min} > b_c$; debido a la insensibilidad de la función logaritmo, el valor no es muy sensible a los valores precisos por lo que tomamos $b_{\min} \approx b_c$. Con esto, la desviación cuadrática media de la partícula al recorrer una distancia L es

$$\langle(\delta\theta)^2\rangle \approx 2\pi n b_0^2 \ln \Lambda L,$$

donde hemos introducido el símbolo usual

$$\Lambda \equiv \frac{\lambda_D}{b_c} \approx \sqrt{\frac{\epsilon_0 T}{e^2 n}} \frac{4\pi\epsilon_0 T}{e^2} \approx N_D,$$

cuyo logaritmo es denominado *logaritmo de Coulomb*.

Vemos entonces que la partícula se desvía apreciablemente, $\langle(\delta\theta)^2\rangle \approx 1$, luego de recorrer una distancia

$$\lambda_{\perp} \approx \frac{1}{2\pi n b_0^2 \ln \Lambda},$$

por lo que $\lambda_{\perp}$ es el camino libre medio para desviaciones perpendiculares por interacciones simultáneas de baja desviación individual, pero con un número grande de partículas blanco ($\approx N_D$). En términos de una sección eficaz podemos escribir

$$\lambda_{\perp} = \frac{1}{n\sigma_{\perp}},$$

de donde identificamos la sección eficaz correspondiente

$$\sigma_{\perp} \approx 2\pi b_0^2 \ln \Lambda \approx \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2 (mu^2)^2} \ln \Lambda.$$

Para partículas con energías medias características, $mu^2 \approx T$, tenemos

$$\sigma_{\perp} \approx \frac{e^4}{8\pi\epsilon_0^2 T^2} \ln \Lambda \approx \sigma_c \ln \Lambda.$$

Obtuvimos así el resultado importante que las numerosas colisiones de poca desviación son un factor $\ln \Lambda \approx \ln N_D$ más efectivas para desviar las partículas que las pocas colisiones cercanas de Coulomb. Notemos que (usando (1.3))

$$\frac{\lambda_{\perp}}{\lambda_D} \approx \frac{\lambda_c}{\lambda_D \ln \Lambda} \approx \frac{N_D}{\ln N_D} \gg 1.$$

Estimemos finalmente la importancia de las colisiones de partículas cargadas con neutros. Para colisiones con éstos la sección eficaz es aproximadamente

$$\sigma_n \approx \pi a_0^2 \approx 10^{-20} m^2,$$

donde a_0 es el radio de Bohr. Si, para estar del lado seguro, usamos la menor de las secciones eficaces para colisiones entre partículas cargadas, σ_c , podemos escribir la condición para que dominen las colisiones con partículas cargadas como

$$\lambda_c = \frac{1}{n\sigma_c} < \lambda_n = \frac{1}{n_n\sigma_n},$$

donde n sin subíndice indica la densidad de cualquiera de las especies cargadas, y n_n la de neutros. La condición es entonces

$$\frac{n}{n_n} > \frac{\sigma_n}{\sigma_c} \approx \left(\frac{a_0}{b_c}\right)^2 \approx 0,03 T^2 [eV].$$

Por supuesto, la relación n/n_n es una función complicada de la temperatura y del tipo de equilibrio que se establezca; sin embargo, la condición se cumple generalmente cuando la temperatura supera muy pocos eV . En el caso de hidrógeno, ya para $T \approx 1,5 eV$ es $n/n_n \approx 1$, con lo que las colisiones con neutros son despreciables (note sin embargo que en este caso un tercio de las partículas del plasma corresponde a neutros). Como regla, las colisiones con neutros son dominantes por debajo del eV , y totalmente despreciables para unos cuantos eV . En el rango intermedio, que corresponde, por ejemplo, a los arcos de alta presión, ambos tipos de colisiones deben considerarse.

1.4. Frecuencia de Plasma

Consideremos ahora un modelo simple de plasma constituido por iones y electrones "fríos" (sin presión). Las ecuaciones de conservación de partículas y de movimiento de cada especie α ($\alpha = i, e$, designa iones o electrones, respectivamente) se escribirán como

$$\begin{aligned}\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (n_\alpha \mathbf{v}_\alpha) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha &= \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E},\end{aligned}$$

donde el campo eléctrico $\mathbf{E}$ satisface la ecuación de Gauss

$$\varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = n_i q_i + n_e q_e,$$

con n_α la densidad numérica de la especie dada. Si consideramos apartamientos pequeños $\delta \mathbf{v}_\alpha$, δn_α y $\delta \mathbf{E}$ de un estado base con campo eléctrico y velocidades nulos, y densidades uniformes que cumplen neutralidad: $n_{i0} q_i + n_{e0} q_e = 0$, la linealización de las ecuaciones anteriores resulta en

$$\begin{aligned}\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + n_{\alpha 0} \nabla \cdot \delta \mathbf{v}_\alpha &= 0, \\ \frac{\partial \delta \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} &= \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \delta \mathbf{E}, \\ \varepsilon_0 \nabla \cdot \delta \mathbf{E} &= \delta n_i q_i + \delta n_e q_e.\end{aligned}$$

Tomado la divergencia de la ecuación intermedia y usando las otras dos para reemplazar las divergencias de $\delta \mathbf{v}_\alpha$ y de $\delta \mathbf{E}$, se tiene

$$\frac{\partial^2 \delta n_\alpha}{\partial t^2} = -\frac{n_{\alpha 0} q_\alpha}{\varepsilon_0 m_\alpha} (\delta n_i q_i + \delta n_e q_e),$$

que al multiplicar por q_α y sumar para ambas especies resulta en

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} (\delta n_i q_i + \delta n_e q_e) = - \left(\frac{n_{i0} q_i^2}{\varepsilon_0 m_i} + \frac{n_{e0} q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \right) (\delta n_i q_i + \delta n_e q_e),$$

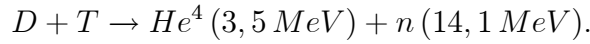
que corresponde a oscilaciones armónicas de $\delta n_i q_i + \delta n_e q_e$ con frecuencia angular dada por

$$\omega_p^2 = \frac{n_{i0} q_i^2}{\varepsilon_0 m_i} + \frac{n_{e0} q_e^2}{\varepsilon_0 m_e} \simeq \frac{n_{e0} q_e^2}{\varepsilon_0 m_e}, \quad (1.6)$$

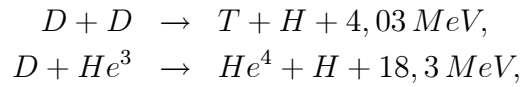
que se denomina frecuencia de plasma. Como es claro de la deducción, estas oscilaciones localizadas (no propagantes) de las densidades se deben a que una perturbación de las mismas genera fuerzas eléctricas que son restitutivas, a la vez que la inercia sostiene la oscilación.

1.5. Reactores de fusión

La idea de lograr reacciones de fusión nuclear controlada motivó el gran desarrollo de la física del plasma a partir de la segunda mitad de los años 1950. De las posibles reacciones de fusión, la más promisoría es la de un núcleo de deuterio (deuterón) y uno de tritio, que da lugar a una partícula alfa y a un neutrón

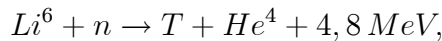


Debido a la repulsión coulombiana entre los núcleos esta reacción tiene una sección eficaz despreciable a bajas energías. El máximo (unos $8,0 \times 10^{-28} m^2$) corresponde a energías del deuterón de alrededor de 100 keV . Reacciones alternativas como



tienen secciones eficaces del orden de $4,0 \times 10^{-30}$ a energías equivalentes.

Notemos que la fusión de 1 kg de $D - T$ entrega una energía de 10^8 kWh (La producción anual de energía eléctrica de Argentina es de unos $8,3 \times 10^{10} \text{ kWh}$). Si bien el tritio es prácticamente inexistente en forma natural, puede ser generado a partir del litio, por la reacción



usando los mismos neutrones de la reacción de fusión.

Las reservas mundiales de deuterio son enormes, y alcanzarían para sostener el consumo mundial actual de energía por miles de millones de años. Teniendo en cuenta las reservas naturales de litio, sólo en tierra firme, sería posible sostener el consumo actual por unos 30,000 años. Si se incluyen las reservas marinas el límite se incrementa a unos 30 millones de años.

Para lograr un número de reacciones sustancial se requiere entonces hacer colisionar los núcleos con energías considerables, del orden de los 100 keV , durante un tiempo suficiente para tener un número apreciable de reacciones.

Si se dirige un haz de deuterones con energías de 100 keV sobre un blanco de tritio sólido, los deuterones pierden energía muy rápidamente. Si, alternativamente, se lanzan dos haces interpenetrantes las densidades posibles son demasiado bajas para tener un número suficiente de reacciones.

Un método más promisorio es entonces contener durante un tiempo prolongado un plasma de $D-T$ a temperaturas suficientes para que las partículas de más alta energía (las de la cola de la distribución) logren fusionarse en cantidades apreciables.

Desde ya, calentar y contener al plasma requiere entrega de energía, por lo que el interés es alcanzar un estado en el que la energía entregada por las reacciones de fusión alcance a sostener esta configuración. En cualquier sistema de confinamiento concebible los neutrones escapan del plasma (si bien su energía se entrega fuera del plasma y es aprovechada finalmente). Las partículas alfa, sin embargo, depositan su energía muy eficazmente en el plasma. Podemos entonces estimar la energía, por unidad de volumen y de tiempo, que entregan las partículas alfa como

$$P_\alpha = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle E_\alpha,$$

donde suponemos un plasma con 50 % D y 50 % T , por lo que $n_D = n_T = n/2$, $E_\alpha = 3,5 MeV$, y $\langle \sigma v \rangle$ es el producto de la sección eficaz por la velocidad relativa, promediado sobre la distribución de energías, denominado tasa de la reacción.

Por otro lado, debido a las pérdidas de energía del plasma, éste se enfriaría en un tiempo característico τ_E si no se le entregara energía, por lo que, dado que la energía del plasma (por unidad de volumen) es $3nT$, podemos escribir la potencia perdida por unidad de volumen como

$$P_p = \frac{3nT}{\tau_E}.$$

Existen entonces estados en los que la temperatura del plasma puede ser sostenida en contra de las pérdidas por la energía de las partículas alfa

mismas. La condición para que esto suceda es $P_\alpha > P_p$, o sea,

$$n\tau_E > \frac{12T}{\langle\sigma v\rangle E_\alpha}. \quad (1.7)$$

Usando la expresión de $\langle\sigma v\rangle$ en función de la temperatura, el lado derecho de esta expresión tiene un mínimo en aproximadamente $T = 30 \text{ keV}$, que da la condición para autosostenimiento del plasma

$$n\tau_E > 1,5 \times 10^{20} m^{-3} s,$$

similar al denominado criterio de Lawson (éste es algo menos restrictivo, con un límite de $0,6 \times 10^{20} m^{-3} s$, y el tiempo característico es el de confinamiento y no el de pérdida de energía).

En la práctica τ_E también es función de la temperatura, por lo que la condición de $T \simeq 30 \text{ keV}$ no es muy conveniente, y deben considerarse temperaturas algo menores. Dado que en el rango de $10 - 20 \text{ keV}$ el $\langle\sigma v\rangle$ se puede aproximar por $\langle\sigma v\rangle = 1,1 \times 10^{-24} T^2 [\text{keV}] m^3 s^{-1}$, podemos escribir la condición (1.7) como

$$nT\tau_E > 3 \times 10^{21} m^{-3} \text{keV s}.$$

Los valores alcanzados de $nT\tau_E$ han ido aumentando desde $\simeq 10^{15}$ en los años 1960 hasta $\simeq 10^{21}$ en la actualidad. Estos altos valores son muy difíciles (y costosos) de producir, por lo que los esfuerzos actuales hacia la fusión nuclear controlada para generar energía útil sólo son posibles a través de grandes experimentos multinacionales.

Dada la alta temperatura del plasma el confinamiento no es posible con paredes materiales, por lo que se aprovecha la conductividad eléctrica del plasma para contenerlo con campos magnéticos. Un medio conductor no es libre de moverse a través de líneas de campo magnético, ya que al hacerlo induce corrientes que se oponen a este movimiento, por lo que el plasma tiende a fluir más bien a lo largo de las líneas.

Varios tipos de confinamiento magnético se estudian en la actualidad, en configuraciones de líneas abiertas (espejos magnéticos) o cerradas (toroides) generadas con distribuciones de bobinas externas al plasma.

En las configuraciones abiertas se incrementa la intensidad del campo en los extremos para minimizar las pérdidas (lo veremos más adelante). Las configuraciones cerradas requieren además que las líneas de campo no sean simplemente toroidales (esto no alcanza para confinar), sino que tengan además una torsión. La torsión del campo se logra con bobinas externas (stellarators), o con corrientes producidas en el mismo plasma (tokamaks).

Existen también configuraciones llamadas pinch, en las que el campo magnético es generado íntegramente por corrientes circulando en el plasma.

Finalmente, se consideran también confinamientos puramente inerciales, sin campos magnéticos, en los que el plasma es comprimido radialmente y las condiciones de fusión se logran durante esta aceleración centrípeta, la inercia es entonces la que se opone a la disgregación del plasma. Esta rápida compresión se logra dirigiendo haces concéntricos de luz láser muy intensa, o de partículas energéticas, sobre pequeños blancos esféricos que contienen $D - T$.

Capítulo 2

Movimiento en campos magnéticos

Muchos de los plasmas naturales y de laboratorio interactúan con campos magnéticos impuestos exteriormente. Cuando las fuerzas magnéticas resultantes sobre las partículas del plasma son apreciables, comparadas con las fuerzas entre partículas mismas, la dinámica del plasma en su conjunto es fuertemente determinada por el campo magnético impuesto. Esta dinámica es en general muy compleja y una primera aproximación es considerar la dinámica de partículas individuales (sin interacción con otras del plasma) en estos campos.

Consideremos primero el movimiento en un campo magnético uniforme, $\mathbf{B} = B\mathbf{e}_z$, sin campo eléctrico, $\mathbf{E} = 0$. La ecuación de movimiento

$$m\frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}, \quad (2.1)$$

se escribe en componentes cartesianas

$$m\frac{du_x}{dt} = qu_y B, \quad (2.2a)$$

$$m\frac{du_y}{dt} = -qu_x B, \quad (2.2b)$$

$$m\frac{du_z}{dt} = 0. \quad (2.2c)$$

Tenemos entonces que $u_z = \text{cte}$ y, definiendo (i es la unidad imaginaria)

$$U \equiv u_x + iu_y,$$

al multiplicar la segunda ecuación (2.2) por i y sumar las dos primeras es

$$m\frac{dU}{dt} = -iqBU,$$

cuya solución es

$$U = U_0 e^{-iqBt/m}.$$

Si elegimos el instante inicial para que la velocidad inicial tenga sólo componente y , es $U_0 = iu_{y0}$, y tenemos entonces la solución

$$u_x = u_{y0} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right) \Rightarrow x = x_0 - \frac{u_{y0}m}{qB} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right), \quad (2.3a)$$

$$u_y = u_{y0} \cos\left(\frac{qB}{m}t\right) \Rightarrow y = y_0 + \frac{u_{y0}m}{qB} \sin\left(\frac{qB}{m}t\right), \quad (2.3b)$$

$$u_z = u_{z0} \Rightarrow z = z_0 + u_{z0}t. \quad (2.3c)$$

Vemos entonces que la trayectoria es una hélice con eje en la dirección z (paralela al campo magnético) centrada en (x_0, y_0) , de radio (denominado radio de Larmor)

$$r_L = \frac{u_{\perp}m}{|q|B},$$

donde $u_{\perp}$ representa la magnitud de la velocidad perpendicular al campo magnético ($u_{\perp} = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$). La frecuencia angular del movimiento (definida positiva)

$$\omega_c \equiv \frac{|q|B}{m},$$

es denominada frecuencia angular de ciclotrón. Si uno observa el movimiento enfrentando al campo magnético, las partículas positivas describen giros horarios con frecuencia ω_c y las negativas anti-horario, a la vez que avanzan con velocidad uniforme u_{z0} a lo largo del campo magnético. Notemos que el campo magnético generado por el movimiento de la partícula se opone al campo magnético original. En este sentido el movimiento es diamagnético.

2.1. Deriva generada por fuerza aplicada

Si además de la fuerza magnética actúa otra fuerza $\mathbf{F}$ tenemos

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{F} + q\mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

que, al transformar a un sistema de referencia inercial S' que se mueve con velocidad constante $\mathbf{V}_D$, se convierte en

$$m \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = \mathbf{F} + q(\mathbf{u}' + \mathbf{V}_D) \times \mathbf{B},$$

donde hemos despreciado los cambios de orden $(V_D/c)^2$ que sufre el campo magnético al cambiar el sistema de referencia (c es la velocidad de la luz en el vacío), y $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{V}_D$ es la velocidad de la partícula en S' . Vemos entonces que si elegimos $\mathbf{V}_D$ para que

$$\mathbf{F} + q\mathbf{V}_D \times \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

la ecuación de movimiento en S' corresponde a la (2.1) y tenemos entonces en S' la trayectoria en hélice descrita arriba. Para resolver la (2.4) usamos que, para un vector arbitrario $\mathbf{A}$, es

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -B^2 \mathbf{A}_\perp,$$

con $\mathbf{A}_\perp$ la componente perpendicular a $\mathbf{B}$. Al post-multiplicar vectorialmente por $\mathbf{B}$ la (2.4) obtenemos así

$$\mathbf{V}_{D\perp} = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (2.5)$$

La trayectoria en el sistema original es entonces una hélice cuyo eje (o centro de giro o centro guía) se mueve con una velocidad *de deriva* $\mathbf{V}_D$ perpendicular a $\mathbf{B}$.

En el caso más general la velocidad de deriva $\mathbf{V}_D$ no es constante, por lo que el sistema S' no es inercial. En este caso, la ecuación de movimiento en S' debe incluir la fuerza de inercia $-m d\mathbf{V}_D/dt$, por lo que la condición (2.4) se sustituye por

$$\mathbf{F} - m \frac{d\mathbf{V}_D}{dt} + q\mathbf{V}_D \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

Procediendo como antes tenemos para la componente perpendicular a $\mathbf{B}$

$$\mathbf{V}_{D\perp} = \frac{1}{qB^2} \left(\mathbf{F} - m \frac{d\mathbf{V}_D}{dt} \right) \times \mathbf{B},$$

mientras que proyectando (2.6) a lo largo de $\mathbf{B}$ tenemos para la componente paralela de $\mathbf{V}_D$

$$m \frac{dV_{D\parallel}}{dt} = \mathbf{F}_\parallel.$$

Vemos así, por ejemplo, que si la fuerza es debida a un campo eléctrico uniforme y constante perpendicular a $\mathbf{B}$, los centros guía de todas las partículas cargadas se mueven con la velocidad

$$\mathbf{V}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

independientemente de su carga.

2.2. Derivas en campo magnéticos constantes suavemente variables en el espacio.

2.2.1. i) $\mathbf{B}$ paralelo a $\mathbf{e}_z$ con variación perpendicular

La ecuación general de movimiento perpendicular al campo se escribe

$$\begin{aligned} m \frac{d\mathbf{u}_\perp}{dt} &= q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B} \\ &\simeq q\mathbf{u}_\perp \times \left[\mathbf{B}_0 + (x - x_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_0 \right] \\ &\simeq q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{u}_{\perp 0} \times \left[(x - x_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_0 \right], \end{aligned}$$

donde hemos tomado el eje de la hélice en (x_0, y_0) , donde el campo vale $\mathbf{B}_0$, y supuesto las variaciones de $\mathbf{B}$ muy suaves, en el sentido que las longitudes características de su variación son muy grandes comparadas con el radio de Larmor de la partícula considerada. $\mathbf{u}_{\perp 0}$ corresponde al movimiento impertrubado por la variación del campo. Así, usando las (2.3) que reescribimos como

$$u_{x0} = \frac{q}{|q|} r_L \omega_c \sin(\omega_c t) \implies x = x_0 - \frac{q}{|q|} r_L \cos(\omega_c t), \quad (2.7a)$$

$$u_{y0} = r_L \omega_c \cos(\omega_c t) \implies y = y_0 + r_L \sin(\omega_c t), \quad (2.7b)$$

vemos que a la fuerza $q\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{B}_0$, se adiciona una perpendicular a $\mathbf{B}_0$ que contiene términos oscilantes con la frecuencia de ciclotrón (de su primera armónica, para ser precisos). Nos interesa sin embargo el efecto de esta fuerza en tiempos largos comparados con el período de ciclotrón $T_c = 2\pi/\omega_c$, por lo que tomamos el promedio temporal en un período

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{T_c} \int_t^{t+T_c} \dots dt.$$

Esto es sencillo con las (2.7) (recordemos además que $\mathbf{B} = B(x, y) \mathbf{e}_z$) con el resultado

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_\perp &\equiv \left\langle q\mathbf{u}_{\perp 0} \times \left[(x - x_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} \right|_0 + (y - y_0) \left. \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} \right|_0 \right] \right\rangle \\ &= -\frac{1}{2} |q| r_L^2 \omega_c \left(\frac{\partial B}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial B}{\partial y} \mathbf{e}_y \right) = -\frac{1}{2} |q| r_L^2 \omega_c \nabla_\perp B. \end{aligned}$$

De (2.5) esta fuerza genera una deriva

$$\mathbf{V}_{grad} = -W_\perp \frac{\nabla_\perp B \times \mathbf{B}}{qB^3}, \quad (2.8)$$

donde hemos definido la energía cinética correspondiente al movimiento perpendicular

$$W_{\perp} \equiv \frac{1}{2} m r_L^2 \omega_c = \frac{1}{2} m u_{\perp}^2.$$

2.2.2. ii) B de módulo constante con ligera curvatura

Consideremos ahora que las líneas de campo magnético no son estrictamente rectas, sino que tienen una ligera curvatura. Para esto tomemos las líneas de campo en el plano (x, z) , y analicemos el movimiento cerca del punto (x_0, z_0) donde el campo tiene sólo componente z y vale $\mathbf{B}_0$. La ecuación de movimiento en el entorno de este punto es

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0 + q\mathbf{u}_0 \times \left[(z - z_0) \frac{\partial B_x}{\partial z} \Big|_0 \mathbf{e}_x \right].$$

Dado que el movimiento imperturbado por la curvatura tiene $u_{z0} = u_{\parallel} = cte$, $z = z_0 + u_{\parallel}t$, el segundo término de la derecha corresponde a una fuerza que es perpendicular al campo y de valor (la componente z debida a la $u_{\perp}$ circular que aparece por el primer término tiene promedio temporal nulo)

$$\mathbf{F}_{\perp} = q u_{\parallel}^2 t \frac{\partial B_x}{\partial z} \Big|_0 \mathbf{e}_y,$$

que, usando la relación geométrica

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} \Big|_0 = -\frac{B_0}{R_c},$$

con R_c el radio de curvatura de la línea de campo en el punto en cuestión, puede escribirse como

$$\mathbf{F}_{\perp} = -q u_{\parallel}^2 t \frac{B_0}{R_c} \mathbf{e}_y.$$

Podemos expresar esta relación en forma covariante usando el vector radio de curvatura $\mathbf{R}_c$, que tiene la dirección del radio de curvatura, con sentido positivo de la zona cóncava a la convexa de la curva, de la forma

$$\mathbf{F}_{\perp} = q u_{\parallel}^2 t \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2},$$

con lo que podemos escribir la ecuación de movimiento como (al orden de aproximación usado no distinguimos entre $\mathbf{B}$ y $\mathbf{B}_0$)

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{u} \times \mathbf{B} + q u_{\parallel}^2 t \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}.$$

Como hicimos antes, podemos pasar a un sistema S' , pero ahora con una velocidad dependiente del tiempo $\mathbf{V}_D(t)$, con lo que la ecuación de movimiento en este sistema es (esperamos que $\mathbf{V}_D$ sea perpendicular al campo, por lo que $u'_\parallel = u_\parallel$)

$$m \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = q(\mathbf{u}' + \mathbf{V}_D) \times \mathbf{B} + qu_\parallel^2 t \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2} - m \frac{d\mathbf{V}_D}{dt}.$$

Si, por analogía con el caso de deriva constante, escribimos $\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_{D1} + \mathbf{V}_{D2}$, con

$$\mathbf{V}_{D1} = u_\parallel^2 t \frac{(\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} = -u_\parallel^2 t \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2}, \quad (2.9)$$

La ecuación de movimiento de S' se simplifica a

$$m \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = q(\mathbf{u}' + \mathbf{V}_{D2}) \times \mathbf{B} + mu_\parallel^2 \frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} - m \frac{d\mathbf{V}_{D2}}{dt}$$

que nos permite entonces elegir a $\mathbf{V}_{D2}$ constante e igual a

$$\mathbf{V}_{D2} = \frac{mu_\parallel^2}{q} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2 B^2} \quad (2.10)$$

En el ejemplo analizado (2.9) puede escribirse en la forma sugestiva

$$\mathbf{V}_{D1} = -u_\parallel \frac{u_\parallel t}{R_c} \mathbf{e}_x,$$

que indica más claramente que la velocidad de deriva del centro guía debida a $\mathbf{V}_{D1}$ es precisamente la necesaria para seguir la curvatura de la línea de campo (note que es independiente del valor de q). Por otro lado, el movimiento de deriva debido a $\mathbf{V}_{D2}$ es perpendicular tanto a $\mathbf{B}$ como a $\mathbf{R}_c$. Vemos entonces que en su movimiento a lo largo del campo magnético el centro de giro de las partículas sigue las líneas de campo, aun en el caso de ser éstas curvas (siempre hablamos de curvaturas suaves, $r_L \ll R_c$), a la vez que deriva perpendicularmente con velocidad dada por (2.10). Definiendo el versor $\mathbf{b}$ en la dirección del campo magnético,

$$\mathbf{b} \equiv \frac{\mathbf{B}}{B},$$

se puede usar la relación geométrica

$$\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} = -(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}.$$

La ventaja de esta expresión es que, con la condición que $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$, lo que requiere que no haya corrientes apreciables en la zona en cuestión, puede deducirse la igualdad (es un ejercicio no trivial)

$$[(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{b}] \times \mathbf{B} = \nabla_{\perp} B \times \mathbf{b},$$

con lo que podemos escribir (2.10) en una forma muy similar a la (2.8) como

$$\mathbf{V}_{D2} \equiv \mathbf{V}_{curv} = -2W_{\parallel} \frac{\nabla_{\perp} B \times \mathbf{B}}{qB^3},$$

donde hemos introducido la energía cinética correspondiente al movimiento a lo largo del campo

$$W_{\parallel} \equiv \frac{1}{2} m u_{\parallel}^2.$$

Notemos que para la deriva debida al gradiente perpendicular (2.8) supusimos un campo $B(x, y) \mathbf{e}_z$ que necesariamente tiene rotor no nulo, lo que requiere una corriente. Si permitimos que las líneas de campo sean curvas se puede relajar esta condición, y tenemos ahora la contribución de ambas derivas, de gradiente y de curvatura, que podemos escribir *para un campo sin rotor* (con corrientes despreciables) como

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_B &= -(W_{\perp} + 2W_{\parallel}) \frac{\nabla_{\perp} B \times \mathbf{B}}{qB^3} \\ &= (W_{\perp} + 2W_{\parallel}) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{qR_c^2 B^2}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

2.2.3. iii) B paralelo a $\mathbf{e}_z$ con variación a lo largo de z

Dado que debe cumplirse que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, podemos escribir en coordenadas cilíndricas

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial B_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r),$$

por lo que al promediar a lo largo de una órbita de la partícula, en su movimiento rotatorio alrededor de las líneas de campo,

$$\langle \dots \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dots d\theta,$$

obtenemos $\langle \partial B_{\theta} / \partial \theta \rangle = 0$ y

$$\begin{aligned} \frac{\partial \langle B_z \rangle}{\partial z} &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \langle B_r \rangle) \\ &= -\frac{\partial \langle B_r \rangle}{\partial r} - \frac{\langle B_r \rangle}{r} \simeq -2 \frac{\langle B_r \rangle}{r}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\langle B_r \rangle = 0$ en $r = 0$ y que su valor es pequeño en $r \approx r_L$. Escribiendo $\langle B_z \rangle = B(z)$ al mismo orden de aproximación, vemos que en su giro de ciclotrón la partícula sufre un pequeño campo radial de valor

$$\langle B_r \rangle = -\frac{r_L}{2} \frac{dB}{dz},$$

que produce una fuerza en la dirección del campo

$$\mathbf{F} = q\mathbf{u}_\perp \times \langle B_r \rangle \mathbf{e}_r.$$

Usando que

$$\mathbf{u}_\perp = -\frac{q}{|q|} u_\perp \mathbf{e}_\theta,$$

tenemos finalmente

$$\mathbf{F} = -\frac{W_\perp}{B} \frac{dB}{dz} \mathbf{e}_z. \quad (2.12)$$

Vemos que esta fuerza acelera la partícula, independientemente de su carga, a lo largo de la línea de campo y hacia las zonas de menor valor de campo magnético.

Podemos entonces escribir la ecuación de movimiento del centro guía en esta configuración de campo como

$$m \frac{du_{||}}{dt} = m u_{||} \frac{du_{||}}{dz} = \frac{dW_{||}}{dz} = -\frac{W_\perp}{B} \frac{dB}{dz}.$$

Por otro lado, como la fuerza magnética no ejerce trabajo, la energía cinética se conserva:

$$W = W_{||} + W_\perp = cte,$$

con lo que obtenemos inmediatamente

$$\frac{dW_\perp}{dz} = \frac{W_\perp}{B} \frac{dB}{dz},$$

o sea,

$$\frac{W_\perp}{B} = cte$$

en el movimiento de la partícula.

Estas expresiones permiten estudiar la posibilidad de confinar partículas cargadas en los denominados espejos magnéticos (o botellas magnéticas), con campos esencialmente axiales cuya intensidad es mínima en una zona central y crece en ambos sentidos al apartarse de ésta. La fuerza (2.12) tiende a mantener las partículas de cualquier signo de carga en la zona de menor campo, confinándolas así a la zona central de la botella. Denominemos B_0

al valor mínimo del campo (zona central) y B_M al valor máximo (cuellos de la botella). Una partícula que en la zona con B_0 tenga valores de energías cinéticas $W_{\parallel 0}$ y $W_{\perp 0}$ tendrá entonces valores $W_{\parallel M}$ y $W_{\perp M}$ en la zona con campo B_M dados por las relaciones

$$\begin{aligned}\frac{W_{\perp M}}{B_M} &= \frac{W_{\perp 0}}{B_0}, \\ W_{\parallel M} + W_{\perp M} &= W_{\parallel 0} + W_{\perp 0},\end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$\frac{W_{\parallel M}}{W_{\parallel 0}} = 1 + \frac{W_{\perp 0}}{W_{\parallel 0}} \left(1 - \frac{B_M}{B_0}\right).$$

Si la partícula llega a la zona del cuello con valor finito (por supuesto positivo) de $W_{\parallel M}$ seguirá su viaje a partir de este punto y escapará por lo tanto de la botella magnética. La condición de pérdida de partícula es entonces

$$1 + \frac{W_{\perp 0}}{W_{\parallel 0}} \left(1 - \frac{B_M}{B_0}\right) > 0,$$

o sea,

$$\frac{W_{\parallel 0}}{W_{\perp 0}} > \frac{B_M}{B_0} - 1.$$

En término de las velocidades esto se translada a

$$\frac{u_{\parallel 0}}{u_{\perp 0}} > \sqrt{\frac{B_M}{B_0} - 1},$$

que puede escribirse en terminos del ángulo α_0 entre el vector velocidad y el campo magnético como

$$\tan \alpha_0 < \frac{1}{\sqrt{B_M/B_0 - 1}}.$$

Así, partículas que en la zona central tengan velocidades orientadas con ángulos menores que α_0 escaparán de la botella; se dice que están dentro del cono de pérdida de la misma (en el espacio de velocidades).

2.3. Invariantes adiabáticos

Al fin de la sección anterior dedujimos la constancia de $W_{\perp}/B$ durante el movimiento de la partícula en un campo de intensidad suavemente variable.

Notemos que, con notación evidente,

$$\begin{aligned}\frac{W_{\perp}}{B} &= \frac{mu_{\perp}^2}{2B} = \frac{mr_L^2\omega_c^2}{2B} = |q| \frac{r_L^2\omega_c}{2} \\ &= \frac{|q|}{T_c} \pi r_L^2 = iA = \mu,\end{aligned}\tag{2.13}$$

donde μ es el momento magnético de la carga en su giro de ciclotrón. La constancia de μ es un caso particular de invariante adiabático estudiado en Mecánica. Sabemos que cuando pueden definirse variables de acción

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i$$

en los movimientos periódicos de la coordenada generalizada q_i , con momento conjugado p_i , estas variables son constantes ante cambios lentos de los parámetros del sistema considerado. Se entiende por lentos comparados con los períodos T_i del movimiento de las q_i y, más precisamente, se deduce que si los parámetros varían con un tiempo característico T_p , la variación relativa de los J_i es de orden $\exp(-T_p/T_i)$. El movimiento de una partícula cargada en un campo magnético es un ejemplo clásico en el que los invariantes adiabáticos son

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{u}_{\perp} \cdot d\mathbf{l},$$

que corresponde a μ ($\mu = J_1 |q| / 2m$),

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{u}_{\parallel} \cdot d\mathbf{l},$$

y

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} \oint m\mathbf{V}_D \cdot d\mathbf{l}.$$

Para que esté definido J_2 el movimiento a lo largo de las líneas de campo debe ser periódico, mientras que para J_3 el movimiento debido a la deriva debe ser periódico. Este último es en sí muy lento en general, por lo que para que este invariante sea útil los parámetros deben variar muy lentamente, lo que puede no suceder en la práctica.

En un espejo magnético las partículas efectivamente atrapadas se mueven a lo largo de las líneas de campo entre dos puntos de retorno, en los que $W_{\parallel}$ se anula. La invarianza de J_2 ante cambios lentos (comparados con este movimiento) de los parámetros del sistema asegura, por ejemplo, que si la zona de campo magnético intenso se desplaza lentamente, J_2 permanecerá

constante. Sabemos además que μ es constante, por lo que podemos escribir, de (2.13)

$$W_{\perp} = \mu B,$$

por lo que podemos expresar la energía cinética como

$$W = \frac{mu_{\parallel}^2}{2} + \mu B,$$

de donde, sabiendo que μ es constante

$$u_{\parallel} = \sqrt{\frac{2}{m} (W - \mu B)},$$

los puntos de retorno corresponden a $B = W/\mu$. Llamando z_1 y z_2 a estos puntos es

$$J_2 = \frac{m}{\pi} \int_{z_1}^{z_2} \sqrt{\frac{2}{m} (W - \mu B)} dz.$$

Supongamos que prácticamente en toda la región del movimiento el campo vale B_0 , y sólo en regiones muy pequeñas, cercanas a $z_{1,2}$, toma valores mayores. Con esto

$$J_2 \simeq \frac{m}{\pi} \sqrt{\frac{2}{m} (W - \mu B_0)} L,$$

con $L = z_2 - z_1$. Consideremos ahora que L varía lentamente en el tiempo, por lo que también variará W . Sabiendo que tanto μ como J_2 se conservan, de $dJ_2/dt = 0$ obtenemos

$$L \frac{dW}{dt} = -2 (W - \mu B_0) \frac{dL}{dt},$$

que podemos integrar para obtener

$$W = \mu B_0 + (W_0 - \mu B_0) \left(\frac{L_0}{L} \right)^2,$$

que nos dice que la energía de la partícula se incrementa relativamente rápido con la disminución de L . Éste es un posible mecanismo de generación de rayos cósmicos de alta energía, propuesto originalmente por Fermi.

2.4. Variaciones temporales lentas de $\mathbf{E}$ y $\mathbf{B}$

Supongamos que la intensidad del campo magnético varía lentamente comparada con el período de ciclotrón de las partículas consideradas. Sabemos por la ley de Faraday que al variar $\mathbf{B}$ se genera un campo eléctrico

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}.$$

Este campo eléctrico ejerce un trabajo W sobre una partícula en movimiento, cuya variación temporal vale

$$\frac{dW}{dt} = q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u},$$

por lo que la energía del movimiento perpendicular de la partícula tiene una tasa de variación promedio, en un giro de ciclotrón, de valor (para una partícula de carga positiva)

$$\begin{aligned} \frac{d\langle W_{\perp} \rangle}{dt} &= \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} q\mathbf{E} \cdot \mathbf{u}_{\perp} dt = -\frac{q}{T_c} \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} \\ &= -\frac{q}{T_c} \int \nabla \times \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{T_c} \pi r_L^2 \frac{\partial B}{\partial t} = \mu \frac{\partial B}{\partial t}. \end{aligned}$$

Para una carga negativa obtenemos el mismo valor, ya que cambian simultáneamente el signo de q y el del sentido de giro. Vemos entonces que la energía de las partículas aumenta al aumentar lentamente (adiabáticamente) la intensidad del campo magnético. Notemos además que, como $W_{\perp} = \mu B$, tenemos que sigue siendo $d\mu/dt = 0$ como corresponde a un invariante adiabático.

Para el caso en que el campo eléctrico varía lentamente, de la ecuación de movimiento

$$m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = q\mathbf{E}(t) + q\mathbf{u} \times \mathbf{B},$$

como hicimos en el caso de campos magnéticos con curvatura podemos pasar a un sistema de referencia acelerado en el que

$$m \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = q\mathbf{E}(t) + q\mathbf{u}' \times \mathbf{B} + q\mathbf{V}_D \times \mathbf{B} - m \frac{d\mathbf{V}_D}{dt},$$

haciendo $\mathbf{V}_D = \mathbf{V}_{D1} + \mathbf{V}_{D2}$, con

$$\mathbf{V}_{D1} = \frac{\mathbf{E}(t) \times \mathbf{B}}{B^2},$$

tenemos

$$m \frac{d\mathbf{u}'}{dt} = q\mathbf{u}' \times \mathbf{B} + q\mathbf{V}_{D2} \times \mathbf{B} - m \frac{\partial \mathbf{E}/\partial t \times \mathbf{B}}{B^2} - m \frac{d\mathbf{V}_{D2}}{dt};$$

si la variación de $\mathbf{E}$ es muy lenta, de manera que podamos despreciar su derivada segunda, podemos tomar a $\mathbf{V}_{D2}$ como prácticamente constante de valor

$$\mathbf{V}_{D2} \equiv \mathbf{V}_p = -\frac{m}{qB^4} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{B} \right) \times \mathbf{B} = \frac{m}{qB^2} \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t},$$

que se denomina deriva de polarización, ya que da lugar a una polarización del medio análoga a la producida en un medio dieléctrico (ver fin de la sección siguiente).

2.5. Corrientes de deriva

Para calcular la corriente eléctrica debida a las derivas vistas arriba debemos considerar al conjunto de partículas del plasma. Como las velocidades de deriva dependen en general de la velocidad microscópica de las partículas, al calcular la corriente debemos considerar el número de partículas en cada intervalo de velocidades y sumar apropiadamente. Esto se hace a través de la función de distribución de cada especie: $f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, $f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, que expresa el número de partículas de la especie dada, por unidad de volumen y en el entorno de velocidad $\mathbf{u}$, de la forma

$$dn_{e,i} = f_{e,i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3u,$$

con (la integral extendida a todas las velocidades)

$$n_{e,i} = \int f_{e,i}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) d^3u$$

Debemos escribir entonces

$$\mathbf{j}_D = Ze \int f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{V}_{Di}(\mathbf{u}) d^3u - e \int f_e(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \mathbf{V}_{De}(\mathbf{u}) d^3u.$$

En el caso de deriva eléctrica las derivas no dependen de la velocidad de las partículas, por lo que tenemos

$$\mathbf{j}_E = (Zen_i - en_e) \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2},$$

que en condiciones de neutralidad local ($Zn_i = n_e$) es nula.

Si consideramos en forma conjunta las derivas de gradiente y de curvatura (en el caso de corrientes despreciables, $\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$; ecuación (2.11))

$$\mathbf{V}_B = -(W_\perp + 2W_\parallel) \frac{\nabla_\perp B \times \mathbf{B}}{qB^3},$$

usando que, para cada especie, para una función genérica $G(\mathbf{u})$

$$\int f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) G(\mathbf{u}) d^3u = n \langle G \rangle,$$

tenemos

$$\mathbf{j}_B = -[n_i \langle W_{i\perp} + 2W_{i\parallel} \rangle + n_e \langle W_{e\perp} + 2W_{e\parallel} \rangle] \frac{\nabla_\perp B \times \mathbf{B}}{B^3}.$$

Finalmente, de la condición de equipartición en equilibrio termodinámico, para cada especie es (el movimiento paralelo tiene un grado de libertad y el perpendicular dos)

$$\langle W_{\parallel} \rangle = \frac{1}{2} T_{\parallel}, \quad \langle W_{\perp} \rangle = T_{\perp},$$

con las correspondientes presiones

$$p_{\parallel} = n T_{\parallel}, \quad p_{\perp} = n T_{\perp},$$

lo que resulta en ($p_{\parallel} \equiv p_{e\parallel} + p_{i\parallel}$, $p_{\perp} \equiv p_{e\perp} + p_{i\perp}$, y $p = p_{\parallel} + p_{\perp}$)

$$\mathbf{j}_B = -\frac{p}{B^3} \nabla_{\perp} B \times \mathbf{B} = \frac{p}{R_c^2 B^2} \mathbf{R}_c \times \mathbf{B}.$$

Finalmente, para la deriva de polarización, como ésta no depende de la velocidad de las partículas tenemos sencillamente (ρ es la densidad de masa del plasma)

$$\mathbf{j}_p = (n_e m_e + n_i m_i) \frac{1}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{\rho}{B^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Con esta expresión podemos escribir la ley de Ampère como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{j}_{ext} + \mathbf{j}_p) + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ &= \mu_0 \mathbf{j}_{ext} + \mu_0 \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} \right) \frac{\partial \mathbf{E}_{\perp}}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}_{\parallel}}{\partial t}, \end{aligned}$$

que nos indica que el plasma tiene una permitividad eléctrica anisótropa, distinta en las direcciones paralela y perpendicular al campo magnético

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\parallel} &= \varepsilon_0, \\ \varepsilon_{\perp} &= \varepsilon_0 \left(1 + \frac{\rho}{\varepsilon_0 B^2} \right). \end{aligned}$$

Tengamos en cuenta que esta expresión es válida para variaciones temporales lentas de $\mathbf{E}$ comparadas con los períodos de ciclotrón de las partículas.

Capítulo 3

Plasma como fluido

3.1. Descripción cinética

La dinámica del plasma es extremadamente rica y está lejos de ser comprendida actualmente en muchos de sus aspectos importantes. Para entender algunas de sus características es útil la descripción del plasma como un fluido, en la que se consideran algunos aspectos macroscópicos solamente, como densidades y velocidades medias de las partículas, sin tener en cuenta de manera detallada la distribución de velocidades microscópicas. La consideración de estas últimas da lugar a la llamada descripción cinética, en términos de las funciones de distribución $f_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ introducidas al fin del capítulo anterior, donde α designa una especie genérica.

Comencemos considerando la ecuación cinética de cada especie. La conservación del número de partículas (suponiendo que no hay procesos de ionización y recombinación que cambien dicho número) nos dice que el número de partículas en un volumen ΔV en el entorno de un punto espacial $\mathbf{x}$, con velocidades dentro de un volumen ΔV_v en el entorno del valor $\mathbf{v}$, sólo puede cambiar porque nuevas partículas con velocidad $\mathbf{v}$ ingresan a ΔV mientras que otras que estaban originalmente escapan, a la vez que partículas con una velocidad ligeramente distinta a $\mathbf{v}$ son aceleradas dentro de ΔV_v mientras otras originalmente con $\mathbf{v}$ son aceleradas a velocidades distintas. Esto se expresa formalmente como

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} = -\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} - \frac{\mathbf{F}}{m_\alpha} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}}.$$

De la descripción hecha en la Introducción, las fuerzas que actúan sobre cada partícula pueden descomponerse en aquellas consideradas como colisiones (interacciones con las partículas dentro de la esfera de Debye), y las debidas a las partículas externas a la esfera de Debye, cuyo efecto es colectivo ya que

individualmente son fuertemente apantalladas. Este efecto colectivo se manifiesta a través de los campos electromagnéticos que generan y que podemos determinar a través de las ecuaciones de Maxwell escritas como (q_α es la carga de la especie α)

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int f_{\alpha} d^3v, \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.1c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d^3v + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (3.1d)$$

La fuerza no colisional se escribe entonces

$$\mathbf{F}_{nc} = q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}).$$

Las fuerzas colisionales las designamos simplemente por $\mathbf{F}_c$ y escribimos su efecto sobre f_{α} como

$$-\frac{\mathbf{F}_c}{m_{\alpha}} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \equiv \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col};$$

dejamos por ahora la consideración detallada de este término y escribimos la ecuación cinética como

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} \right)_{col}. \quad (3.2)$$

3.2. Descripción de fluido

3.2.1. Fluidos múltiples

Notemos dos puntos de importancia, primero la complejidad del sistema no lineal de ecuaciones (3.1) y (3.2); aun en el caso de usar expresiones sencillas para el término colisional. Segundo, las ecuaciones de Maxwell sólo requieren conocer la densidad de partículas y la velocidad media

$$n_{\alpha} = \int f_{\alpha} d^3v,$$

$$\mathbf{u}_{\alpha} = \frac{1}{n_{\alpha}} \int \mathbf{v} f_{\alpha} d^3v,$$

que son precisamente las que se obtienen en una descripción de fluido. Consideremos entonces esta descripción tomando momentos de la ecuación (3.2). Primero la integramos sobre todo el espacio de velocidades, teniendo en cuenta que las colisiones no cambian el número de partículas dentro de un volumen espacial, por lo que

$$\int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} d^3v = 0.$$

Resulta entonces la ecuación de continuidad, suponiendo además que $f_\alpha \rightarrow 0$ suficientemente rápido cuando $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$,

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) = 0. \quad (3.3)$$

Para obtener una ecuación para $\mathbf{u}_\alpha$ multiplicamos (3.2) por $\mathbf{v}$ e integramos sobre todo el espacio de velocidades. Debemos tener en cuenta que el término colisional contiene interacciones de la especie α con todas las especies, incluida ella misma. Por conservación de la cantidad de movimiento colisiones con la misma especie no cambian la cantidad de movimiento total de dicha especie; es decir

$$\int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^{(\alpha)} m_\alpha \mathbf{v} d^3v = 0,$$

donde el supraíndice indica con qué especie es la colisión considerada. Por otro lado, hay un intercambio de cantidad de movimiento en colisiones entre especies distintas, que denotamos de la siguiente manera

$$\int \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col}^{(\beta)} m_\alpha \mathbf{v} d^3v \equiv m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta},$$

donde $\nu_{\alpha\beta}$ denota una frecuencia de colisión de la especie α con la β . Notemos el punto evidente que la cantidad de movimiento cedida por la especie α a la β , instante a instante, es igual a menos la cedida por la β a la α , por lo que debe ser

$$m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta} = -m_\beta n_\beta (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta) \nu_{\beta\alpha},$$

o sea,

$$m_\alpha n_\alpha \nu_{\alpha\beta} = m_\beta n_\beta \nu_{\beta\alpha}. \quad (3.4)$$

Notemos además que al multiplicar por $\mathbf{v}$ e integrar, el segundo término de (3.2) se escribe

$$\int \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} d^3v = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int f_\alpha \mathbf{v} \mathbf{v} d^3v,$$

que, escribiendo

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_\alpha + \delta\mathbf{v},$$

se reescribe

$$\int \left(\mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{v} d^3v = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha),$$

donde hemos denotado el promedio sobre velocidades

$$n_\alpha \langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha \equiv \int f_\alpha \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} d^3v.$$

Obtenemos así

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} (n_\alpha \mathbf{u}_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \mathbf{u}_\alpha + \langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha)] \\ & - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} n_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) = \sum_{\beta \neq \alpha} n_\alpha (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Usando (3.3) podemos escribir esta ecuación como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_\alpha \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_\alpha &= - \frac{1}{n_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_\alpha \langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha) \\ &+ \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}) + \sum_{\beta \neq \alpha} (\mathbf{u}_\beta - \mathbf{u}_\alpha) \nu_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Para obtener ecuaciones cerradas se necesita determinar los $\langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha$ y los $\nu_{\alpha\beta}$. Estos últimos requieren una expresión del término colisional, que estudiaremos más adelante. En cuanto a $\langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha$, en condiciones cercanas al equilibrio termodinámico, para el caso de distribución isótropa de velocidades microscópicas, tenemos

$$\langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha = \frac{1}{3} \langle |\delta\mathbf{v}|^2 \rangle_\alpha \mathbf{I} = \frac{T_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{I}, \quad (3.5)$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad, y hemos usado equipartición en cada grado de libertad, suponiendo además una temperatura propia de la especie α .

Por otro lado, en presencia de un campo magnético intenso la distribución de velocidades tiende a ser anisótropa, con velocidades distintas a lo largo del campo y perpendicular a él. Usando el versor $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$ podemos expresar esto como (verifique la expresión contrayendo apropiadamente con $\mathbf{b}$)

$$\begin{aligned} \langle \delta\mathbf{v} \delta\mathbf{v} \rangle_\alpha &= \frac{1}{2} \langle |\delta\mathbf{v}_\perp|^2 \rangle_\alpha \mathbf{I} + \left(\langle |\delta v_\parallel|^2 \rangle_\alpha - \frac{1}{2} \langle |\delta\mathbf{v}_\perp|^2 \rangle_\alpha \right) \mathbf{b}\mathbf{b} \\ &= \frac{T_{\perp\alpha}}{m_\alpha} \mathbf{I} + \frac{1}{m_\alpha} (T_{\parallel\alpha} - T_{\perp\alpha}) \mathbf{b}\mathbf{b}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La (3.5) es válida en plasmas en los que las colisiones son muy efectivas para isotropizar la distribución de velocidades contra la tendencia a la anisotropía determinada por el campo magnético. Cuantitativamente podemos asegurar esto si la frecuencia de colisiones es mucho mayor que la frecuencia de ciclotrón ($\sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} \gg \omega_{c\alpha}$); se dice entonces que la especie α no está magnetizada. Para el caso de especie magnetizada ($\sum_{\beta \neq \alpha} \nu_{\alpha\beta} \ll \omega_{c\alpha}$) la (3.6) es la expresión más apropiada. Note que la (3.6) se reduce a la (3.5) si $T_{\parallel\alpha} = T_{\perp\alpha} = T_{\alpha}$.

Recordemos finalmente que la energía de interacción media de las partículas del plasma es mucho menor que su energía cinética media, por lo que la aproximación de gas ideal es un excelente modelo, con lo que podemos escribir

$$p_{\parallel\alpha} = n_{\alpha} T_{\parallel\alpha}, \quad p_{\perp\alpha} = n_{\alpha} T_{\perp\alpha},$$

la ecuación de movimiento se escribe entonces (para el caso más general anisótropo)

$$\begin{aligned} m_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = & -\frac{1}{n_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp\alpha} \mathbf{I} + (p_{\parallel\alpha} - p_{\perp\alpha}) \mathbf{b}\mathbf{b}] \\ & + q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) + \sum_{\beta \neq \alpha} m_{\alpha} (\mathbf{u}_{\beta} - \mathbf{u}_{\alpha}) \nu_{\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde hemos introducido la derivada convectiva o material

$$\frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} + \left(\mathbf{u}_{\alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}_{\alpha}.$$

Supuesto un modelo para el término colisional, todavía se necesita una relación que determine la presión (o la temperatura) en términos de la densidad n_{α} . La técnica más completa corresponde a tomar un momento adicional a la ecuación cinética, que proporcione ecuaciones para $\langle \delta \mathbf{v} \delta \mathbf{v} \rangle_{\alpha}$. El formalismo se complica mucho porque aparecen nuevas magnitudes que requieren modelado, cuyo tratamiento más satisfactorio es a través de soluciones perturbativas de la ecuación cinética (alrededor de funciones de distribución de equilibrio termodinámico local, típicamente maxwellianas con temperatura anisótropa). En la práctica se obtienen descripciones muy buenas suponiendo una relación barotrópica de la forma (para cada especie)

$$p_{\parallel} n_{\parallel}^{-\gamma_{\parallel}} = cte, \quad p_{\perp} n_{\perp}^{-\gamma_{\perp}} = cte.$$

Si la evolución es adiabática, sabemos que para un gas ideal con N grados de libertad es $\gamma = (2 + N)/N$. En tal caso, como el movimiento paralelo

al campo tiene $N = 1$, obtenemos $\gamma_{\parallel} = 3$, mientras como el movimiento perpendicular tiene $N = 2$, obtenemos $\gamma_{\perp} = 2$. Para evoluciones isotérmicas es en cambio, $\gamma_{\parallel} = \gamma_{\perp} = 1$.

El sistema así cerrado es denominado de varios fluidos (una ecuación de fluido para cada especie).

3.2.2. Aproximación de dos fluidos

Una aproximación adicional es considerar a todas las posibles especies de iones en una única especie de carga Ze promedio, y masa m_i (se entiende que son todos iones del mismo elemento y sólo difieren en el grado de ionización; m_i es, por supuesto, prácticamente la misma para todos ellos). Restringiéndonos entonces a plasmas de alta temperatura (los neutros pueden despreciarse) tenemos el modelo *de dos fluidos*, que reescribimos aquí por completitud

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (3.8a)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_i \mathbf{u}_i) = 0, \quad (3.8b)$$

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp e} \mathbf{I} + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \mathbf{b}\mathbf{b}] - en_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ei}, \quad (3.9)$$

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp i} \mathbf{I} + (p_{\parallel i} - p_{\perp i}) \mathbf{b}\mathbf{b}] + Zen_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) + \mathbf{R}_{ie}, \quad (3.10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_c}{\varepsilon_0}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

donde (por (3.4))

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ei} &= -\mathbf{R}_{ie} \equiv m_e n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \nu_{ei}, \\ \rho_c &= Zen_i - en_e, \quad \mathbf{j} = Zen_i \mathbf{u}_i - en_e \mathbf{u}_e, \end{aligned} \quad (3.11)$$

junto con las ecuaciones barotrópicas correspondientes para cada especie: $p_{\parallel} n_{\parallel}^{-\gamma_{\parallel}} = cte$, $p_{\perp} n_{\perp}^{-\gamma_{\perp}} = cte$.

3.2.3. Fluido simple y MHD

La complejidad de la descripción de dos fluidos puede todavía reducirse aprovechando la gran diferencia de masa entre iones y electrones, si además consideramos que todas las magnitudes tienen variaciones espaciales sobre distancias grandes comparadas con la longitud de Debye. Esto último nos permite considerar elementos de fluido de tamaño mayor que la longitud de Debye, en los que es entonces válida la *aproximación de cuasineutralidad*

$$Zn_i \simeq n_e. \quad (3.12)$$

Esto nos permite escribir

$$\mathbf{j} = en_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \quad (3.13)$$

Por otro lado, introducimos la *velocidad de masa* del fluido

$$\mathbf{u} \equiv \frac{m_i n_i \mathbf{u}_i + m_e n_e \mathbf{u}_e}{m_i n_i + m_e n_e} = \frac{m_i \mathbf{u}_i + Z m_e \mathbf{u}_e}{m_i + Z m_e}, \quad (3.14)$$

y la densidad de masa del fluido

$$\rho \equiv m_i n_i + m_e n_e. \quad (3.15)$$

Entre (3.13) y (3.14) podemos despejar (despreciando términos de orden m_e/m_i frente a la unidad)

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u} + \frac{Z m_e / m_i}{1 + Z m_e / m_i} \frac{\mathbf{j}}{en_e} \simeq \mathbf{u} + \frac{Z m_e}{m_i} \frac{\mathbf{j}}{en_e}, \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i - \frac{\mathbf{j}}{en_e} \simeq \mathbf{u} - \frac{\mathbf{j}}{en_e}. \quad (3.16b)$$

Usando estas expresiones en la ecuación suma de las (3.8) se obtiene inmediatamente

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (3.17)$$

Si sumamos ahora entre sí las (3.9) y (3.10), usamos las (3.16) y el hecho que $\mathbf{R}_{ei} + \mathbf{R}_{ie} = 0$, despreciamos términos orden m_e/m_i frente a la unidad, habiendo usado las (3.8) para escribir las derivadas convectivas en forma conservativa

$$n_{e,i} \frac{d\mathbf{u}_{e,i}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} (n_{e,i} \mathbf{u}_{e,i}) + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_{e,i} \mathbf{u}_{e,i} \mathbf{u}_{e,i}),$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = & -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b}] \\ & -\frac{m_e}{e^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \left[\frac{\mathbf{j}\mathbf{j}}{n_e} \right] + \rho_c \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} p_{\parallel} & \equiv p_{\parallel e} + p_{\parallel i}, \\ p_{\perp} & \equiv p_{\perp e} + p_{\perp i}, \end{aligned}$$

y

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left(\mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{u}.$$

Comparando el término proporcional a $\nabla \cdot (\mathbf{j}\mathbf{j}/n_e)$ con el del término convectivo $\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u})$ podemos escribir

$$\frac{|m_e \mathbf{j}\mathbf{j}/(e^2 n_e)|}{|\rho \mathbf{u}\mathbf{u}|} \approx \frac{m_e}{m_i} \frac{|\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e|^2}{u^2} \ll 1,$$

por lo que podemos despreciar dicho término. Por otro lado estimemos el término de fuerza eléctrica, comparándolo también con el término convectivo

$$\frac{|\rho_c \mathbf{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u})|} \approx \frac{\rho_c E}{\rho u^2/L},$$

donde L es una distancia característica de variación de las magnitudes. Para estimar ρ_c usamos la ecuación de Poisson

$$\rho_c = \varepsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} \approx \frac{\varepsilon_0 E}{L},$$

mientras que, para estar del lado seguro, estimamos u usando un valor característico muy moderado, que es el correspondiente a la deriva eléctrica

$$u \approx \frac{|\mathbf{E} \times \mathbf{B}|}{B^2} \approx \frac{E}{B}. \quad (3.18)$$

Con esto tenemos

$$\frac{|\rho_c \mathbf{E}|}{|\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}\mathbf{u})|} \approx \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho} = \frac{B^2}{\mu_0 \rho c^2},$$

que nos dice que este término es del orden del cociente entre la densidad de energía magnética y la densidad de energía de masa (el famoso mc^2) del

plasma. Éste es un número pequeño en general, típicamente $< 10^{-3}$, por lo que podemos también despreciar la fuerza eléctrica.

Finalmente, ante variaciones temporales podemos escribir que

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \approx \mathbf{j} \times \mathbf{B},$$

de donde estimamos

$$j \approx \frac{\rho u / \tau}{B},$$

con τ un tiempo característico de variación de las magnitudes. Así, la relación entre la corriente de desplazamiento y la corriente eléctrica en la ecuación de Ampère se puede estimar como (usando también la (3.18))

$$\frac{\left| \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right|}{\mu_0 \mathbf{j}} \approx \frac{\varepsilon_0 E / \tau}{\rho u / (B \tau)} \approx \frac{\varepsilon_0 B^2}{\rho}.$$

Vemos entonces que también puede despreciarse la corriente de desplazamiento en la ecuación de Ampère. Note que esto implica que puede despreciarse el término $\partial \rho_c / \partial t$ frente a $\nabla \cdot \mathbf{j}$ en la ecuación de conservación de la carga. Podemos así despreciar todos los términos que contienen ρ_c (salvo en la ecuación de Poisson), lo que se corresponde con la condición de cuasineutralidad del plasma.

Para calcular $\mathbf{j}$ se consideran procesos suficientemente lentos para que los electrones, fácilmente móviles, tengan tiempo de equilibrarse mecánicamente, lo que equivale a despreciar su inercia. La (3.9) se escribe entonces, usando además la segunda de las (3.16),

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} \left\{ \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp e} \mathbf{I} + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \mathbf{b}\mathbf{b}] \right\}, \quad (3.19)$$

que es denominada *ley de Ohm generalizada*, y donde hemos introducido la *resistividad del plasma*

$$\eta \equiv \frac{m_e \nu_{ei}}{e^2 n_e}. \quad (3.20)$$

El término $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) / (en_e)$ es denominado término de Hall.

La densidad n_e se determina por la condición de cuasineutralidad escribiendo

$$\rho = m_i n_i + m_e n_e = n_e \left(\frac{m_i}{Z} + m_e \right) \simeq \frac{n_e m_i}{Z}$$

El sistema de ecuaciones resultante es entonces (3.19) más

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0,$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b}] + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Notemos que la ecuación de Poisson ya no es necesaria, salvo que uno quiera calcular la densidad de carga eléctrica, y que al despreciar la corriente de desplazamiento la conservación de la carga se escribe

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0.$$

Se deja como ejercicio calcular la forma desarrollada del término de presiones (donde debe usarse que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp} \mathbf{I} + (p_{\parallel} - p_{\perp}) \mathbf{b}\mathbf{b}] = \nabla p_{\perp} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left[(p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right].$$

Cuando la presión es isótropa (plasma no magnetizado), $p_{\parallel} = p_{\perp} = p$, este término se reduce simplemente a ∇p .

Si usamos ahora la ley de Ampère para escribir

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

y usamos la identidad vectorial

$$(\nabla \times \mathbf{A}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - B_m \nabla (A_m),$$

podemos escribir la ecuación de movimiento como

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla \left(p_{\perp} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \left[\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - (p_{\parallel} - p_{\perp}) \frac{\mathbf{B}}{B^2} \right], \quad (3.21)$$

que es denominada ecuación de Parker. Notemos que la cantidad $B^2/2\mu_0$ cumple las veces de una presión, llamada presión magnética. Es costumbre denominar β al cociente entre la presión termodinámica y la magnética

$$\beta \equiv \frac{2\mu_0 p_{\perp}}{B^2},$$

que indica qué papel cumple la presión en la dinámica del plasma. Para tener una idea del valor de la presión magnética, notemos que a un campo de 1 T le corresponde una presión de aproximadamente 4 atm (3,93 más precisamente).

Una aproximación final más restrictiva consiste en simplificar la ley de Ohm comparando el término de presiones y $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ (no distinguimos entre temperaturas de especies, que suponemos no muy distintas)

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{en_e} \left| \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot [p_{\perp e} \mathbf{I} + (p_{\parallel e} - p_{\perp e}) \mathbf{b}\mathbf{b}] \right|}{|\mathbf{u} \times \mathbf{B}|} &\approx \frac{T/L}{euB} \\ &\approx \frac{r_{Li} \sqrt{T/m_i}}{uL}, \end{aligned}$$

donde r_{Li} es el radio de Larmor de iones para velocidades térmicas $\sqrt{T/m_i}$. Como $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$ es del mismo orden que el término de presiones, la misma estimación vale para el término de Hall. Vemos entonces que con la condición de radio de Larmor pequeño ($r_{Li} \ll L$), para velocidades u no muy pequeñas comparadas con $\sqrt{T/m_i}$, podemos aproximar la ley de Ohm por

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j}. \quad (3.22)$$

Ésta es la ley de Ohm que se utiliza habitualmente, aunque debe tenerse cuidado para determinar que sea aplicable. El sistema de un solo fluido con esta aproximación es conocido como *descripción magneto-hidrodinámica* o MHD.

En esta aproximación es habitual poder considerar además presión isotrópica y despreciar la resistividad, con lo que se obtiene la denominada MHD ideal, cuyo sistema completo explicitamos aquí

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \quad (3.23)$$

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.24)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0, \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (3.26)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (3.27)$$

Conviene elaborar algo la ecuación de evolución adiabática, desarrollando la derivada tenemos

$$\frac{dp}{dt} = \gamma \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u},$$

donde hemos usado la ecuación de continuidad.

3.2.4. Congelamiento de líneas magnéticas

Notemos una particularidad de la ley de Ohm simplificada. Tomemos el rotor de (3.22) y usemos la ecuación de Faraday para escribir (consideramos η uniforme por simplicidad)

$$\nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \eta \nabla \times \mathbf{j}.$$

Por la ley de Ampère tenemos

$$\nabla \times \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}),$$

que, usando la identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{B}) = -\nabla^2 \mathbf{B},$$

nos permite escribir finalmente una ecuación para la evolución del campo magnético

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.28)$$

Vemos entonces que el campo magnético evoluciona forzado por el campo de velocidades, a la vez que difunde con difusividad magnética η/μ_0 . Para comparar la importancia relativa de los dos términos del segundo miembro de (3.28) estimamos el cociente de éstos como

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\frac{\eta}{\mu_0} |\nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{\mu_0 u \delta B / L}{\eta \delta B / L^2} = R_M \equiv \frac{\mu_0 u L}{\eta},$$

donde hemos intriducido el número de Reynolds magnético R_M , y denotado δB a la magnitud estimada del campo magnético generado por la corriente, que es en general distinto de un posible campo magnético base, generado por corrientes externas al dominio considerado. A valores de R_M muy grandes la difusión del campo es despreciable, mientras que a valores pequeños el campo difunde fuertemente.

Para comprender mejor la dinámica de la ecuación (3.28) calculemos la variación del flujo magnético a través de una superficie fluida $S(t)$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

Si lo expresamos como

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t+\Delta t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} + \int_{S(t+\Delta t)} \Delta t \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \right. \\ &\quad \left. - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} \right].\end{aligned}$$

Usando que

$$\oint_{S(V)} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0,$$

podemos escribir

$$\int_{S(t+\Delta t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} - \int_{S(t)} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S} = - \int_{S_{lat}} \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S},$$

donde S_{lat} es la que, junto a $S(t)$ y $S(t+\Delta t)$, forma una superficie cerrada. Como

$$d\mathbf{S}_{lat} = d\mathbf{l} \times \mathbf{u} \Delta t,$$

donde $d\mathbf{l}$ es el elemento de longitud de la curva C en la que se apoya $S(t)$, tenemos

$$\frac{d\phi}{dt} = \int_{S(C)} \frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - \oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{u}).$$

Dado que, por conmutatividad del producto mixto, es

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot (d\mathbf{l} \times \mathbf{u}) = \oint_C d\mathbf{l} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \int_{S(C)} [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] \cdot d\mathbf{S},$$

tenemos finalmente, usando (3.28),

$$\begin{aligned}\frac{d\phi}{dt} &= \int_{S(C)} \left[\frac{\partial \mathbf{B}(t)}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \right] \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{\eta}{\mu_0} \int_{S(C)} \nabla^2 \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.\end{aligned}$$

Vemos entonces que en un plasma de muy alta conductividad, $\eta \rightarrow 0$ (o $R_M \rightarrow \infty$), el flujo magnético a través de una superficie fluida permanece constante. Esto significa que las líneas de campo no pueden atravesar la curva contorno de la superficie o, en otras palabras, que la velocidad del fluido *perpendicular* a las líneas es la misma que la de las líneas. Se dice

entonces que el fluido “arrastra” a las líneas, o que éstas están “congeladas” en el fluido. Note que la velocidad del fluido paralela a las líneas no está restringida; el plasma puede fluir a lo largo de ellas.

Intuitivamente este fenómeno es esperable de acuerdo a lo que sabemos del movimiento de partículas cargadas en campos magnéticos, especialmente en el caso en que la resistividad es muy pequeña, lo que significa que el efecto de las colisiones es despreciable frente al de la fuerza magnética, por lo que las partículas se mueven predominantemente a lo largo de las líneas de campo magnético. Por otro lado, también es esperable por la ley de Faraday, ya que si el fluido con cargas libres atraviesa líneas de campo magnético se genera un campo eléctrico que da lugar a corrientes limitadas sólo por la resistividad. Si ésta es despreciable las corrientes resultantes son muy grandes y generan entonces campos magnéticos relativamente intensos que modifican los originales. Además, las fuerzas de Lorentz sobre estas corrientes son muy grandes y opuestas al movimiento a través de las líneas. En el límite de resistividad nula, una distribución de corriente finita requiere entonces la condición de congelamiento de líneas.

Claramente, la noción de líneas de campo arrastradas por el fluido es sólo una imagen, ya que las líneas de campo son sólo una idealización que indica la dirección del campo local e instantáneo. Que las líneas aparezcan como arrastradas corresponde a que se generan corrientes que modifican el campo para que sus líneas, instante a instante, cambien como si así fuera. En un caso estacionario pierde sentido el concepto de arrastre de líneas por el fluido. Si en tal caso hubiera un flujo de masa perpendicular al campo magnético, no hay arrastre de líneas (éstas por supuesto son estacionarias); lo que se tiene es la generación de un campo eléctrico, por el movimiento del plasma a través de las líneas, que da lugar a corrientes eléctricas que mantienen la configuración estacionaria de campo magnético considerada (la resistividad debe ser finita para que pueda existir una situación estacionaria como la considerada).

3.2.5. Número de Lundquist

Notemos que si el plasma se mueve en presencia de un campo $\mathbf{B}_0$ suficientemente intenso, generado por fuentes externas a la zona considerada, la estimación de los términos del lado derecho de (3.28) pasa a ser

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{\frac{\eta}{\mu_0} |\nabla^2 \mathbf{B}|} \approx \frac{\mu_0 u B_0 / L}{\eta \delta B / L^2},$$

por lo que la condición de término difusivo pequeño es

$$\mu_0 u B_0 \gg \eta \delta B / L. \quad (3.29)$$

Por otro lado, para que las fuerzas magnéticas sean importantes en la dinámica del fluido, su aceleración debe ser del mismo orden que las fuerzas magnéticas por unidad de masa

$$\frac{u}{t_c} \approx \frac{\delta B B_0}{\rho \mu_0 L},$$

con t_c un tiempo característico de evolución, y donde se usó que $j \approx \delta B / (\mu_0 L)$. Dado que el término difusivo de (3.28) es pequeño, el término de la izquierda es comparable al primero de la derecha de esa ecuación:

$$\frac{\delta B}{t_c} \approx \frac{u B_0}{L}.$$

Entre las dos últimas relaciones tenemos entonces que

$$\delta B \approx u \sqrt{\mu_0 \rho},$$

con lo que (3.29) se escribe como

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\rho}} \frac{L B_0}{\eta} \gg 1. \quad (3.30)$$

La combinación adimensional de parámetros de la izquierda de (3.30) es el denominado *número de Lundquist*.

En la descripción de la dinámica de un medio conductor moviéndose en presencia de un campo magnético, las fuerzas magnéticas no pueden despreciarse en general si el número de Lundquist es grande.

3.2.6. Modelo de CGL

Consideremos ahora el problema de determinar ecuaciones para $p_{\parallel}$ y $p_{\perp}$. Por la conservación del momento magnético μ en un plasma fuertemente magnetizado (donde las colisiones son despreciables) podemos escribir, para cada especie

$$\frac{d}{dt} \langle \mu_{e,i} \rangle = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{W_{\perp e,i}}{B} \right\rangle = \frac{d}{dt} \left(\frac{T_{\perp e,i}}{B} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp e,i}}{n_{e,i} B} \right) = 0.$$

Usando cuasineutralidad es

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp e}}{n_e B} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp e}}{Z n_i B} \right) = 0,$$

por lo que, usando $n_i \simeq \rho/m_i$, resulta fácilmente

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\perp}}{\rho B} \right) = 0. \quad (3.31)$$

De la conservación de J_2 tenemos que, para cada especie,

$$\int \mathbf{v}_{\parallel e, i} \cdot d\mathbf{l} \simeq v_{\parallel e, i} \frac{\delta V}{\delta A} = cte,$$

donde hemos escrito la longitud a lo largo de la línea de campo en términos del volumen y la sección de un tubo de líneas magnéticas de pequeña sección que rodea a la línea en cuestión. En la condición de conservación del flujo magnético en cada tubo magnético fluido tenemos que

$$B\delta A = cte,$$

mientras que la conservación del número de partículas dentro del elemento fluido impone que

$$n_{e, i} \delta V = cte.$$

con esto obtenemos inmediatamente

$$v_{\parallel e, i} \simeq cte \frac{n_{e, i}}{B};$$

así,

$$p_{\parallel e, i} = m_{e, i} n_{e, i} \langle v_{\parallel e, i}^2 \rangle \simeq cte \frac{m_{e, i} n_{e, i}^3}{B^2},$$

o sea,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel e, i} B^2}{n_{e, i}^3} \right) = 0,$$

como hicimos antes, usando cuasineutralidad, obtenemos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{p_{\parallel} B^2}{\rho^3} \right) = 0. \quad (3.32)$$

Las ecuaciones (3.31) y (3.32) corresponden al modelo de *doble adiabática* o *CGL* (Chew, Goldberger y Low), y son válidas en un plasma fuertemente magnetizado con alta conductividad eléctrica. Notemos que si comprimimos (o expandimos) el plasma a lo largo de las líneas de campo magnético (sin expansión o compresión lateral) $\mathbf{B}$ permanece constante, y obtenemos $p_{\parallel} \propto \rho^3$, como corresponde a una evolución adiabática para un grado de libertad. El resultado correspondiente $p_{\perp} \propto \rho$ indica que la evolución resultante de los grados de libertad perpendiculares es isotérmica en este caso.

El sistema cerrado de ecuaciones en esta aproximación es (3.31) y (3.32), junto con (3.17), (3.21), y la (3.28) con $\eta = 0$ (desde ya, debe respetarse $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, que, si se satisface en un momento dado, se sigue cumpliendo siempre de acuerdo a la (3.28). como es inmediato verificar).

3.2.7. MHD bidimensional incompresible

Una aproximación útil a las ecuaciones de la MHD corresponde al caso de flujo incompresible y bidimensional. Por bidimensional entendemos que las magnitudes no dependen de una coordenada, que nosotros consideraremos cartesiana, y que podemos tomar como la coordenada z , a lo largo de la cual sólo puede haber componentes uniformes de la velocidad y del campo magnético. La condición de incompresibilidad es correcta en los fluidos cuando las velocidades relativas de sus elementos son pequeñas comparadas con la de propagación de ondas de presión (velocidad del sonido). Veremos más adelante que en un plasma existen muchos modos oscilatorios que propagan perturbaciones de presión, por lo que debemos considerar la menor de las velocidades de propagación de estas perturbaciones, que corresponde a la velocidad de Alfvén $v_A = B/\sqrt{2\mu_0\rho}$, asociada a ondas en las que la fuerza restauradora es la tensión y presión magnéticas.

Así, para flujos en los que $u^2 \ll v_A^2$ el flujo se puede considerar incompresible y la ecuación de continuidad (3.23) se reduce a $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. En el caso bidimensional considerado ($\partial \mathbf{u}/\partial z = 0$) esto se escribe

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0,$$

que sabemos que implica que la velocidad puede derivarse de una función escalar llamada función de corriente ξ de manera que

$$u_x = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad u_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Esto puede expresarse en forma compacta como

$$\mathbf{u} = \nabla \xi \times \mathbf{e}_z. \quad (3.33)$$

Análogamente, como $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ y $\partial \mathbf{B}/\partial z = 0$, podemos también expresar el campo magnético a través de una función escalar ψ como

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \mathbf{e}_z. \quad (3.34)$$

Usando la identidad genérica

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) = \mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{C} \cdot \nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{C}, \quad (3.35)$$

se obtiene inmediatamente que

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\nabla^2 \psi \mathbf{e}_z,$$

con lo que la ley de Ampère nos dice entonces que

$$\mathbf{j} = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \psi \mathbf{e}_z = j \mathbf{e}_z.$$

Análogamente, la vorticidad del flujo es

$$\nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \xi \mathbf{e}_z = \omega \mathbf{e}_z.$$

Con esto, tomando el rotor a la ecuación de movimiento (3.24) y volviendo a usar (3.35), se obtiene fácilmente (el rotor del gradiente es nulo y ρ es uniforme)

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega \right) = \mathbf{B} \cdot \nabla j. \quad (3.36)$$

En la ecuación de evolución del campo magnético (3.26) tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= (\nabla \xi \times \mathbf{e}_z) \times \mathbf{B} \\ &= (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi) \mathbf{e}_z - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z) \nabla \xi. \end{aligned}$$

Como la componente B_z es uniforme tenemos entonces que

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = \nabla \times [(\mathbf{B} \cdot \nabla \xi) \mathbf{e}_z] = \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi) \times \mathbf{e}_z.$$

De esta manera, si además incluimos el término difusivo con resistividad η constante en la ecuación (3.26), podemos escribir ésta como

$$\nabla \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \times \mathbf{e}_z = \nabla (\mathbf{B} \cdot \nabla \xi) \times \mathbf{e}_z + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla (\nabla^2 \psi) \times \mathbf{e}_z,$$

de donde se obtiene inmediatamente

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \mathbf{B} \cdot \nabla \xi + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \psi. \quad (3.37)$$

Esta ecuación, junto a la (3.36), las (3.33), (3.34) y

$$\omega = -\nabla^2 \xi, \quad j = -\frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \psi, \quad (3.38)$$

forma un conjunto completo de ecuaciones de la MHD bidimensional incompresible, cuya forma escalar y el hecho de no incluir términos de presión, las hace muy apropiadas en las aplicaciones.

3.3. Conservación de la energía

Es importante ver que en la aproximación de plasma sin resistividad podemos deducir la conservación de la energía total del sistema, lo que es muy útil para comprender muchos aspectos de la dinámica del plasma.

La forma más directa para determinar la conservación de la energía es usar que la variación de la energía cinética más interna del plasma es igual al trabajo de las fuerzas que actúan sobre él; en este caso la fuerza de Lorentz (por unidad de volumen) $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$. Este trabajo, por unidad de tiempo y de volumen, es $(\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$, por lo que podemos escribir

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \right) d^3x = \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} d^3x,$$

donde hemos escrito la energía interna (por unidad de volumen) del plasma en la aproximación de gas ideal, considerando presión isótropa por simplicidad, y las integrales están extendidas a todo el volumen de plasma, que consideramos limitado por vacío o por paredes rígidas, de manera que no haya trabajo ejercido sobre la superficie del plasma.

Usando la ley de Ampère y la identidad vectorial

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla B^2/2,$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} d^3x &= \frac{1}{\mu_0} \int [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla B^2/2] \cdot \mathbf{u} d^3x \\ &= \frac{1}{\mu_0} \int (u_k B_i \partial_i B_k - u_i \partial_i B^2/2) d^3x, \end{aligned}$$

donde usamos notación indicial cartesiana para escribir la segunda línea. Escribiendo

$$u_k B_i \partial_i B_k = \partial_i (u_k B_k B_i) - B_i B_k \partial_i u_k,$$

donde se usó que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Tenemos entonces, usando el teorema de Gauss y considerando $u \rightarrow 0$ en el contorno,

$$\int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} d^3x = -\frac{1}{\mu_0} \int (u_i \partial_i B^2/2 + B_i B_k \partial_i u_k) d^3x. \quad (3.39)$$

Notemos por otro lado que, usando la ecuación (3.28) con $\eta = 0$, es

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int \frac{B^2}{2} d^3x &= \int \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d^3x \\ &= \int \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3x. \end{aligned}$$

Usando notación indicial tenemos (ε_{ijk} es la densidad tensorial de Levi-Civita)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] &= B_k \varepsilon_{kim} \partial_i (\varepsilon_{mpj} u_p B_j) \\
 &= \varepsilon_{mki} \varepsilon_{mpj} B_k \partial_i (u_p B_j) \\
 &= (\delta_{kp} \delta_{ij} - \delta_{kj} \delta_{pi}) B_k \partial_i (u_p B_j) \\
 &= B_k \partial_i (u_k B_i) - B_k \partial_i (u_i B_k) \\
 &= B_i B_k \partial_i u_k - \partial_i (u_i B_k B_k) + u_i B_k \partial_i B_k,
 \end{aligned}$$

donde se usó en la última línea que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Tenemos entonces

$$\int \mathbf{B} \cdot [\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})] d^3x = \int (B_i B_k \partial_i u_k + u_i \partial_i B^2 / 2) d^3x. \quad (3.40)$$

Comparando (3.39) y (3.40) vemos que

$$\int (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u} d^3x = -\frac{d}{dt} \int \frac{B^2}{2\mu_0} d^3x,$$

con lo que resulta finalmente

$$\frac{d}{dt} \int \left(\frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) d^3x = 0. \quad (3.41)$$

Esta expresión es muy sugestiva. Nos dice que en la evolución del plasma se conserva la suma de su energía cinética, su energía interna y la energía magnética. La energía interna o magnética puede convertirse en energía cinética, lo que tiene importantes implicaciones en el estudio de estabilidad de configuraciones de plasma.

3.4. Aproximación de difusión

3.4.1. Plasmas débilmente ionizados

Las ecuaciones de fluido son ciertamente muy complejas, por lo que conviene obtener aproximaciones útiles en ciertas condiciones. Un caso de interés es el de un plasma débilmente ionizado, en el que las colisiones con neutros son dominantes. Imaginemos una distribución espacial uniforme de la densidad de neutros, con densidades mucho menores de partículas cargadas, una situación usual en descargas de alta presión. Las ecuaciones de fluido para cada especie cargada son las (3.3) y (3.7), en la última de las cuales incluimos sólo colisiones con neutros ($\beta \equiv n$) y describimos la dinámica en el sistema en

el que los neutros tienen velocidad nula. Consideramos además que estas colisiones son lo suficientemente efectivas para que las presiones sean isótropas, y estudiamos evoluciones lentas comparadas con la frecuencia de colisiones, para que los procesos sean isotérmicos ($p_{\parallel\alpha} = p_{\perp\alpha} = p_{\alpha} = n_{\alpha}T_{\alpha}$, y $T_{\alpha} = cte$). Con todo esto escribimos

$$\frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}) = 0,$$

$$m_{\alpha} \frac{d\mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = -\frac{T_{\alpha}}{n_{\alpha}} \nabla n_{\alpha} + q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \nu_{\alpha n}.$$

Consideramos además apartamientos pequeños del estado de velocidad nula y densidad uniforme $n_{0\alpha}$, por lo que $\mathbf{u}_{\alpha}$ es una magnitud “pequeña”, lo mismo que $\delta n_{\alpha} \equiv n_{\alpha} - n_{0\alpha}$. Linealizando el sistema de ecuaciones tenemos

$$\frac{\partial \delta n_{\alpha}}{\partial t} + n_{0\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_{\alpha} = 0, \quad (3.42)$$

$$m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{u}_{\alpha}}{\partial t} = -\frac{T_{\alpha}}{n_{0\alpha}} \nabla \delta n_{\alpha} + q_{\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}) - m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \nu_{\alpha n}.$$

Si llamamos τ al tiempo característico de evolución de las magnitudes, podemos estimar

$$\frac{|m_{\alpha} \partial \mathbf{u}_{\alpha} / \partial t|}{|m_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} \nu_{\alpha n}|} \approx \frac{1}{\nu_{\alpha n} \tau}.$$

Como consideramos procesos lentos en el sentido que existen muchas colisiones durante el tiempo de evolución, $\nu_{\alpha n} \tau \gg 1$, podemos entonces despreciar el término de aceleraciones frente al colisional y escribir

$$\mathbf{u}_{\alpha} = -\frac{T_{\alpha}}{n_{0\alpha} m_{\alpha} \nu_{\alpha n}} \nabla \delta n_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha} \nu_{\alpha n}} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_{\alpha} \times \mathbf{B}). \quad (3.43)$$

En este punto conviene introducir el flujo de partículas de la especie α : $\vec{\Gamma}_{\alpha} \equiv n_{0\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$, y los coeficientes de difusión y de movilidad, $D_{\alpha} \equiv T_{\alpha} / (m_{\alpha} \nu_{\alpha n})$ y $\mathcal{M}_{\alpha} \equiv q_{\alpha} / (m_{\alpha} \nu_{\alpha n})$, respectivamente, con lo que podemos escribir (3.43) como

$$\vec{\Gamma}_{\alpha} = -D_{\alpha} \nabla \delta n_{\alpha} + \mathcal{M}_{\alpha} (n_{0\alpha} \mathbf{E} + \vec{\Gamma}_{\alpha} \times \mathbf{B}). \quad (3.44)$$

Postmultiplicando esta ecuación vectorialmente por $\mathbf{B}$ tenemos (usando que $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{A}_{\perp} B^2$)

$$\vec{\Gamma}_{\alpha} \times \mathbf{B} = -D_{\alpha} \nabla \delta n_{\alpha} \times \mathbf{B} + \mathcal{M}_{\alpha} (n_{0\alpha} \mathbf{E} \times \mathbf{B} - \vec{\Gamma}_{\alpha \perp} B^2),$$

que al reemplazar en (3.44) nos da (probarlo como ejercicio, usando además la frecuencia de ciclotrón $\omega_{c\alpha} = |q_\alpha| B/m_\alpha$, útil porque $\mathcal{M}_\alpha B = |q_\alpha| \omega_{c\alpha} / (\nu_{\alpha n} q_\alpha)$)

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_\alpha + \left(\frac{\omega_{c\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \right)^2 \vec{\Gamma}_{\alpha\perp} &= -D_\alpha \left(\nabla \delta n_\alpha + \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \nabla \delta n_\alpha \times \mathbf{b} \right) \\ &\quad + n_{0\alpha} \mathcal{M}_\alpha \left(\mathbf{E} + \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \mathbf{E} \times \mathbf{b} \right). \end{aligned}$$

donde hemos usado $\mathbf{b} = \mathbf{B}/B$.

Vemos entonces que el flujo paralelo al campo magnético es

$$\Gamma_{\alpha\parallel} = -D_\alpha \nabla_\parallel \delta n_\alpha + n_{0\alpha} \mathcal{M}_\alpha E_\parallel,$$

mientras que el perpendicular es

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma}_{\alpha\perp} &= -\frac{D_\alpha}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2} \left(\nabla_\perp \delta n_\alpha + \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \nabla \delta n_\alpha \times \mathbf{b} \right) \\ &\quad + \frac{n_{0\alpha} \mathcal{M}_\alpha}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2} \left(\mathbf{E}_\perp + \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{\omega_{c\alpha}}{\nu_{\alpha n}} \mathbf{E} \times \mathbf{b} \right). \end{aligned}$$

Si definimos entonces los coeficientes y movibilidades siguientes

$$D_{\alpha\parallel} \equiv D_\alpha = \frac{T_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}, \quad \mathcal{M}_{\alpha\parallel} \equiv \mathcal{M}_\alpha = \frac{q_\alpha}{m_\alpha \nu_{\alpha n}}, \quad (3.45a)$$

$$D_{\alpha\perp} \equiv \frac{D_\alpha}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2}, \quad \mathcal{M}_{\alpha\perp} \equiv \frac{\mathcal{M}_\alpha}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2}, \quad (3.45b)$$

$$D_{\alpha H} \equiv \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{D_\alpha \omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n}}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2}, \quad \mathcal{M}_{\alpha H} \equiv \frac{|q_\alpha|}{q_\alpha} \frac{\mathcal{M}_\alpha \omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n}}{1 + (\omega_{c\alpha}/\nu_{\alpha n})^2}, \quad (3.45c)$$

donde el subíndice H corresponde a Hall, tenemos que

$$\begin{aligned} \Gamma_{\alpha\parallel} &= -D_{\alpha\parallel} \nabla_\parallel \delta n_\alpha + n_{0\alpha} \mathcal{M}_{\alpha\parallel} E_\parallel, \\ \vec{\Gamma}_{\alpha\perp} &= -D_{\alpha\perp} \nabla_\perp \delta n_\alpha - D_{\alpha H} \nabla \delta n_\alpha \times \mathbf{b} \\ &\quad + n_{0\alpha} \mathcal{M}_{\alpha\perp} \mathbf{E}_\perp + n_{0\alpha} \mathcal{M}_{\alpha H} \mathbf{E} \times \mathbf{b}, \end{aligned}$$

que junto con la ecuación de continuidad (3.42) escrita como

$$\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{\Gamma}_\alpha = 0,$$

constituyen el sistema simplificado de ecuaciones en la aproximación de difusión.

Notemos la fuerte anisotropía en los coeficientes de difusión introducida por el campo magnético cuando $\omega_{c\alpha} \gg \nu_{\alpha n}$. Muy pequeña difusión en la dirección perpendicular al campo, y una difusión de Hall mayor en la dirección tanto perpendicular al campo como al gradiente de densidad. La mayor difusión es a lo largo de las líneas, como es de esperar en un plasma muy magnetizado. En el límite opuesto, $\omega_{c\alpha} \ll \nu_{\alpha n}$, los coeficientes de difusión paralelo y perpendicular son iguales, y no hay difusión Hall. Lo análogo puede decirse de la contribución del campo eléctrico al flujo de partículas a través de las movilidades.

Estudiemos primero la difusión en un caso sin campo magnético (o campo magnético débil, $\omega_{c\alpha} \ll \nu_{\alpha n}$). En tal caso, especializando para iones y electrones, las ecuaciones son las de continuidad para cada especie y

$$\begin{aligned}\vec{\Gamma}_e &= -D_e \nabla \delta n_e + n_{0e} \mathcal{M}_e \mathbf{E}, \\ \vec{\Gamma}_i &= -D_i \nabla \delta n_i + n_{0i} \mathcal{M}_i \mathbf{E},\end{aligned}$$

con los coeficientes dados por la primera de las (3.45).

Podemos estimar las frecuencias de colisión con neutros como el cociente de la velocidad característica microscópica (velocidad térmica) y el camino libre medio para colisiones con neutros (de densidad n_n ; a_0 es el radio de Bohr)

$$\nu_{\alpha n} \approx \frac{v_{\alpha T}}{\lambda_{\alpha n}} \approx n_n \sigma_{\alpha n} \sqrt{\frac{T_\alpha}{m_\alpha}} \approx \pi a_0^2 n_n \sqrt{\frac{T_\alpha}{m_\alpha}},$$

por lo que

$$m_\alpha \nu_{\alpha n} \approx \pi a_0^2 n_n \sqrt{m_\alpha T_\alpha}.$$

Vemos entonces que los coeficientes de difusión y de movilidad de electrones son mucho más grandes (por un factor $\approx \sqrt{m_i/m_e}$) que los de iones. Los electrones tienden a difundir más rápido, generando una diferencia de carga y consecuente campo eléctrico que limita esta difusión, a la vez que acelera la de los iones. Ambas especies entonces difunden juntas con $\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i$, lo que nos permite calcular el campo eléctrico generado consistentemente como (usamos cuasineutralidad; $n_{0e} = Z n_{0i}$, $\delta n_e = Z \delta n_i$)

$$\mathbf{E} = -\frac{T_e m_i \nu_{in} - T_i m_e \nu_{en}/Z}{m_i \nu_{in} + m_e \nu_{en}} \frac{\nabla \delta n_e}{e n_{0e}} \simeq -\frac{T_e}{e n_{0e}} \nabla \delta n_e,$$

que al reemplazar en la expresión de $\vec{\Gamma}_i$ nos da el flujo (en la fórmula de $\vec{\Gamma}_e$ debe reemplazarse la expresión de $\mathbf{E}$ aproximada a un orden más alto para tener el mismo resultado)

$$\vec{\Gamma}_e = \vec{\Gamma}_i \equiv \vec{\Gamma} = -D_A \nabla \delta n_e,$$

donde hemos introducido el *coeficiente de difusión ambipolar*

$$D_A \equiv \frac{T_e + T_i/Z}{m_i \nu_{in}},$$

que resulta algo mayor que D_i .

Para el caso opuesto de plasma muy magnetizado, $\omega_{c\alpha} \gg \nu_{\alpha n}$, la difusión a lo largo del campo magnético es como en el caso no magnetizado, pero para la difusión perpendicular tenemos que, de las (3.45),

$$\begin{aligned} D_{\alpha\perp} &\simeq D_\alpha \left(\frac{\nu_{\alpha n}}{\omega_{c\alpha}} \right)^2 = \frac{T_\alpha \nu_{\alpha n}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} = \frac{T_\alpha m_\alpha \nu_{\alpha n}}{q_\alpha^2 B^2}, \\ \mathcal{M}_{\alpha\perp} &\simeq \mathcal{M}_\alpha \left(\frac{\nu_{\alpha n}}{\omega_{c\alpha}} \right)^2 = \frac{q_\alpha \nu_{\alpha n}}{m_\alpha \omega_{c\alpha}^2} = \frac{m_\alpha \nu_{\alpha n}}{q_\alpha B^2}, \end{aligned}$$

por lo que ahora son los iones los que tienden a difundir mucho más rápido que los electrones. Si suponemos que la separación de carga no puede producirse e imponemos entonces

$$\vec{\Gamma}_{e\perp} = \vec{\Gamma}_{i\perp},$$

obtenemos procediendo como antes (probarlo como ejercicio)

$$\vec{\Gamma}_{e\perp} = \vec{\Gamma}_{i\perp} = -D_{e\perp} \left(1 + \frac{T_i}{Z^2 T_e} \right) \nabla_\perp \delta n_i, \quad (3.46)$$

con lo que el plasma difunde a través del campo magnético con un coeficiente de difusión muy similar al de los electrones. Notemos sin embargo que es posible, si el circuito externo que mantiene el plasma lo permite, que la pérdida preferencial de iones perpendicular al campo magnético sea compensada por una pérdida de electrones a lo largo del campo (efecto Simon de cortocircuito). En tal caso no aparece un campo suficientemente intenso para retardar la pérdida perpendicular de iones, y éstos difunden con su propio coeficiente $D_{i\perp}$.

Así, por ejemplo, en configuraciones con líneas de $\mathbf{B}$ abiertas (espejos magnéticos, pinchs cilíndricos) los electrones se escapan preferencialmente y el plasma tiende a cargarse positivamente. En configuraciones de líneas cerradas (tokamaks, pinchs de campo revertido) son los iones los que escapan más fácilmente y el plasma se carga negativamente.

Finalmente, notemos de la segunda de las (3.45) que el máximo valor del coeficiente de difusión perpendicular $D_{\alpha\perp}$ ocurre cuando $\nu_{\alpha n} = \omega_{c\alpha}$. Bohm argumentó que si existen microinestabilidades en el plasma, éstas producen campos electromagnéticos rápidamente oscilantes y al azar, que tienen como efecto dispersar a las partículas como lo hacen los choques, lo que se refleja

en una frecuencia de colisiones aumentada. Muchas veces en la práctica el nivel de microinestabilidades parece autoajustarse de manera que $\nu_{\alpha n} \approx \omega_{c\alpha}$, con lo que $D_{\alpha\perp}$ tiene una dependencia de la forma

$$D_{\alpha\perp} \sim \frac{T_\alpha}{m_\alpha \omega_{c\alpha}} = \frac{T_\alpha}{|q_\alpha| B}.$$

El ajuste experimental da un coeficiente de difusión de valor

$$D_{\alpha\perp Bohm} \simeq 6,25 \times 10^2 \frac{T_\alpha [eV]}{ZB [T]} cm^2 s^{-1}$$

conocido como coeficiente de difusión de Bohm. Este coeficiente aumentado indica que para contener un plasma se requieren valores del campo magnético mucho mayores que los dados por la teoría sin microinestabilidades, y es uno de los motivos de las dificultades tecnológicas para el confinamiento efectivo del plasma.

3.4.2. Plasmas totalmente ionizados

En la aproximación difusiva para plasmas totalmente ionizados conviene usar la ecuación de un solo fluido donde, nuevamente por efecto de las colisiones importantes, la presión es considerada isótropa

$$\begin{aligned} \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} &= \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e). \end{aligned}$$

Como antes, consideramos variaciones lentas y pequeñas respecto de un estado de reposo, por lo que despreciamos el término de aceleraciones para escribir

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.47)$$

que al reemplazar en la ley de Ohm nos da

$$\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} = \eta \mathbf{j} + \frac{1}{en_e} \nabla p_i.$$

Postmultiplicando vectorialmente por $\mathbf{B}$ y procediendo en la forma usual despejamos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\perp &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_i \times \mathbf{B}}{en_e B^2} - \frac{\eta}{B^2} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \\ &= \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{\nabla p_i \times \mathbf{B}}{en_e B^2} - \frac{\eta}{B^2} \nabla p, \end{aligned}$$

donde hemos usado en la segunda línea la (3.47). El primer término del segundo miembro es la deriva eléctrica ya conocida; el segundo término es denominado deriva diamagnética, mientras que el tercero es el término difusivo propiamente dicho. Notemos que, por (3.47), el ∇p es perpendicular a $\mathbf{B}$ por lo que la contribución a la velocidad es en la dirección correcta. En el caso isotérmico característico de los procesos lentos considerados tenemos, como $p \propto \rho$,

$$\rho \nabla p = p \nabla \rho,$$

por lo que el flujo de masa es (escribimos sólo la contribución difusiva)

$$\rho \mathbf{u}_\perp = -\frac{\eta p}{B^2} \nabla \rho,$$

con lo que identificamos el coeficiente de difusión perpendicular

$$D_\perp = \frac{\eta p}{B^2}.$$

Usando que $p = n_e T_e + n_i T_i$, cuasineutralidad y la definición de η (3.20) obtenemos

$$D_\perp = \frac{m_e \nu_{ei} T_e}{e^2 B^2} \left(1 + \frac{T_i}{Z T_e} \right),$$

por lo que vemos que, como en (3.46), son los parámetros de los electrones los que determinan la difusión perpendicular del plasma. En este sentido la difusión es también ambipolar.

Capítulo 4

Colisiones

4.1. Colisiones en plasmas totalmente ionizados

Consideramos ahora las colisiones entre partículas cargadas. Sabemos de la Introducción que en un plasma, al ser el número de partículas dentro de la esfera de Debye muy grande, las colisiones dominantes son las de pequeña desviación. La idea ahora es llevar adelante en forma precisa el desarrollo aproximado de la Introducción.

Consideramos la interacción eléctrica entre una partícula proyectil α y una partícula blanco β , que pueden ser o no de la misma especie. Sabemos de la Mecánica que conviene estudiar esta interacción en términos de las variables velocidad relativa y velocidad del centro de masas

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta, \\ \mathbf{V} &= \frac{m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta}{m_\alpha + m_\beta},\end{aligned}$$

en términos de las cuales las velocidades son

$$\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{V} + \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}, \quad (4.1a)$$

$$\mathbf{v}_\beta = \mathbf{V} - \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} \mathbf{v}. \quad (4.1b)$$

El problema de la interacción de las dos partículas originales se traduce así en un problema equivalente, correspondiente a la interacción de una sola partícula de masa igual a la masa reducida

$$\mu_{\alpha\beta} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta},$$

que se mueve con la velocidad relativa $\mathbf{v}$ y que interactúa con un centro fijo a través del potencial

$$U = \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\epsilon_0 r},$$

donde r es la distancia relativa entre partículas verdaderas. Esta partícula equivalente se desvía luego de la interacción un ángulo χ respecto de la dirección original, que es una función del parámetro de impacto b dada por

$$\tan\left(\frac{\chi}{2}\right) = \frac{b_0}{b}, \quad (4.2)$$

donde

$$b_0 \equiv \frac{q_\alpha q_\beta}{4\pi\epsilon_0 \mu_{\alpha\beta} v^2}, \quad (4.3)$$

muy similar a la definición (1.5) usada en la Introducción.

En el problema equivalente el módulo de la velocidad relativa v no cambia luego de la interacción (por conservación de la energía), por lo que la desviación se reduce al cambio de dirección, de ángulo χ , y podemos por lo tanto escribir el cambio de velocidad relativa debido a la interacción como, descomponiéndolo en componentes paralela y perpendicular a la dirección original,

$$\Delta v_{\parallel} = v \cos \chi - v = -\frac{2b_0^2/b^2}{1 + b_0^2/b^2} v, \quad (4.4a)$$

$$\Delta v_{\perp} = v \sin \chi = \frac{2b_0/b}{1 + b_0^2/b^2} v, \quad (4.4b)$$

donde para las últimas igualdades usamos la relación (4.2).

Como hicimos en la Introducción, calculamos la desviación producida por la superposición de desviaciones con parámetros de impacto entre dos valores dados $b_{\min}$ y $b_{\max}$, mientras la partícula recorre una distancia $v\Delta t$, en el tiempo Δt . Debemos tener en cuenta que la densidad de centros dispersores es igual a la de partículas blanco con velocidad $\mathbf{v}_\beta$, que podemos expresar en términos de la función de distribución como $dn_\beta = f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3v_\beta$. El número de centros dispersores, con parámetro de impacto en el entorno de b , que encuentra la partícula equivalente al recorrer la distancia $v\Delta t$, es entonces $2\pi b db v \Delta t dn_\beta$. De la (4.4a) vemos además que todas las interacciones producen variación paralela en el mismo sentido, por lo que todas ellas se superponen directamente para dar

$$\langle \Delta v_{\parallel} \rangle_b = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} \Delta v_{\parallel} 2\pi b db dn_\beta v \Delta t = -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_\beta \Delta t,$$

donde hemos escrito $\Lambda = b_{\text{máx}}/b_{\text{mín}}$, y hemos simbolizado la operación realizada con $\langle \dots \rangle_b$.

Para el caso de desviación perpendicular, el valor dado por (4.4b) es equiprobable en todas las direcciones perpendiculares, por lo que su valor integrado es nulo, no así la desviación cuadrática que es

$$\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_b = \int_{b_{\text{mín}}}^{b_{\text{máx}}} (\Delta v_{\perp})^2 2\pi b db dn_{\beta} v \Delta t = 8\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta} \Delta t.$$

Las desviaciones por unidad de tiempo pueden entonces expresarse como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\parallel} \rangle_b &= -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta}, \\ \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_b &= 8\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta}. \end{aligned}$$

Estas desviaciones están referidas a las direcciones paralela y perpendicular respecto de la dirección inicial de la partícula equivalente. Con estos resultados podemos expresar las desviaciones lineal y cuadrática en forma tensorial covariante, teniendo en cuenta que la lineal es en la dirección de la velocidad original

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle_b &= -4\pi v^2 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta} \frac{\mathbf{v}}{v} \\ &= -\frac{(q_{\alpha} q_{\beta})^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2} dn_{\beta} \frac{\mathbf{v}}{v^3}. \end{aligned}$$

Por otro lado, la cuadrática tiene sólo componentes perpendiculares (verifique esto por conservación de $|\mathbf{v}|^2$, y del hecho que $|\langle \Delta v_{\parallel} \rangle_b|$ resulta igual a $\langle (\Delta v_{\perp})^2 \rangle_b / 2v$). Ambas componentes son de la misma magnitud (que es la mitad de la calculada, ya que, tomando el eje z en la dirección paralela, es $(\Delta v_{\perp})^2 = (\Delta v_x)^2 + (\Delta v_y)^2$)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle_b &= 4\pi v^3 b_0^2 \ln \Lambda dn_{\beta} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right) \\ &= \frac{(q_{\alpha} q_{\beta})^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2 v} dn_{\beta} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right). \end{aligned}$$

Estas expresiones pueden hacerse más amigables notando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{v} \right) &= -\frac{\mathbf{v}}{v^3}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} &= \frac{1}{v} \left(\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}\mathbf{v}}{v^2} \right), \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \rangle_b &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{1}{v} \right) dn_\beta, \\ \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v} \Delta \mathbf{v} \rangle_b &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}} dn_\beta.\end{aligned}$$

Debemos ahora calcular las desviaciones de la partícula proyectil real α . En el problema real la velocidad del centro de masas se conserva durante la interacción, por lo que el cambio de velocidad $\Delta \mathbf{v}_\alpha$ es, de (4.1),

$$\Delta \mathbf{v}_\alpha = \frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \Delta \mathbf{v},$$

con lo que, usando también que $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$, podemos expresar las desviaciones por unidad de tiempo de la partícula proyectil original, en términos de sólo variables originales, como

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle_b &= \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right) \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \left(\frac{1}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} \right) dn_\beta, \\ \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle_b &= \left(\frac{m_\beta}{m_\alpha + m_\beta} \right)^2 \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 \mu_{\alpha\beta}^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| dn_\beta.\end{aligned}$$

Falta la última operación, que es sumar sobre todas las velocidades de las partículas blanco, para obtener las desviaciones promedio propiamente dichas. Conviene para esto definir las funciones (denominadas potenciales de Rosenbluth)

$$g_{\alpha\beta} \equiv \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| dn_\beta = \int |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta| f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d^3 v_\beta, \quad (4.5a)$$

$$h_{\alpha\beta} \equiv \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{dn_\beta}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} = \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \int \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{|\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|} d^3 v_\beta, \quad (4.5b)$$

con lo que tenemos finalmente las desviaciones por unidad de tiempo de partículas tipo α debidas a interacciones con partículas tipo β

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2} \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha}, \quad (4.6a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2} \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha}. \quad (4.6b)$$

Notemos que definimos Λ como el cociente $b_{\text{máx}}/b_{\text{mín}}$; como argumentamos en la Introducción, tomamos $b_{\text{máx}}$ igual a la longitud de Debye, más allá

de la cual la interacción considerada es fuertemente apantallada. Para $b_{\min}$ tomamos la distancia característica de una colisión fuerte, que es b_0 evaluado en una energía característica $\mu_{\alpha\beta}v^2/2 = 3T/2$

$$b_{\min} = \frac{q_{\alpha}q_{\beta}}{12\pi\epsilon_0 T}.$$

El logaritmo de Coulomb $\ln \Lambda$ varía relativamente poco (menos de un factor 3) en la amplia gama de estados de plasma conocidos, en los que densidades y temperaturas varían en varios órdenes de magnitud. En todos los casos prácticos es: $10 \lesssim \ln \Lambda \lesssim 30$, por lo que en lugar de calcularlo es más práctico consultar en una tabla el valor apropiado para el tipo de plasma que se está estudiando.

4.2. Ecuación de Fokker-Planck

A partir de las expresiones (4.6) podemos finalmente calcular la forma del término de colisiones en la ecuación cinética (3.2). La idea es que el gran número de colisiones simultáneas dentro de la esfera de Debye logra que el estado dinámico de una dada partícula en un instante $t + \Delta t$ no dependa de sus estados previos a t (Δt es una medida del tiempo necesario para “borrar” la memoria anterior, a través de muchas colisiones; o sea, Δt es el tiempo en el que la velocidad de la partícula cambia apreciablemente debido a colisiones). De esta manera, el estado de la función de distribución en $t + \Delta t$ se puede expresar como

$$f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha}, t + \Delta t) = \int f_{\alpha}(\mathbf{v}_{\alpha} - \Delta\mathbf{v}_{\alpha}, t) P(\mathbf{v}_{\alpha} - \Delta\mathbf{v}_{\alpha}, \Delta\mathbf{v}_{\alpha}, \Delta t) d^3\Delta\mathbf{v}_{\alpha},$$

donde $P(\mathbf{v}_{\alpha} - \Delta\mathbf{v}_{\alpha}, \Delta\mathbf{v}_{\alpha}, \Delta t)$ es la densidad de probabilidad de que una partícula con $\mathbf{v}_{\alpha} - \Delta\mathbf{v}_{\alpha}$ sufra un cambio $\Delta\mathbf{v}_{\alpha}$ en un Δt . Estamos expresando así que, considerando la evolución debida a sólo las colisiones, la función en el instante $t + \Delta t$ se determina completamente por la correspondiente función en t (proceso Markoviano). Si desarrollamos en Taylor la igualdad anterior; el miembro de la izquierda a orden uno en Δt , y el de la derecha a orden dos en $\Delta\mathbf{v}_{\alpha}$ (desarrollamos en el entorno de $\mathbf{v}_{\alpha}$ el producto

$f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha - \Delta\mathbf{v}_\alpha, t) P(\mathbf{v}_\alpha - \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) + \left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} \Delta t &= f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left[f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int \Delta\mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} : \left[f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, t) \int \Delta\mathbf{v}_\alpha \Delta\mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha \right]. \end{aligned}$$

Notemos que, por ser P una densidad de probabilidad, es

$$\int P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha = 1,$$

a la vez que

$$\int \Delta\mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha = \langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle$$

es la variación media de velocidad ocurrida en un intervalo Δt , que podemos escribir como

$$\langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle = \Delta t \frac{d}{dt} \langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle.$$

Análogamente

$$\int \Delta\mathbf{v}_\alpha \Delta\mathbf{v}_\alpha P(\mathbf{v}_\alpha, \Delta\mathbf{v}_\alpha, \Delta t) d^3\Delta v_\alpha = \Delta t \frac{d}{dt} \langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle.$$

Con todo esto tenemos, tomando el límite $\Delta t \rightarrow 0$,

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left[f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \frac{d}{dt} \langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} : \left[f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) \frac{d}{dt} \langle \Delta\mathbf{v}_\alpha \Delta\mathbf{v}_\alpha \rangle \right].$$

Usando entonces las (4.6), y teniendo en cuenta que debemos considerar interacciones con todas las especies cargadas (incluida α misma), tenemos la expresión final del término de colisiones de Fokker-Planck

$$\left(\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} \right)_{col} = \sum_\beta \gamma_{\alpha\beta} \left[- \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \cdot \left(f_\alpha \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} : \left(f_\alpha \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial \mathbf{v}_\alpha \partial \mathbf{v}_\alpha} \right) \right], \quad (4.7)$$

donde hemos introducido la notación

$$\gamma_{\alpha\beta} \equiv \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2}.$$

Con este término de colisiones la ecuación cinética (3.2), junto a las ecuaciones de Maxwell en la forma (3.1), constituye la descripción más completa del plasma.

Para la evolución del plasma en tiempos largos en el sentido que las partículas sufren un número apreciables de colisiones se acostumbra resolver las ecuaciones cinéticas en el entorno de funciones maxwellianas, aproximando las funciones de distribución por

$$f_{\alpha}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha MB}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) [1 + \varphi(\mathbf{v})], \quad (4.8)$$

donde

$$f_{\alpha MB}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \frac{n_{\alpha}(\mathbf{x}, t)}{[2\pi T_{\alpha}(\mathbf{x}, t)/m_{\alpha}]^{3/2}} \exp \left[-\frac{m_{\alpha} |\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)|^2}{2T_{\alpha}(\mathbf{x}, t)} \right],$$

y $\varphi(\mathbf{v})$ es una función de valor pequeño comparado con la unidad, y que depende de sólo la velocidad. Las variables de fluido $n_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$, $T_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ y $\mathbf{u}_{\alpha}(\mathbf{x}, t)$ (densidad, temperatura y velocidad de fluido) se suponen funciones suavemente variables en el tiempo y el espacio. La idea consiste en reemplazar (4.8) en la ecuación cinética, linealizarla en $\varphi(\mathbf{v})$ y resolver para $\varphi(\mathbf{v})$ descomponiendo ésta en una base de polinomios apropiada (habitualmente polinomios de Sonine). Las condiciones de existencia de solución para los coeficientes de estos polinomios determinan relaciones entre las derivadas espaciales y temporales de las variables de fluido, que resultan ser, precisamente, ecuaciones de tipo fluido, que incluyen los coeficientes de transporte totalmente determinados; estos son viscosidades y conductividades térmica y eléctrica. Este método, denominado de Chapman y Enskog, es conceptualmente sencillo, pero también muy tedioso. Fue empleado por primera vez por Braginskii para el caso de plasmas (S. I. Braginskii, *Reviews of Plasma Physics*, **Vol. 1**, Consultants Bureau, New York, 1965)), por lo que las ecuaciones de fluido y coeficientes de transporte correspondientes llevan su nombre.

4.3. Relajación en plasmas

4.3.1. Plasmas fríos

Las desviaciones colisionales medias dadas por las (4.6) dependen de la función de distribución de las partículas blanco. Para partículas blanco frías, sin velocidad de deriva, tenemos $f_{\beta}(\mathbf{v}_{\beta}) = n_{\beta} \delta(\mathbf{v}_{\beta})$, donde δ es la delta de

Dirac. Con esto, los potenciales de Rosenbluth (4.5) se reducen a

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} &= n_\beta v_\alpha, \\ h_{\alpha\beta} &= \frac{m_\alpha}{\mu_{\alpha\beta}} \frac{n_\beta}{v_\alpha}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto,

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = - \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha \mu_{\alpha\beta} v_\alpha^3} \mathbf{v}_\alpha, \quad (4.9a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_\alpha \Delta \mathbf{v}_\alpha \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 v_\alpha} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{v}_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{v_\alpha^2} \right]. \quad (4.9b)$$

Estas expresiones son también válidas cuando la velocidad v_α de la partícula proyectil es mucho mayor que la velocidad térmica de las partículas blanco. En términos de desviaciones paralela y perpendicular a la trayectoria original es

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\alpha\parallel} \rangle = - \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha \mu_{\alpha\beta} v_\alpha^2}, \quad (4.10a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\alpha\perp})^2 \rangle = \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 v_\alpha}, \quad (4.10b)$$

que nos permite establecer tiempos característicos de frenado longitudinal de partículas α por β

$$\tau_{\parallel\alpha\beta} \equiv \frac{v_\alpha}{\left| \frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\alpha\parallel} \rangle \right|} = \frac{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha \mu_{\alpha\beta} v_\alpha^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}, \quad (4.11)$$

y de deflexión perpendicular de partículas α por β

$$\tau_{\perp\alpha\beta} \equiv \frac{v_\alpha^2}{\left| \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\alpha\perp})^2 \rangle \right|} = \frac{2\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 v_\alpha^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}.$$

Vemos que

$$\frac{\tau_{\parallel\alpha\beta}}{\tau_{\perp\alpha\beta}} = \frac{2\mu_{\alpha\beta}}{m_\alpha} = \frac{2m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Así, partículas livianas colisionando con partículas pesadas ($m_\alpha \ll m_\beta$) son frenadas y deflectadas en tiempos muy similares; lo mismo sucede con partículas que colisionan con partículas semejantes ($m_\alpha \approx m_\beta$). Partículas pesadas colisionando con livianas ($m_\alpha \gg m_\beta$) son frenadas en tiempos mucho más cortos que los necesarios para deflectarlas.

Estimemos los tiempos característicos de variación de energía cinética $K_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2/2$. Usando que

$$\begin{aligned}\Delta K_\alpha &= \frac{m_\alpha}{2} [(v_\alpha + \Delta v_{\alpha\parallel})^2 + (\Delta v_{\alpha\perp})^2] - \frac{m_\alpha}{2} v_\alpha^2 \\ &= \frac{m_\alpha}{2} [(\Delta v_{\alpha\parallel})^2 + (\Delta v_{\alpha\perp})^2] + m_\alpha v_\alpha \Delta v_{\alpha\parallel},\end{aligned}$$

con lo cual, dado que

$$\frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\alpha\parallel})^2 \rangle \simeq 0,$$

resulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \langle \Delta K_\alpha \rangle &= \frac{m_\alpha}{2} \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\alpha\perp})^2 \rangle + m_\alpha v_\alpha \frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\alpha\parallel} \rangle \\ &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 v_\alpha} \left(\frac{1}{m_\alpha} - \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}} \right) \\ &= -\frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\beta v_\alpha}.\end{aligned}\tag{4.12}$$

El tiempo característico de decaimiento de la energía cinética es entonces (recordemos que las partículas blanco están quietas; la energía de la partícula proyectil sólo puede decaer en este caso)

$$\tau_{\alpha\beta}^K \equiv \frac{K_\alpha}{\left| \frac{d}{dt} \langle \Delta K_\alpha \rangle \right|} = \frac{2\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha m_\beta v_\alpha^3}{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}.$$

Si comparamos el tiempo de variación de la energía de la partícula α debido a partículas de su misma especie con el debido a partículas de otra especie β , es

$$\frac{\tau_{\alpha\alpha}^K}{\tau_{\alpha\beta}^K} = \left(\frac{q_\beta}{q_\alpha} \right)^2 \frac{m_\alpha}{m_\beta},$$

que nos dice que las partículas livianas son más rápidamente afectadas por las de su propia especie que por especies más pesadas, mientras que para las partículas pesadas ocurre lo contrario. Así, tanto los electrones como los iones muy rápidos moviéndose en un plasma pierden su energía básicamente debido a sólo los electrones de éste.

Considerando ahora que las partículas proyectil α tienen una distribución maxwelliana, su temperatura está dada por

$$T_\alpha = \frac{2}{3n_\alpha} \int K_\alpha f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d^3 v_\alpha,$$

con lo que la variación de la temperatura de esta distribución de partículas, debida a los choques con la distribución de partículas blanco β es

$$\begin{aligned}\frac{dT_\alpha}{dt} &= \frac{2}{3n_\alpha} \int \frac{d}{dt} \langle \Delta K_\alpha \rangle f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) d^3v_\alpha \\ &= \frac{2}{3(2\pi T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} \int \frac{d}{dt} \langle \Delta K_\alpha \rangle \exp\left(-\frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2T_\alpha}\right) d^3v_\alpha, \quad (4.13)\end{aligned}$$

que, usando la expresión (4.12), es fácilmente evaluable y da

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = -\frac{2(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{3\varepsilon_0^2 m_\alpha m_\beta (2\pi T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}} T_\alpha,$$

que nos permite identificar el tiempo de decaimiento (recordar que las partículas blanco son frías) de la temperatura como

$$\tau_{\alpha\beta}^T = \frac{3\varepsilon_0^2 m_\alpha m_\beta (2\pi T_\alpha/m_\alpha)^{3/2}}{2(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}. \quad (4.14)$$

Si consideramos entonces un plasma de iones y electrones maxwellianos a igual temperatura, que interactúa con otra distribución mayoritaria, a temperatura muy inferior de iones del mismo tipo y electrones, podemos evaluar las relaciones de tiempos característicos

$$\frac{\tau_{ee}^T}{\tau_{ii}^T} \simeq \frac{\tau_{ii}^T}{\tau_{ei}^T} \simeq \sqrt{\frac{m_e}{m_i}},$$

que nos indican que los electrones tienden a termalizar entre sí muy rápidamente; a su vez, en un tiempo característico $\simeq \sqrt{m_e/m_i}$ veces mayor termalizan entre sí los iones, y en un tiempo todavía mayor a éste por el mismo factor $\simeq \sqrt{m_e/m_i}$ termalizan ambas especies entre sí. Estas consideraciones nos indican porqué es posible tener en la práctica un plasma con iones a temperatura diferente de la de electrones, dado que es habitual que haya procesos de calentamiento diferenciados para cada especie, y los tiempos de termalización entre especies pueden ser muy grandes comparados con los de interés.

4.3.2. Plasmas maxwellianos

Veamos ahora las expresiones correspondientes a una distribución de partículas blanco maxwelliana sin deriva

$$f_\beta(\mathbf{v}_\beta) = \frac{n_\beta}{(2\pi T_\beta/m_\beta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_\beta v_\beta^2}{2T_\beta}\right).$$

Para evaluar los potenciales de Rosenbluth con esta expresión son útiles las siguientes integrales definidas (sobre vectores tridimensionales y adimensionales $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$)

$$\begin{aligned} \int \frac{\exp(-x^2)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} d^3x &= \frac{\pi^{3/2}}{y} \operatorname{erf}(y), \\ \int |\mathbf{y} - \mathbf{x}| \exp(-x^2) d^3x &= \pi \exp(-y^2) \\ &\quad + \frac{\pi^{3/2}(1+2y^2)}{2y} \operatorname{erf}(y), \end{aligned}$$

donde $\operatorname{erf}(y)$ es la función error

$$\operatorname{erf}(y) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-x^2) dx; \quad \operatorname{erf}(\infty) = 1.$$

Definiendo

$$y \equiv \sqrt{\frac{m_\beta}{2T_\beta}} v_\alpha,$$

los potenciales resultan entonces

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} &= \frac{n_\beta}{(2T_\beta/m_\beta)^{3/2}} \frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \frac{\operatorname{erf}(y)}{y}, \\ g_{\alpha\beta} &= n_\beta \sqrt{\frac{2T_\beta}{\pi m_\beta}} \left[\exp(-y^2) + \frac{\sqrt{\pi}(1+2y^2)}{2y} \operatorname{erf}(y) \right], \end{aligned}$$

con los que resulta

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Delta v_{\alpha\parallel} \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2} \left(\frac{m_\alpha + m_\beta}{m_\beta} \right) \frac{m_\beta}{2T_\beta} \\ &\quad \times \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-y^2)}{y} - \frac{\operatorname{erf}(y)}{y^2} \right], \end{aligned} \quad (4.15)$$

y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle (\Delta v_{\alpha\perp})^2 \rangle &= \frac{(q_\alpha q_\beta)^2 n_\beta \ln \Lambda}{4\pi \varepsilon_0^2 m_\alpha^2 v_\alpha} \\ &\quad \times \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-y^2)}{y} + \left(2 - \frac{1}{y^2} \right) \operatorname{erf}(y) \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

En el límite de velocidades v_α grandes comparadas con la velocidad térmica de las partículas blanco β , $y \gg 1$, es inmediato recuperar los resultados (4.10).

Una derivación similar a la que llevó a la expresión (4.13), usando ahora las expresiones (4.15) y (4.16) (lo que complica la evaluación de las integrales a efectuar), lleva a que

$$\frac{dT_\alpha}{dt} = -\frac{T_\alpha - T_\beta}{\tau_{\alpha\beta}^T},$$

con la expresión (4.14), que, como corresponde, indica el proceso de tendencia a igualación de temperaturas por colisiones.

4.3.3. Electrones desbocados (runaway electrons)

Si una fracción pequeña de los electrones del plasma tiene velocidades altas comparadas con la de la población masiva, se puede aplicar a aquellos la primera de las (4.10) para su interacción con la población de electrones mayoritaria. En presencia de un campo eléctrico podemos entonces escribir la ecuación de movimiento de un electrón de alta velocidad como

$$m_e \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -|e|\mathbf{E} - \nu_{ee} m_e \mathbf{v},$$

donde la frecuencia de colisión electrón-electrón ν_{ee} es la deducida de (4.10) con $\alpha = \beta = e$:

$$\nu_{ee} = \frac{e^4 n_e \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 v^3}.$$

Considerando el movimiento a lo largo del campo eléctrico podemos usar la versión escalar de la ecuación de movimiento para la rapidez u del electrón,

$$\frac{du}{dt} = \frac{|e|E}{m_e} - \frac{e^4 n_e \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e^2 u^2},$$

que nos dice que si inicialmente el electrón tiene una rapidez menor que el valor crítico

$$u_c = \sqrt{\frac{|e|^3 n_e \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e E}},$$

irá disminuyendo su valor de u . Por otro lado, si inicialmente $u > u_c$ la rapidez se incrementará continuamente mientras se esté en presencia del campo eléctrico, lo que da lugar a un electrón desbocado, o runaway electron en inglés.

El valor crítico u_c se parametriza usualmente en términos del denominado campo de Dreicer, E_D , definido usando la velocidad térmica $v_{Te} = \sqrt{T_e/m_e}$ para u_c :

$$E_D = \frac{|e|^3 n_e \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 m_e v_{Te}^2} = \frac{|e|^3 n_e \ln \Lambda}{2\pi \varepsilon_0^2 T_e},$$

con lo que

$$u_c = v_{Te} \sqrt{\frac{E_D}{E}}.$$

En términos de energía cinética crítica podemos escribir

$$\frac{m_e u_c^2}{2} = \frac{|e|^3 n_e \ln \Lambda}{4\pi\epsilon_0^2 E}.$$

Así, por ejemplo, en un plasma típico de fusión, con $n_e = 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $E = 10 \text{ Vm}^{-1}$, $\ln \Lambda = 20$, electrones con energías superiores a los 5 kV se desbocarían y tenderían a escaparse del confinamiento.

4.4. Resistividad en plasma maxwelliano

Para cerrar el modelo de un solo fluido falta evaluar la resistividad η (3.20) ($\eta = m_e \nu_{ei} / e^2 n_e$) a través de la frecuencia de colisiones ν_{ei} . Evaluaremos ésta para una distribución maxwelliana de electrones, que se mueve con velocidad de deriva $\mathbf{u}_e$ a través de un fondo de iones sin deriva ($\mathbf{u}_e$ es la velocidad relativa entre electrones e iones). La frecuencia de colisiones usada es la que modela la transferencia de impulso entre especies (3.11)

$$\mathbf{R}_{ei} = m_e n_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \nu_{ei} = -m_e n_e \mathbf{u}_e \nu_{ei},$$

en la configuración considerada.

La fuerza realizada por los iones sobre los electrones a través de las colisiones puede escribirse en general como

$$\mathbf{R}_{ei} = \int m_e \frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_e \rangle_i f_e(\mathbf{v}_e) d^3 v_e.$$

Consideramos que la velocidad de deriva $\mathbf{u}_e$ es pequeña comparada con la velocidad térmica electrónica, con lo cual

$$\begin{aligned} f_e(\mathbf{v}_e) &= \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_e |\mathbf{v}_e - \mathbf{u}_e|^2}{2T_e}\right) \\ &\simeq \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \left(1 + \frac{m_e}{T_e} \mathbf{v}_e \cdot \mathbf{u}_e\right) \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right). \end{aligned}$$

Por otro lado, usando la definición (4.11) escribimos

$$\frac{d}{dt} \langle \Delta \mathbf{v}_e \rangle_i = -\frac{\mathbf{v}_e}{\tau_{\parallel ei}},$$

con todo lo cual, usando además que la integral de $\mathbf{v}_e$ con una función isótropa de $\mathbf{v}_e$ es nula, nos lleva a que

$$\mathbf{R}_{ei} = -m_e \frac{n_e}{(2\pi T_e/m_e)^{3/2}} \frac{m_e}{T_e} \mathbf{u}_e \cdot \int \frac{\mathbf{v}_e \mathbf{v}_e}{\tau_{\parallel ei}} \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right) d^3 v_e,$$

como, por isotropía debe ser

$$\int \frac{\mathbf{v}_e \mathbf{v}_e}{\tau_{\parallel}} \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right) d^3 v_e = \frac{1}{3} \mathbf{I} \int \frac{v_e^2}{\tau_{\parallel ei}} \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right) d^3 v_e,$$

resulta

$$\mathbf{R}_{ei} = -m_e \frac{n_e}{3(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_e}{T_e}\right)^{5/2} \mathbf{u}_e \int \frac{v_e^2}{\tau_{\parallel}} \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right) d^3 v_e,$$

de donde identificamos

$$\nu_{ei} = \frac{1}{3(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{m_e}{T_e}\right)^{5/2} \int \frac{v_e^2}{\tau_{\parallel ei}} \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2T_e}\right) d^3 v_e.$$

Esta expresión es fácilmente evaluable para el caso de iones con temperaturas similares o menores que la de electrones, en cuyo caso las velocidades de éstos son muy superiores a las térmicas iónicas, y podemos por lo tanto usar la expresión sencilla (4.11)

$$\tau_{\parallel ei} = \frac{4\pi\epsilon_0^2 m_e \mu_{ei} v_e^3}{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda} \simeq \frac{4\pi\epsilon_0^2 m_e^2 v_e^3}{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}.$$

La integración es elemental, y resulta

$$\nu_{ei} = \frac{Z^2 e^4 n_i \ln \Lambda}{3(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 T_e^{3/2} \sqrt{m_e}}.$$

Notemos que esta evaluación es aproximada debido a que no hemos tenido en cuenta cómo las colisiones $e-i$ afectan la distribución $f_e(\mathbf{v}_e)$ apartándola de la maxwelliana supuesta. La resolución más rigurosa se hace a través del método de Chapman-Enskog mencionado arriba, que tiene en cuenta el apartamiento respecto de la maxwelliana a través de la función $\varphi(\mathbf{v})$. El resultado de Braginskii muestra que el valor correcto de ν_{ei} es la mitad del calculado aquí. Incluyendo el factor 1/2 de este cálculo más riguroso, la resistividad resulta entonces (usando cuasineutralidad)

$$\eta = \frac{Z e^2 \sqrt{m_e} \ln \Lambda}{6(2\pi)^{3/2} \epsilon_0^2 T_e^{3/2}}. \quad (4.17)$$

Notemos que la resistividad resulta independiente de la densidad del plasma; el efecto de incrementar la densidad de iones, que tiende a frenar más el flujo de electrones, se compensa con el incremento proporcional de electrones (portadores de carga).

Capítulo 5

Oscilaciones en plasmas

5.1. Ecuaciones básicas

El plasma posee muy variados modos de oscilación. Estudiaremos aquí las oscilaciones lineales (de pequeña amplitud) que se propagan en un estado base en reposo y homogéneo en densidades, temperaturas y campo magnético, cuyas magnitudes denotamos con subíndice 0. Describiremos el plasma con la aproximación de dos fluidos y consideraremos efectos de presión isótropa solamente. Así, para cada especie desarrollamos las ecuaciones de movimiento a primer orden en los apartamientos, respecto al estado base, y estudiamos las formas de oscilación de estos apartamientos. Las ecuaciones, deducibles de manera directa, son (α y β representan electrones o iones)

$$\frac{\partial \delta n_\alpha}{\partial t} + n_{0\alpha} \nabla \cdot \mathbf{u}_\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} = -\frac{c_{0\alpha}^2}{n_{0\alpha}} \nabla \delta n_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta),$$

donde hemos usado la velocidad del sonido en el estado base, $c_{0\alpha} = \sqrt{\gamma_\alpha p_{0\alpha} / \rho_{0\alpha}}$, al considerar procesos barotrópicos de la forma genérica

$$p_\alpha n_\alpha^{-\gamma_\alpha} = cte,$$

para los cuales los apartamientos δp_α y δn_α están relacionados por

$$\delta p_\alpha = \gamma_\alpha \frac{p_{0\alpha}}{n_{0\alpha}} \delta n_\alpha = m_\alpha c_{0\alpha}^2 \delta n_\alpha.$$

Hemos tenido en cuenta también que en el estado base tanto el campo eléctrico como las velocidades son nulos, y sus apartamientos no han sido designados

con una δ . Debemos agregar las ecuaciones de Maxwell también linealizadas (usamos neutralidad del estado base, $Zn_{0i} = n_{0e}$)

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (Z\delta n_i - \delta n_e), \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \delta \mathbf{B} &= \mu_0 e n_{0e} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Usando el hecho que todas estas ecuaciones son lineales y de coeficientes constantes, desarrollamos las magnitudes perturbadas en componentes de Fourier espaciales y temporales, escribiendo para una magnitud perturbada genérica $a(\mathbf{x}, t)$

$$a(\mathbf{x}, t) = a \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)].$$

Aquí i es la unidad imaginaria, a es una amplitud compleja constante (no la distinguimos con un símbolo diferente para no introducir notación adicional), $\mathbf{k}$ es el vector de onda y ω la frecuencia angular del modo genérico. Notemos que para magnitudes vectoriales es

$$\nabla \cdot \mathbf{a} \rightarrow i\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}, \quad \nabla \times \mathbf{a} \rightarrow i\mathbf{k} \times \mathbf{a},$$

con lo que las ecuaciones para las amplitudes complejas son fácilmente calculables, resultando

$$\begin{aligned}-\omega \delta n_\alpha + n_{0\alpha} \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha &= 0, \\ -i\omega \mathbf{u}_\alpha &= -i\mathbf{k} \frac{c_{0\alpha}^2}{n_{0\alpha}} \delta n_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta), \\ i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} (Z\delta n_i - \delta n_e), \\ \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \delta \mathbf{B}, \quad \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{B} = 0 \\ i\mathbf{k} \times \delta \mathbf{B} &= \mu_0 e n_{0e} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - i\frac{\omega}{c^2} \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Comenzamos por reducir el número de variables usando la ecuación de continuidad para eliminar las perturbaciones de densidad, y la ley de Faraday para eliminar la perturbación del campo magnético:

$$\delta n_\alpha = n_{0\alpha} \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha}{\omega}, \quad \delta \mathbf{B} = \frac{\mathbf{k} \times \mathbf{E}}{\omega},$$

con lo que obtenemos el sistema reducido a sólo las velocidades y el campo eléctrico (notemos que la ecuación $\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{B} = 0$ se satisface idénticamente)

$$-i\omega \mathbf{u}_\alpha = -i\mathbf{k} c_{0\alpha}^2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha}{\omega} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_\alpha \times \mathbf{B}_0) - \nu_{\alpha\beta} (\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta),$$

$$i\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = \frac{en_{0e}}{\varepsilon_0\omega} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (5.1a)$$

$$i\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mu_0 en_{0e}\omega (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - i\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{E}. \quad (5.1b)$$

Usando la identidad vectorial

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) - k^2 \mathbf{E}$$

en la segunda de las (5.1) vemos que al multiplicar escalarmente por $\mathbf{k}$ (y usar que $\mu_0\varepsilon_0 = 1/c^2$) la primera de las (5.1) se satisface idénticamente (la razón es que la conservación de la carga, implícita en las ecuaciones de Maxwell, equivale aquí a la conservación de las partículas, que fue usada en la eliminación de las densidades perturbadas). Podemos por lo tanto reducirnos al sistema (explicitamos las especies, usando (3.4) para escribir $\nu_{ie} = \nu_{ei}Zm_e/m_i$, y elaboramos ligeramente la ecuación de Maxwell sobreviviente)

$$-i\omega\mathbf{u}_e = -i\mathbf{k}c_{0e}^2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e}{\omega} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0) + \nu_{ei} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (5.2)$$

$$-i\omega\mathbf{u}_i = -i\mathbf{k}c_{0i}^2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_i}{\omega} + \frac{Ze}{m_i} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}_0) - \frac{Zm_e}{m_i} \nu_{ei} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e), \quad (5.3)$$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \mathbf{E} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) = i\frac{en_{0e}}{\varepsilon_0 c^2} \omega (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) \quad (5.4)$$

Este conjunto de ecuaciones forma la base para el estudio de oscilaciones de pequeña amplitud en plasmas homogéneos. El punto es que este sistema de ecuaciones algebraicas es lineal y homogéneo. Soluciones no triviales son posibles sólo si el determinante de la matriz de coeficientes del sistema se anula. Esta condición establece una relación entre la frecuencia de la oscilación y el vector de onda, la denominada relación de dispersión, que depende de las magnitudes del estado base homogéneo.

A pesar de la apariencia sencilla de las ecuaciones, las oscilaciones posibles son muy variadas y la deducción de la relación de dispersión es bastante tediosa si no se consideran algunas situaciones particulares.

5.2. Oscilaciones en plasmas sin campo magnético

Comenzamos por estudiar las oscilaciones posibles en un plasma sin campo magnético base ($\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$) y consideramos frecuencias de oscilación altas

comparadas con la frecuencia de colisiones ($\omega \gg \nu_{ei}$). Tenemos en tal caso

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_e &= \mathbf{k} c_{0e}^2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e}{\omega^2} - i \frac{e}{m_e \omega} \mathbf{E}, \\ \mathbf{u}_i &= \mathbf{k} c_{0i}^2 \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_i}{\omega^2} + i \frac{Ze}{m_i \omega} \mathbf{E}.\end{aligned}$$

Si multiplicamos escalarmente por $\mathbf{k}$ cada una de estas ecuaciones para despejar el $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_\alpha$ correspondiente, y el resultado lo reemplazamos en la ecuación original, obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_e &= -i \frac{e}{m_e \omega} \left[\frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\omega^2/c_{0e}^2 - k^2} + \mathbf{E} \right], \\ \mathbf{u}_i &= i \frac{Ze}{m_i \omega} \left[\frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{\omega^2/c_{0i}^2 - k^2} + \mathbf{E} \right],\end{aligned}$$

que al reemplazar en la (5.4) nos conduce a una única ecuación vectorial para el campo eléctrico

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{c^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{c^2} \right) \mathbf{E} - \mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}) \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2/c^2}{\omega^2/c_{0e}^2 - k^2} - \frac{\omega_{pi}^2/c^2}{\omega^2/c_{0i}^2 - k^2} \right] = 0, \quad (5.5)$$

donde hemos introducido las *frecuencias de plasma* para electrones e iones

$$\omega_{pe}^2 \equiv \frac{e^2 n_{0e}}{\varepsilon_0 m_e}, \quad \omega_{pi}^2 \equiv \frac{(Ze)^2 n_{0i}}{\varepsilon_0 m_i}. \quad (5.6)$$

De (5.5) podemos ver que existen dos tipos posibles de oscilación. Uno es aquel con campo eléctrico perpendicular a $\mathbf{k}$ (ondas transversales), cuya relación de dispersión es claramente

$$\omega^2 = c^2 k^2 + \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \simeq c^2 k^2 + \omega_{pe}^2. \quad (5.7)$$

Éstas son ondas electromagnéticas afectadas por la respuesta de los electrones (los iones prácticamente no participan ya que $\omega_{pi}^2 \ll \omega_{pe}^2$). Para muy altas frecuencias ($\omega \gg \omega_{pe}$) tenemos la relación de una onda electromagnética en el vacío $\omega^2 = c^2 k^2$; la inercia de los electrones no les permite responder a la excitación electromagnética tan rápida. Por otro lado, vemos que no puede existir este tipo de oscilación con $\omega < \omega_{pe}$; los electrones son capaces de responder para anular el campo eléctrico de la onda.

El otro tipo de oscilación es el de ondas longitudinales, también denominadas electrostáticas, con $\mathbf{E}$ paralelo a $\mathbf{k}$. Basta multiplicar a (5.5) escalarmente por $\mathbf{k}$ para obtener la condición de existencia de estas ondas

$$\omega^2 \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{0e}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{0i}^2} - 1 \right) = 0,$$

por lo que tendremos oscilaciones electrostáticas si

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - k^2 c_{0e}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - k^2 c_{0i}^2} = 1. \quad (5.8)$$

Ésta es una ecuación cuadrática en ω^2 , lo que nos proporciona dos ramas distintas. Dado que

$$c_{0e,i}^2 = \gamma_{e,i} \frac{T_{e,i}}{m_{e,i}},$$

es $c_{0e}^2 \gg c_{0i}^2$ para temperaturas no muy diferentes, por lo que si tenemos frecuencias con $\omega^2 > k^2 c_{0e}^2$, ciertamente será también $\omega^2 > k^2 c_{0i}^2$, con lo que en este rango se puede despreciar el segundo término en (5.8), lo que permite obtener inmediatamente

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 c_{0e}^2,$$

que corresponde a la rama de oscilaciones de plasma (las primeras que se observaron experimentalmente, lo que les dió este nombre tan exclusivo). Nótese que aun en un plasma frío ($c_{0e} = 0$) tendríamos oscilaciones (con velocidad de grupo $\partial\omega/\partial k = 0$) de manera que la fuerza restitutiva no es la presión, como en las oscilaciones longitudinales acústicas, sino el campo eléctrico que se genera al desbalancear localmente la neutralidad del plasma; la inercia está dada por la de los electrones; los iones permanecen prácticamente quietos. La presencia de temperatura agrega una componente acústica a esta oscilación básicamente electrostática, que da lugar a una velocidad de grupo finita.

La otra rama puede identificarse en la zona de bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_{pe}$). En tal caso, al llevar (5.8) a la forma de una cuadrática en ω^2 podemos despreciar ω^4 frente a $\omega^2 \omega_{pe}^2$, lo que permite fácilmente obtener

$$\begin{aligned} \omega^2 &\simeq k^2 \left(c_{0i}^2 + c_{0e}^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} \right) \\ &= k^2 \frac{Z\gamma_e T_e + \gamma_i T_i}{m_i}. \end{aligned}$$

Identificamos aquí una oscilación longitudinal acústica en la que la fuerza restitutiva está provista por la presión de iones y electrones, y la inercia por los iones. Este modo de oscilación es entonces denominado iónico-acústico. Haciendo la teoría cinética de esta oscilación se ve que es muy fuertemente amortiguada, salvo cuando $T_e \gg T_i$ (intuitivamente, la inercia de los electrones les impide ajustar su movimiento para anular el campo eléctrico de la onda, si tienen una velocidad térmica suficientemente grande). La velocidad

de fase de las ondas iónico-acústicas es entonces

$$c_s^2 = \frac{Z\gamma_e T_e}{m_i}.$$

5.3. Oscilaciones en plasmas con campo magnético

Cuando incluimos un campo magnético uniforme en el estado base el álgebra necesaria para obtener la relación de dispersión se complica grandemente, aun considerando $\omega \gg \nu_{ei}$ para poder despreciar las colisiones. Podemos simplificar el problema un poco más viendo que el término de presiones, comparado con el de inercia, en las ecuaciones (5.2) y (5.3) es

$$\frac{|\mathbf{k}c_{0e,i}^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_e / \omega|}{|\omega \mathbf{u}_e|} \approx \frac{k^2 c_{0e,i}^2}{\omega^2},$$

por lo que si consideramos ondas cuya velocidad de fase $v_f = \omega/k$ es grande comparada con las velocidades del sonido, el término de presiones puede despreciarse (note que sólo hace falta que los cuadrados de las velocidades satisfagan la desigualdad, $v_f^2 \gg c_{0e,i}^2$, por lo que basta que v_f sean unas pocas veces más grande que $c_{0e,i}$ para que la aproximación sea muy buena). De esta manera podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= -\frac{ie}{m_e \omega} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_e \times \mathbf{B}_0), \\ \mathbf{u}_i &= \frac{iZe}{m_i \omega} (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}_0). \end{aligned}$$

Para despejar la velocidad de estas ecuaciones procedemos, como es ya habitual, postmultiplicando vectorialmente por $\mathbf{B}_0$ y reemplazando el resultado en la ecuación original, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E} + \left(\frac{eB_0}{m_e \omega} \right)^2 \mathbf{u}_{e\perp} - \left(\frac{e}{m_e \omega} \right)^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0, \\ \mathbf{u}_i &= \frac{iZe}{m_i \omega} \mathbf{E} + \left(\frac{ZeB_0}{m_i \omega} \right)^2 \mathbf{u}_{i\perp} - \left(\frac{Ze}{m_i \omega} \right)^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B}_0, \end{aligned}$$

que, usando el versor en la dirección de $\mathbf{B}_0$, $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$, y las frecuencias angulares de ciclotrón, podemos escribir como

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e - \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2 \mathbf{u}_{e\perp} &= -\frac{ie}{m_e \omega} \mathbf{E} - \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B_0}, \\ \mathbf{u}_i - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega} \right)^2 \mathbf{u}_{i\perp} &= \frac{iZe}{m_i \omega} \mathbf{E} - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega} \right)^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B_0}, \end{aligned}$$

de donde podemos evaluar inmediatamente las componentes paralela y perpendicular a $\mathbf{b}$ como

$$u_{e\parallel} = -\frac{ie}{m_e\omega}E_{\parallel}, \quad u_{i\parallel} = \frac{iZe}{m_i\omega}E_{\parallel}, \quad (5.9a)$$

$$\mathbf{u}_{e\perp} = \frac{1}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} \left(-\frac{ie}{m_e\omega} \mathbf{E}_{\perp} - \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B_0} \right), \quad (5.9b)$$

$$\mathbf{u}_{i\perp} = \frac{1}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} \left(\frac{iZe}{m_i\omega} \mathbf{E}_{\perp} - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega} \right)^2 \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{b}}{B_0} \right). \quad (5.9c)$$

Al reemplazar estas expresiones en (5.4) obtenemos un sistema algebraico que sólo contiene al campo eléctrico. Conviene en este punto introducir un sistema ortogonal adaptado al problema. Elegimos un eje paralelo al campo magnético. En el plano perpendicular tomamos como eje 1 el que es paralelo al vector de onda perpendicular $\mathbf{k}_{\perp}$, y el eje 2 el perpendicular a éste y al campo magnético, que forma la terna derecha $(1, 2, \parallel)$. Así, para un vector genérico $\mathbf{A}$ tenemos

$$\begin{aligned} A_{\parallel} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{A} - A_{\parallel} \mathbf{b}, \\ A_{\perp 1} &= \mathbf{A}_{\perp} \cdot \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{|\mathbf{k}_{\perp}|} = \mathbf{A} \cdot \frac{\mathbf{k}_{\perp}}{|\mathbf{k}_{\perp}|}, \\ A_{\perp 2} &= \mathbf{A}_{\perp} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{k}_{\perp}}{|\mathbf{k}_{\perp}|} = \mathbf{A}_{\perp} \cdot \frac{\mathbf{b} \times \mathbf{k}}{|\mathbf{k}_{\perp}|}. \end{aligned}$$

Si notamos que, usando conmutatividad del producto mixto, es

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{k}) = [\mathbf{b} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{k})] \cdot \mathbf{A} = -\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{A},$$

la proyección sobre los ejes 1 y 2 de las dos últimas de las (5.9) es directa y se obtiene

$$\begin{aligned} u_{e\perp 1} &= \frac{1}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} \left(-\frac{ie}{m_e\omega} E_{\perp 1} - \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2 \frac{E_{\perp 2}}{B_0} \right), \\ u_{e\perp 2} &= \frac{1}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} \left(-\frac{ie}{m_e\omega} E_{\perp 2} + \left(\frac{\omega_{ce}}{\omega} \right)^2 \frac{E_{\perp 1}}{B_0} \right), \\ u_{i\perp 1} &= \frac{1}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} \left(\frac{iZe}{m_i\omega} E_{\perp 1} - \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega} \right)^2 \frac{E_{\perp 2}}{B_0} \right), \\ u_{i\perp 2} &= \frac{1}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} \left(\frac{iZe}{m_i\omega} E_{\perp 2} + \left(\frac{\omega_{ci}}{\omega} \right)^2 \frac{E_{\perp 1}}{B_0} \right). \end{aligned}$$

Las proyecciones sobre el sistema de ejes $(1, 2, \parallel)$ es sencilla para la ecuación de Maxwell (5.4) y resulta

$$\begin{aligned} \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{\parallel} - k_{\parallel} (k_{\parallel} E_{\parallel} + k_{\perp} E_{\perp 1}) &= i \frac{en_{0e}}{\varepsilon_0 c^2} \omega (u_{i\parallel} - u_{e\parallel}), \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{\perp 1} - k_{\perp} (k_{\parallel} E_{\parallel} + k_{\perp} E_{\perp 1}) &= i \frac{en_{0e}}{\varepsilon_0 c^2} \omega (u_{i\perp 1} - u_{e\perp 1}), \\ \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) E_{\perp 2} &= i \frac{en_{0e}}{\varepsilon_0 c^2} \omega (u_{i\perp 2} - u_{e\perp 2}). \end{aligned}$$

Reemplazando en estas últimas las expresiones de las velocidades llegamos al sistema de ecuaciones para el campo eléctrico

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 + k_{\perp}^2 c^2 - \omega^2) E_{\parallel} - k_{\parallel} k_{\perp} c^2 E_{\perp 1}, \\ 0 &= \left[\frac{\omega_{pe}^2}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} + k_{\parallel}^2 c^2 - \omega^2 \right] E_{\perp 1} \\ &\quad + \left[\frac{-i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}/\omega}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} + \frac{i\omega_{pi}^2 \omega_{ci}/\omega}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} \right] E_{\perp 2} - k_{\parallel} k_{\perp} c^2 E_{\parallel}, \\ 0 &= \left[\frac{i\omega_{pe}^2 \omega_{ce}/\omega}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} - \frac{i\omega_{pi}^2 \omega_{ci}/\omega}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} \right] E_{\perp 1} \\ &\quad + \left[\frac{\omega_{pe}^2}{1 - (\omega_{ce}/\omega)^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{1 - (\omega_{ci}/\omega)^2} + k^2 c^2 - \omega^2 \right] E_{\perp 2}, \end{aligned}$$

donde hemos vuelto a usar las definiciones (5.6) para las frecuencias de plasma. Para obtener una expresión más presentable de este sistema es útil introducir el índice de refracción $n = kc/\omega$, y poner de manifiesto el ángulo θ entre la dirección de propagación de la onda (la dirección de $\mathbf{k}$) y el campo magnético, tal que $k_{\parallel} = k \cos \theta$, $k_{\perp} = k \sin \theta$. Además, es de suma utilidad introducir las definiciones convencionales

$$\begin{aligned} R &\equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega}{\omega - \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega}{\omega + \omega_{ci}}, \\ L &\equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2/\omega}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2/\omega}{\omega - \omega_{ci}}, \\ P &\equiv 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}, \end{aligned}$$

con denominaciones por right, left y plasma, respectivamente, y las deducidas de éstas (por suma y diferencia)

$$\begin{aligned} S &\equiv \frac{R+L}{2} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}, \\ D &\equiv \frac{R-L}{2} = -\frac{\omega_{pe}^2 \omega_{ce}/\omega}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{ci}/\omega}{\omega^2 - \omega_{ci}^2}. \end{aligned}$$

Con todo esto el sistema se escribe finalmente como

$$n^2 \sin \theta \cos \theta E_{\perp 1} + (P - n^2 \sin^2 \theta) E_{\parallel} = 0, \quad (5.10a)$$

$$(S - n^2 \cos^2 \theta) E_{\perp 1} - iD E_{\perp 2} + n^2 \sin \theta \cos \theta E_{\parallel} = 0, \quad (5.10b)$$

$$iD E_{\perp 1} + (S - n^2) E_{\perp 2} = 0. \quad (5.10c)$$

En principio, la relación de dispersión resulta de anular el determinante de este sistema. Sin embargo, para conceptualizar mejor los modos posibles conviene estudiar propagaciones estrictamente paralelas o perpendiculares al campo magnético.

5.3.1. Propagación paralela

En este caso el sistema (5.10) se reduce a

$$P E_{\parallel} = 0, \quad (5.11a)$$

$$(S - n^2) E_{\perp 1} - iD E_{\perp 2} = 0, \quad (5.11b)$$

$$iD E_{\perp 1} + (S - n^2) E_{\perp 2} = 0, \quad (5.11c)$$

que nos indica que las componentes $E_{\parallel}$ y $\mathbf{E}_{\perp}$ están desacopladas entre sí, y pueden ser estudiadas por separado. La condición de existencia de oscilaciones electrostáticas ($\mathbf{E} \parallel \mathbf{k}$) es entonces $P = 0$, que corresponde a

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2 \simeq \omega_{pe}^2;$$

esto es, oscilaciones de plasma en el límite de plasma frío. Como el campo eléctrico paralelo al magnético no induce movimiento perpendicular, la fuerza de Lorentz no actúa en este modo de oscilación, con lo que se tiene la misma relación de dispersión que para plasmas sin campo magnético. Los efectos de temperatura son los mismos que los vistos en el caso de plasmas sin campo magnético; en particular, la aparición de ondas iónico-acústicas propagándose a lo largo del campo magnético..

Para oscilaciones electromagnéticas ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$) la relación de dispersión resulta de la anulación del determinante de las últimas dos de (5.11)

$$(S - n^2)^2 - D^2 = 0,$$

o sea,

$$S - n^2 = \pm D,$$

que si reemplazamos en cualquiera de las dos últimas (5.11) nos dice que

$$E_{\perp 2} = \pm i E_{\perp 1},$$

que corresponde a polarización circular derecha e izquierda, respectivamente (en la convención de la mano derecha e izquierda, respectivamente, con el pulgar en la dirección y sentido de $\mathbf{B}_0$). Podemos escribir la relación como

$$n^2 = S \pm D = \begin{cases} R \\ L \end{cases}.$$

Para $n^2 = R$ tenemos polarización derecha, y para $n^2 = L$ polarización izquierda. Aprovechamos este punto para aclarar algunos puntos genéricos.

En primer lugar algunos puntos convencionales: consideramos que podemos imponer la longitud de onda de la perturbación a voluntad, por lo que la relación de dispersión indica con qué frecuencia o frecuencias (si hubiera más de una rama) oscilará tal perturbación, mientras que las ecuaciones del campo eléctrico indicarán qué tipo de polarización tendrá la onda. Consideramos además que el vector de onda es real, y que la frecuencia correspondiente puede ser compleja; su parte real indica la frecuencia de oscilación propiamente dicha, y su parte imaginaria si la amplitud de la onda crece (parte imaginaria positiva) o decrece (parte imaginaria negativa) en el tiempo. Finalmente, consideramos siempre que la parte real de ω es positiva, ya que un cambio de signo corresponde a una onda propagándose en sentido contrario, que tenemos en cuenta cambiando el signo del vector de onda.

En segundo lugar notemos que es de interés obtener, de la relación de dispersión, los posibles valores de ω para los que $k = 0$, denominadas *frecuencias de corte*, y los correspondientes a $k \rightarrow \infty$, llamadas *frecuencias de resonancia*. En el contexto de plasmas homogéneos que estamos tratando esta nomenclatura no es evidente; sólo podemos decir que en el entorno de estas frecuencias las velocidades de fase divergen (corte) o se anulan (resonancia). Esto último indica, en particular, que cerca de las resonancias los efectos térmicos no pueden ser despreciados. Cuando las propiedades del plasma son suavemente variables en el espacio (varían sobre longitudes mucho mayores que la longitud de onda) la teoría que usamos es aplicable y una perturbación

con ω dado puede propagarse a zonas donde ω se acerque a un corte o una resonancia. Un estudio detallado de este proceso muestra que en la zona con frecuencia de corte igual a ω la onda se refleja completamente, mientras que en el caso de resonancia la energía entrante de la onda se “acumula” (y existen en general procesos adicionales como transformación de ondas de un tipo en otro). Los cortes indican así zonas donde una dada perturbación no puede propagarse, mientras que las resonancias muestran zonas de fuerte absorción (de interés, por ejemplo, para el calentamiento del plasma con ondas).

Continuando con el análisis, la relación de dispersión para ondas circulares derechas se escribe

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}} - \frac{\omega \omega_{pi}^2}{\omega + \omega_{ci}}. \quad (5.12)$$

Como $\text{Re}(\omega) > 0$ tenemos resonancia ($k = \infty$) sólo para $\omega = \omega_{ce}$, lo que es natural pues son los electrones los que tienen el mismo sentido de giro alrededor del campo magnético que el vector $\mathbf{E}$, y pueden por lo tanto girar en fase con éste y absorber energía electromagnética de la onda.

La frecuencia de corte ($k = 0$) resulta de

$$\omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega + \omega_{ci}} = 0,$$

que, anticipando que sucede para frecuencias altas ($\omega \gg \omega_{pi}$), podemos calcular despreciando la dinámica iónica, y obtener la frecuencia de corte para ondas R como la raíz positiva de la ecuación cuadrática resultante

$$\omega_R = \frac{1}{2} \left(\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right). \quad (5.13)$$

La relación de dispersión (5.12) tiene dos ramas; una de alta frecuencia $\omega > \omega_R$, que podemos determinar despreciando completamente la dinámica iónica y escribir

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}}.$$

Esta rama comienza en $\omega = \omega_R$ para $k \rightarrow 0$, y vemos que para $\omega \gg \omega_{pe}$ satisface la relación $k^2 c^2 = \omega^2$ de una onda electromagnética. Notemos que como $\omega_R > \omega_{ce}$ esta rama no presenta resonancia.

La rama de baja frecuencia ($\omega < \omega_{ce}$, pero siempre con $\omega \gg \omega_{pi}$) nos da para $\omega \ll \omega_{ce}$ y ω_{pe}

$$k^2 c^2 \simeq \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \implies \omega \simeq \frac{\omega_{ce}}{\omega_{pe}^2} c^2 k^2,$$

y alcanza la resonancia para $\omega \rightarrow \omega_{ce}$. Esta rama es denominada habitualmente “whistler” por su efecto de silbido al ser recibida en un receptor de radio de sintonía no muy buena. En efecto, si una perturbación con un espectro ancho es generada, por ejemplo por rayos durante una tormenta eléctrica, la perturbación se propaga en forma dispersiva a lo largo del campo magnético terrestre; al alcanzar un punto alejado (típicamente en un hemisferio diferente al de su generación) las componentes de mayor frecuencia llegan primero ($v_g = \partial\omega/\partial k \simeq 2\omega_{ce}c^2k/\omega_{pe}^2$), seguidas por las de frecuencia progresivamente decreciente, generando un sonido de silbido en un receptor de radio.

La zona de muy baja frecuencia de esta rama ($\omega \ll \omega_{ci}$) debe incluir la dinámica iónica. Escribiendo, a primer orden en $\omega/\omega_{ce,i}$,

$$\frac{1}{\omega \pm \omega_{ce,i}} \simeq \pm \frac{1}{\omega_{ce,i}} \left(1 \mp \frac{\omega}{\omega_{ce,i}} \right), \quad (5.14)$$

aproximamos (5.12) por

$$k^2 c^2 = \omega^2 + \omega \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} \left(1 + \frac{\omega}{\omega_{ce}} \right) - \omega \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}} \left(1 - \frac{\omega}{\omega_{ci}} \right),$$

que, usando, de sus definiciones,

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}} &= \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}}, \\ \frac{\omega_{pe}}{\omega_{ce}} &\ll \frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}}, \end{aligned}$$

resulta en

$$k^2 c^2 = \omega^2 \left[1 + \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \right)^2 \right] \simeq \omega^2 \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega_{ci}} \right)^2,$$

de donde

$$\omega = kv_A, \quad (5.15)$$

donde hemos introducido la *velocidad de Alfvén* v_A

$$v_A \equiv c \frac{\omega_{ci}}{\omega_{pi}} = \sqrt{\frac{B_0^2}{\mu_0 n_{i0} m_i}}. \quad (5.16)$$

Estas ondas son denominadas de Alfvén torsionales (ya que el campo magnético perturbado gira junto al campo eléctrico, generando torsión de las líneas magnéticas al avanzar la onda).

Vemos finalmente que para $\omega_{ce} < \omega < \omega_R$ no existe propagación de ondas de tipo R .

Para las ondas circulares izquierda, $n^2 = L$,

$$k^2 c^2 = \omega^2 - \frac{\omega \omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{\omega \omega_{pi}^2}{\omega - \omega_{ci}}, \quad (5.17)$$

el análisis es muy similar al de las ondas R . Vemos que en la rama de alta frecuencia ($\omega \gg \omega_{ci}$ y ω_{pi}) no hay resonancia, mientras que la frecuencia de corte está dada por la raíz positiva de

$$\omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} = 0,$$

que da

$$\omega_L = \frac{1}{2} \left(-\omega_{ce} + \sqrt{\omega_{ce}^2 + 4\omega_{pe}^2} \right). \quad (5.18)$$

Vemos que esta rama también tiende a una onda electromagnética, $\omega = kc$, cuando $\omega \gg \omega_{pe}$, y, por supuesto, $\omega = \omega_L$ para $k \rightarrow 0$.

Para estudiar la rama de baja frecuencia debemos incluir la dinámica iónica y, como hicimos antes, para $\omega \ll \omega_{ci}$ obtenemos también la relación de ondas de Alfvén torsionales (5.15) $\omega = kv_A$, mientras que esta rama presenta la resonancia $\omega = \omega_{ci}$, al ser ahora los iones los que giran en el mismo sentido que el vector $\mathbf{E}$.

Concluimos notando que las ondas R y L , al tener $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ y $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, cumplen, de las (5.2) y (5.3), que $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{e,i} = 0$, por lo que no hay correcciones por efectos térmicos. Vemos además que, salvo para las muy bajas frecuencias (ondas de Alfvén), para un dado valor de k las frecuencias correspondientes de ondas R y L son distintas, con lo que la velocidad de fase de estas ondas será diferente. Al descomponer una onda linealmente polarizada en dos componentes circulares R y L , la diferente velocidad de fase de cada una de éstas se traduce en una rotación progresiva de la dirección de polarización lineal de la onda a medida que se propaga, lo que se conoce como efecto Faraday. Sólo son inmunes al efecto Faraday las ondas de muy baja frecuencia, ya que ambos modos R y L tienden a la misma velocidad de fase v_A , y las electromagnéticas de muy alta frecuencia, cuya velocidad de fase es la de la luz.

5.3.2. Propagación perpendicular

En este caso el sistema (5.10) se reduce a

$$\begin{aligned}(P - n^2) E_{\parallel} &= 0, \\ SE_{\perp 1} - iDE_{\perp 2} &= 0, \\ iDE_{\perp 1} + (S - n^2) E_{\perp 2} &= 0.\end{aligned}$$

Vemos que nuevamente se desacoplan las componentes de $\mathbf{E}$ paralelas y perpendiculares a $\mathbf{B}_0$. Para oscilaciones con $\mathbf{E}_{\perp} = 0$ tenemos que debe ser $n^2 = P$, con lo que obtenemos nuevamente las ondas electromagnéticas (5.7) que obtuvimos en el caso sin campo magnético. Esto es razonable porque al ser $\mathbf{E} \parallel \mathbf{B}_0$ no hay fuerza de Lorentz y, por lo tanto, no hay efecto del campo magnético sobre la dinámica de estas oscilaciones, razón por la cual se denominan *ondas ordinarias* u ondas O .

Por contraposición, y porque el efecto del campo magnético genera una dinámica muy especial, las ondas con $E_{\parallel} = 0$ (siempre con propagación perpendicular) se denominan *ondas extraordinarias* u ondas X . La relación de dispersión correspondiente es

$$S(S - n^2) = D^2,$$

que puede escribirse en términos de R y L como

$$n^2 = \frac{2RL}{R + L}. \quad (5.19)$$

Reemplazando en el sistema original obtenemos que

$$E_{\perp 2} = -i \frac{S}{D} E_{\perp 1} = -i \frac{R + L}{R - L} E_{\perp 1}, \quad (5.20)$$

por lo que tenemos una onda elípticamente polarizada, con una componente longitudinal (a lo largo de $\mathbf{k}$) $E_{\perp 1}$, y otra perpendicular, $E_{\perp 2}$, ambas perpendiculares a $\mathbf{B}_0$.

Las frecuencias de corte corresponden entonces a $R = 0$ y $L = 0$, que son las ω_R y ω_L ya calculadas para las ondas R y L con $\theta = 0$; ecuaciones (5.13) y (5.18).

Las frecuencias de resonancia estarán dadas por las raíces de $R + L = 2S = 0$, o sea,

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} = 0. \quad (5.21)$$

Si consideramos la rama de alta frecuencia ($\omega \gg \omega_{ci}$) podemos despreciar la dinámica iónica con lo que obtenemos la resonancia *híbrida superior*

$$\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}. \quad (5.22)$$

La otra resonancia debe incluir la dinámica iónica; anticipando que esto ocurre a frecuencias suficientemente bajas para que $\omega^2 \ll \omega_{ce}^2$ podemos aproximar la condición de resonancia (5.21) por

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} = 0,$$

de donde obtenemos inmediatamente la resonancia *híbrida inferior*

$$\omega_{LH} = \sqrt{\omega_{ci}^2 + \frac{\omega_{pi}^2}{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{ce}^2}}. \quad (5.23)$$

El estudio de la relación de dispersión de ondas X se complica por el alto grado del polinomio que resulta de (5.19). Si particularizamos para las altas frecuencias en las que podemos ignorar la dinámica iónica tenemos que (5.19) se escribe

$$\begin{aligned} k^2 c^2 &= \frac{[\omega - \omega_{pe}^2/(\omega - \omega_{ce})][\omega - \omega_{pe}^2/(\omega + \omega_{ce})]}{1 - \omega_{pe}^2/(\omega^2 - \omega_{ce}^2)} \\ &= \frac{(\omega^2 - \omega_R^2)(\omega^2 - \omega_L^2)}{\omega^2 - \omega_{UH}^2}. \end{aligned}$$

Esta relación indica dos ramas de alta frecuencia; una con corte en ω_R y otra con corte en ω_L . Notemos el ordenamiento que resulta de las definiciones mismas (pruébelo como ejercicio)

$$\omega_L < \omega_{UH} < \omega_R,$$

que indica que la rama con inicio en ω_R no tiene resonancia y tiende a altas frecuencias a $\omega = kc$, nuestra familiar onda electromagnética. La rama que comienza en ω_L tiende para $k \rightarrow \infty$ a la resonancia híbrida superior.

Para estudiar las bajas frecuencias ($\omega \ll \omega_{ci}$) debemos incluir la dinámica

iónica. Lo hacemos usando (5.14)

$$\begin{aligned}
 \omega R &= \omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega - \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega + \omega_{ci}} \\
 &\simeq \omega \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \right) \simeq \omega \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2}, \\
 \omega L &= \omega - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega + \omega_{ce}} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega - \omega_{ci}} \\
 &\simeq \omega \left(1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \right) \simeq \omega \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2},
 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
 \frac{R + L}{2} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{ce}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{ci}^2} \\
 &\simeq 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{ce}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2},
 \end{aligned}$$

con lo que obtenemos nuevamente la relación de ondas de Alfvén (5.15) $\omega = kv_A$. Esta rama a frecuencias mayores alcanza la resonancia híbrida inferior ω_{LH} para $k \rightarrow \infty$.

A diferencia de las ondas de Alfvén con torsión, del caso de propagación paralela $\mathbf{B}_0$, estas ondas no tuercen las líneas de campo magnético, sino que las comprimen (para estas ondas $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u}_{e,i} \neq 0$, por lo que tenemos efectos de compresión del plasma y, por congelamiento de las líneas de campo, compresión del campo magnético). Se denominan entonces ondas de compresión de Alfvén u ondas magnetosónicas.

5.3.3. Propagación oblicua

La relación de dispersión se obtiene en este caso general pidiendo la anulación del determinante del sistema (5.10) que, usando que

$$S^2 - D^2 = RL,$$

se reduce a

$$PSn^2 \cos^2 \theta - Pn^4 \cos^2 \theta + PSn^2 - PRL - Sn^4 \sin^2 \theta + RLn^2 \sin^2 \theta = 0.$$

Escribiendo $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ despejamos fácilmente

$$\sin^2 \theta = \frac{P(n^4 - 2Sn^2 + RL)}{(P - S)n^4 + (RL - PS)n^2},$$

de donde podemos ver también que

$$\cos^2 \theta = \frac{-Sn^4 + (PS + RL)n^2 - PRL}{(P - S)n^4 + (RL - PS)n^2}.$$

Dividiendo entre sí las dos últimas expresiones tenemos finalmente

$$\tan^2 \theta = \frac{-P(n^2 - R)(n^2 - L)}{(n^2 - P)(Sn^2 - RL)}.$$

De esta expresión vemos que las resonancias ($n \rightarrow \infty$) corresponden a

$$\tan^2 \theta = -\frac{P}{S},$$

que nos dice que las frecuencias de resonancia dependen del ángulo θ . Verique como ejercicio que para $\theta = 0, \pi/2$ se obtienen las resonancias vistas (ω_{pe} , ω_{ce} , ω_{ci} , ω_{UH} y ω_{LH}).

En cuanto a las frecuencias de corte ($n = 0$) se obtiene la relación

$$\tan^2 \theta = -\frac{PRL}{PRL},$$

que sólo puede ser satisfecha si $PRL = 0, \infty$. De hecho, poniendo $n = 0$ es el sistema original (5.10) obtenemos inmediatamente $P = 0$ y $S^2 - D^2 = RL = 0$. La condición $P = 0$ da la frecuencia de corte ω_{pe} (que también es de resonancia para un plasma frío), mientras que $R = 0$ da el corte ω_R , y $L = 0$ el corte ω_L . Vemos entonces que las frecuencias de corte son independientes del ángulo θ .

Notemos que la onda R , con resonancia en ω_{ce} , se transforma, al pasar de $\theta = 0$ a $\theta = \pi/2$, en la magnetosónica con resonancia en ω_{LH} . La onda L , con resonancia en ω_{ci} , desaparece tendiendo a $\omega = 0$ a medida que $\theta \rightarrow \pi/2$.

Para estudiar la transformación de las ondas mencionadas, a medida que cambia θ , en el límite de muy baja frecuencia ($\omega \ll \omega_{ci}$), podemos simplificar las expresiones de S , D y P ,

$$\begin{aligned} S &\simeq \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \\ D &\simeq -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{ci}^3} \omega = -S \frac{\omega}{\omega_{ci}} \simeq 0, \\ P &\simeq -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \simeq \infty, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos del sistema general (5.10) el sistema aproximado para muy bajas frecuencias

$$\begin{aligned} \infty E_{\parallel} &= 0, \\ \left(\frac{c^2}{v_A^2} - n^2 \cos^2 \theta \right) E_{\perp 1} + n^2 \cos \theta \sin \theta E_{\parallel} &= 0, \\ \left(\frac{c^2}{v_A^2} - n^2 \right) E_{\perp 2} &= 0, \end{aligned}$$

de donde se deduce inmediatamente que $E_{\parallel} = 0$, y que tenemos dos modos independientes de propagación; uno con $E_{\perp 1} \neq 0$, con relación de dispersión $\omega = kv_A \cos \theta$, y otro con $E_{\perp 2} \neq 0$, y relación de dispersión $\omega = kv_A$.

El modo con $E_{\perp 1} \neq 0$ corresponde a una onda de Alfvén torsional (linealmente polarizada, superposición de ondas R y L en $\theta = 0$) con dirección de propagación oblicua. Este modo, denominado “lento”, tiende a $\omega = 0$ a medida que $\theta \rightarrow \pi/2$.

El modo con $E_{\perp 2} \neq 0$ es el de una onda de Alfvén compresional (magnetosónica), denominado “rápido”, que descubrimos que tiene la misma relación de dispersión independientemente de la dirección de propagación, al menos en la aproximación de plasma frío (para $\theta = 0$ no hay correcciones por efectos térmicos, por compresión del plasma, pero para $\theta \neq 0$ los efectos térmicos modifican la relación de dispersión).

5.4. Ondas de deriva (drift waves)

En el caso que el estado base no sea homogéneo existen modos adicionales a los estudiados. Uno de los más importantes es el correspondiente a las llamadas ondas de deriva. Como se estudiará con detalle en el capítulo siguiente, estados base de equilibrio en presencia de campo magnético involucran en general un plasma cuya presión varía con la posición en la dirección perpendicular al campo magnético. Podemos así considerar con mucha generalidad un campo magnético en la dirección $\mathbf{e}_z$, con la presión del plasma variando en la dirección $\mathbf{e}_x$. Anticipando que estas ondas son de baja frecuencia $\omega \ll \omega_{ci}$, en la ecuación de movimiento de electrones a lo largo del campo magnético (dirección $\mathbf{e}_z$) podemos despreciar la inercia de los electrones y escribir

$$0 = -\frac{\partial p_e}{\partial z} - en_e E_z,$$

donde hemos también despreciado las colisiones con iones ($\nu_{ei} \ll \omega$). A su vez, como los electrones se mueven muy fácilmente a lo largo de las líneas

de campo, equilibran su temperatura eficientemente en esta dirección, por lo que

$$\frac{\partial T_e}{\partial z} = 0,$$

y se tiene así

$$E_z = -\frac{T_e}{en_e} \frac{\partial n_e}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{T_e}{e} \ln n_e \right) = -\frac{\partial \phi}{\partial z},$$

con ϕ el potencial electrico, que puede integrarse para dar (consideramos por simplicidad temperatura electrónica uniforme también en las direcciones perpendiculares al campo magnético)

$$n_e = n_{e0}(x) \exp \left[\frac{e\phi}{T_e} \right].$$

En la ecuación de movimiento de los iones despreciamos también la inercia y las colisiones con electrones

$$0 = -\nabla p_i + Zen_i (\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}),$$

de donde obtenemos de la manera habitual

$$\mathbf{u}_{i\perp} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} - \frac{1}{Zen_i} \frac{\nabla p_i \times \mathbf{B}}{B^2}.$$

Para un campo uniforme en la región de interés, $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{e}_z$, notamos que

$$\nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_{i\perp}) = \frac{1}{B_0} \nabla \cdot (n_i \mathbf{E} \times \mathbf{e}_z) - \frac{1}{ZeB_0} \nabla \cdot (\nabla p_i \times \mathbf{e}_z). \quad (5.24)$$

Es inmediato ver que el último término es nulo, de manera que podemos escribir

$$\nabla \cdot (n_i \mathbf{u}_{i\perp}) = -\frac{1}{B_0} \nabla \cdot (n_i \nabla \phi \times \mathbf{e}_z),$$

con lo que la ecuación de continuidad de los iones se escribe (consideramos que no hay velocidad media de los iones en la dirección del campo magnético)

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} - \frac{1}{B_0} \nabla \cdot (n_i \nabla \phi \times \mathbf{e}_z) = 0. \quad (5.25)$$

Dado que

$$\nabla \cdot (n_i \nabla \phi \times \mathbf{e}_z) = \nabla n_i \cdot (\nabla \phi \times \mathbf{e}_z) + n_i \nabla \cdot (\nabla \phi \times \mathbf{e}_z),$$

como antes para la ecuación (5.24), el último término es nulo, con lo que resulta

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (n_i \nabla \phi \times \mathbf{e}_z) &= \nabla n_i \cdot (\nabla \phi \times \mathbf{e}_z) \\ &= -\nabla \phi \cdot (\nabla n_i \times \mathbf{e}_z),\end{aligned}$$

donde se usó la conmutatividad del producto mixto.

Usando ahora cuasi-neutralidad (pensamos en oscilaciones lentas en las que la longitud de onda es grande comparada con la longitud de Debye), tenemos que

$$n_i = \frac{n_e}{Z} = \frac{n_{e0}(x)}{Z} \exp \left[\frac{e\phi}{T_e} \right],$$

con lo que la (5.25) resulta (nótese que no se ha usado linealización)

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{T_e}{eB_0 n_{e0}(x)} (\nabla n_{e0} \times \mathbf{e}_z) \cdot \nabla \phi = 0. \quad (5.26)$$

Vemos así que las perturbaciones del potencial, y consecuentemente de las densidades, se propagan en la dirección perpendicular tanto al campo magnético como al gradiente de densidad del estado base, con la velocidad de deriva diamagnética de los electrones (de allí la denominación de estos modos)

$$\mathbf{V}_D = \frac{T_e}{eB_0 n_{e0}(x)} (\nabla n_{e0} \times \mathbf{e}_z).$$

La fenomenología pueden entenderse considerando que una perturbación que genera un campo eléctrico produce una deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ de los iones, que al moverse a zonas de diferente densidad de base perturban la densidad. Los electrones, rápidamente movibles a lo largo de las líneas de campo, se desplazan para mantener cuasi-neutralidad, generando un campo eléctrico que da lugar a a su vez a una deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ que tiende a restaurar el desplazamiento original. Esto resulta en una perturbación propagante del potencial y densidades asociadas. Un punto importante es que la perturbación debe tener una componente en la dirección del campo magnético ($k_z \neq 0$), de manera que los electrones puedan desplazarse a lo largo del campo y seguir la oscilación.

Capítulo 6

Equilibrios y estabilidad

El confinamiento del plasma durante tiempos prolongados (muchos tiempos de colisión) es uno de los problemas más importantes y difíciles de la física del plasma. Debemos primero lograr configuraciones estacionarias (generalmente también estáticas, $\mathbf{u} = 0$) que además sean estables. Dado que en general interesa confinar el plasma durante tiempos largos comparados con el tiempo de colisiones, la aproximación de presión isótropa es apropiada. Por otro lado, a las altas temperaturas de interés la resistividad del plasma es muy baja y puede ignorarse en una primera aproximación. Con esto, considerando equilibrios estáticos, la condición de equilibrio es, en la descripción de un solo fluido,

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (6.1)$$

complementada con las ecuaciones de Maxwell correspondientes

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (6.2)$$

Estas expresiones tienen consecuencias inmediatas importantes. Vemos de la (6.1) que debe ser

$$\begin{aligned} \mathbf{j} \cdot \nabla p &= 0, \\ \mathbf{B} \cdot \nabla p &= 0, \end{aligned}$$

por lo que las superficies de $p = \text{cte}$ deben contener tanto a las líneas de $\mathbf{j}$ como a las de $\mathbf{B}$. Así, las superficies isobaras son también superficies magnéticas y superficies de corriente (cuidado, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{B}$ no son en general constantes sobre estas superficies, sólo tangentes a ellas).

Tomando la divergencia de la primera (6.2) es $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, que, junto con $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, nos dice que las líneas de corriente y las de campo no pueden comenzar ni terminar en las superficies consideradas si éstas están en una

región limitada (configuración cerrada), y se prolongan al infinito en superficies no acotadas (configuración abierta). Notemos que en una configuración cerrada las líneas no necesariamente se cierran sobre sí mismas; pueden también recorrer indefinidamente la superficie (cubrirla densamente).

La (6.1) indica que en general es $\mathbf{j} \times \mathbf{B} \neq 0$, salvo que la presión del plasma sea muy pequeña comparada con la presión magnética ($\beta \rightarrow 0$), en cuyo caso tenemos un equilibrio denominada libre de fuerzas, en el cual

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

En este caso es $\mathbf{j} \parallel \mathbf{B}$, o equivalentemente, de (6.2), $\nabla \times \mathbf{B} \parallel \mathbf{B}$, que podemos escribir como (ecuación de Beltrami)

$$\nabla \times \mathbf{B} = \gamma \mathbf{B},$$

donde γ es una función escalar cualquiera. Tomando la divergencia de esta ecuación tenemos que debe ser $\mathbf{B} \cdot \nabla \gamma = 0$, por lo que las superficies $\gamma = \text{cte}$ son superficies magnéticas.

Escribamos la ecuación de equilibrio usando la ecuación de Ampère

$$\begin{aligned} \nabla p &= \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \\ &= \frac{1}{\mu_0} [(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla B^2/2], \end{aligned}$$

con lo que

$$\nabla \left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right) = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}.$$

Si consideramos la interfase plasma-vacío e integramos esta última igualdad a través de ella, como el segundo miembro es finito, resulta (i corresponde al interior del plasma y e al exterior)

$$\left(p + \frac{B^2}{2\mu_0} \right)_i = \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right)_e.$$

Tanto la presión termodinámica como la presión magnética pueden ser discontinuas en la interfase, pero su suma es continua. Recordemos que la componente normal del campo magnético es continua, por lo que una discontinuidad en la presión magnética requiere discontinuidad en la componente tangencial del campo, lo que es causado por corrientes superficiales en el plasma.

6.0.1. Tokamak

Una configuración de importancia práctica es la de tokamak, con buena aproximación libre de fuerzas, debido a que el plasma es de bajo β . Es una configuración cerrada toroidal, con el campo principal en la dirección azimutal (campo toroidal), generado por bobinas externas al plasma, más una componente meridional (campo poloidal) generada por una corriente que circula en el mismo plasma en la dirección azimutal (a lo largo del toro). Esta corriente es inducida por un bobinado externo que hace las veces de primario de un transformador en el que el plasma es el secundario, o mantenida en forma continua por métodos no inductivos como calentamiento por ondas o inyección de haces neutros. Existe también la posibilidad de que parte de esta corriente sea sostenida en forma continua por la no uniformidad radial de la presión del plasma, junto a efectos propios de la geometría toroidal, contribución denominada corriente de "bootstrap".

Para evitar las complicaciones de la geometría toroidal podemos considerar una primera aproximación en la que el toro es "enderezado" y convertido en un cilindro recto circular (sin embargo, muchos de los efectos más interesantes del tokamak resultan de su geometría toroidal). En este caso la dirección toroidal corresponde al eje del cilindro (eje z), y la dirección poloidal corresponde a la dirección θ . Tenemos entonces $B_z(r)$ generado por bobinas externas, y B_θ generada por la corriente en el plasma, o sea

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r}, \quad (6.3)$$

donde $I(r)$ es la corriente (en la dirección z) que circula entre $r = 0$ y r .

El equilibrio libre de fuerzas $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \mathbf{0}$ se escribe entonces

$$\frac{d}{dr} (B_z^2 + B_\theta^2) + \frac{2}{r} B_\theta^2 = 0, \quad (6.4)$$

que, junto con (6.3), nos permite determinar $B_z(r)$ una vez dada $I(r)$.

Si suponemos que el plasma tiene un radio a y que la corriente total que circula por él es I_0 y está uniformemente distribuida, es $I(r) = I_0 r^2 / a^2$, con lo que, para $r \leq a$, es

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi a^2} r,$$

minetras que para $r \geq a$ es

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}.$$

Esto nos permite integrar fácilmente (6.4) para obtener que B_z es constante en $r \geq a$, que denominamos B_{zext} , mientras que en el plasma es

$$B_z^2 = B_{zext}^2 + \frac{\mu_0^2 I_0^2}{2\pi^2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

6.1. Pinchs

Uno de los tipos de equilibrio más interesantes es el denominado pinch, en el que el campo magnético que confina el plasma es generado por corrientes que circulan en el plasma mismo. Existen dos tipos básicos de configuraciones abiertas con simetría cilíndrica: el z -pinch y el θ -pinch, donde z y θ indican la dirección de la corriente en coordenadas cilíndricas.

6.1.1. Theta-pinch

La densidad de corriente en este caso tiene la forma $\mathbf{j} = j(r) \mathbf{e}_\theta$, que genera un campo $B(r)$ en la dirección z calculable fácilmente por la ley de Ampère

$$\frac{dB}{dr} = -\mu_0 j(r).$$

La condición de equilibrio (6.1) es para esta configuración

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= j(r) B(r) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB}{dr} B(r) \\ &= -\frac{d}{dr} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} \right), \end{aligned}$$

de manera que tenemos simplemente

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = cte.$$

Al ser las líneas de campo rectas no tenemos efectos de tensión, sino sólo de presión magnética. La condición de equilibrio es entonces que la presión total (térmica más magnética) sea constante.

Todas las magnitudes se obtienen a partir de la distribución de corriente $j(r)$. Para el caso de interés en que la corriente circula en una capa de espesor muy pequeño en $r = R$, podemos escribir

$$j(r) = \frac{I}{L} \delta(r - R),$$

donde I es la corriente total y L la longitud sobre la que está distribuida en la dirección z . El campo correspondiente vale

$$B(r) = \begin{cases} \mu_0 I/L, & \text{para } r < R, \\ 0, & \text{para } r > R, \end{cases}$$

y la presión es

$$p(r) = \begin{cases} p_{ext} - \mu_0 I^2/2L^2, & \text{para } r < R, \\ p_{ext}, & \text{para } r > R. \end{cases}$$

6.1.2. Z-pinch

En este caso la corriente es de la forma $\mathbf{j} = j(r) \mathbf{e}_z$, que genera campo magnético $\mathbf{B} = B(r) \mathbf{e}_\theta$, dado por la ley de Ampère como

$$B(r) = \frac{\mu_0 I(r)}{2\pi r},$$

donde

$$I(r) = 2\pi \int_0^r j(r') r' dr',$$

es la corriente que circula dentro del radio r , y de la cual podemos escribir

$$j(r) = \frac{1}{2\pi r} \frac{dI}{dr}.$$

La condición de equilibrio es

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -j(r) B(r) = -\frac{\mu_0}{4\pi^2 r^2} I(r) \frac{dI}{dr} \\ &= -\frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} \frac{dI^2}{dr}. \end{aligned}$$

Consideremos ahora que el plasma se extiende hasta el radio a y que la corriente total que circula por él es I_0 . La presión del plasma en $r = a$ es nula (suponemos confinamiento magnético puro), por lo que, integrando por partes,

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dI^2}{dr} dr &= I_0^2 = -\frac{8\pi^2}{\mu_0} \int_0^a r^2 \frac{dp}{dr} dr \\ &= -\frac{8\pi^2}{\mu_0} \left[R_0^2 p(a) - 2 \int_0^a r p(r) dr \right] \\ &= \frac{16\pi^2}{\mu_0} \int_0^a r p(r) dr. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} p(r) &= n_i(r) T_i + n_e(r) T_e \\ &= n_i(r) (T_i + Z T_e), \end{aligned}$$

donde hemos considerado temperaturas uniformes y cuasineutralidad, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_0^2 &= \frac{16\pi^2}{\mu_0} (T_i + Z T_e) \int_0^a r n_i(r) dr \\ &= \frac{8\pi}{\mu_0} (T_i + Z T_e) \int_0^a 2\pi r n_i(r) dr \\ &= \frac{8\pi}{\mu_0} (T_i + Z T_e) \frac{N_i}{L}, \end{aligned}$$

donde N_i es el número total de iones del plasma, que tiene longitud L en la dirección z . Esta última expresión, denominada relación de Bennett, nos indica cuál es la corriente necesaria para contener el plasma con las características dadas.

Como antes, la distribución radial de las distintas magnitudes se obtiene a partir de la forma dada de $j(r)$. Para el caso de interés en que esta corriente es uniforme

$$j(r) = \begin{cases} I_0/\pi a^2, & \text{para } r < a, \\ 0, & \text{para } r > a, \end{cases}$$

obtenemos en el plasma

$$p(r) = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi^2 a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right).$$

Para el caso de estar la corriente restringida a una capa muy delgada en a ,

$$j(r) = \frac{I_0}{2\pi a} \delta(r - a),$$

tenemos (H es la función de Heaviside)

$$I(r) = I_0 H(r - a)$$

con lo que

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -\frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi r^2} H(r - a) \delta(r - a) \\ &= -\frac{\mu_0 I_0^2}{8\pi r^2} \delta(r - a), \end{aligned}$$

donde se usó la convención $H(0) = 1/2$. La presión es entonces constante a trozos y vale (considerando que es nula fuera del plasma)

$$p(r) = \begin{cases} \mu_0 I_0^2 / (8\pi a^2), & \text{para } r < a, \\ 0, & \text{para } r > a. \end{cases}$$

6.2. Ecuación de Grad-Shafranov

Si se consideran equilibrios con simetría axial, en coordenadas cilíndricas (s, ϕ, z) , con z el eje de simetría, se tiene que $\partial/\partial\phi = 0$. Con esto, el campo magnético se escribe como

$$\mathbf{B} = \nabla \times [A_\phi(s, z) \mathbf{e}_\phi] + B_\phi(s, z) \mathbf{e}_\phi,$$

que en componentes es

$$\mathbf{B} = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_s + B_\phi \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s A_\phi) \mathbf{e}_z.$$

Así, el flujo a través de una sección $z = \text{cte}$ de una dada superficie de presión constante $p(s, z) = \text{cte}$ (que sabemos contiene las líneas de $\mathbf{B}$ y de $\mathbf{j}$) se escribe

$$\psi(s, z) = \int_0^s B_z(s', z) 2\pi s' ds' = 2\pi s A_\phi,$$

con lo que se tiene una expresión más conveniente de $\mathbf{B}$ al reemplazar A_ϕ por ψ :

$$\mathbf{B} = -\frac{1}{2\pi s} \frac{\partial \psi}{\partial z} \mathbf{e}_s + B_\phi \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{2\pi s} \frac{\partial \psi}{\partial s} \mathbf{e}_z.$$

Con esta expresión de $\mathbf{B}$, su rotor se escribe

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\frac{\partial B_\phi}{\partial z} \mathbf{e}_s - \frac{1}{2\pi s} D_{GS}[\psi] \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s B_\phi) \mathbf{e}_z,$$

donde se ha definido el operador diferencial

$$D_{GS} \equiv s \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Si escribimos ahora en coordenadas cilíndricas la ecuación del equilibrio

$$\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{B} = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B},$$

la componente ϕ es idénticamente nula, mientras que la componente s es

$$\frac{\partial p}{\partial s} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{(2\pi s)^2} D_{GS}[\psi] \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s B_\phi) B_\phi. \quad (6.5)$$

Notemos que como la superficie $p = cte$ que se usó para definir el flujo ψ no es atravesada por líneas de $\mathbf{B}$, al ser $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ el flujo a través de cualquier sección que se elija en esta superficie es el mismo, por lo que a cada valor de p le corresponde un dado valor de ψ ; esto es, $p = p(\psi)$.

De igual manera, como $\mathbf{j}$ tampoco atraviesa las superficies $p = cte$, y también vale que $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ (no sólo por la aproximación MHD, sino también porque el equilibrio es estacionario), la corriente que atraviesa cualquier sección de una dada superficie $p = cte$, es la misma

$$I = \int_0^s j_z(s', z) 2\pi s' ds',$$

con lo que tenemos que también es $I = I(\psi)$.

Además, por la ley de Ampère la componente B_ϕ en la dada superficie se escribe

$$B_\phi = \frac{\mu_0 I(\psi)}{2\pi s}.$$

Tenemos así que la (6.5) se puede escribir como

$$\frac{dp}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial s} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{1}{(2\pi s)^2} D_{GS}[\psi] \frac{\partial \psi}{\partial s} - \frac{\mu_0}{(2\pi s)^2} I \frac{dI}{d\psi} \frac{\partial \psi}{\partial s},$$

con lo que resulta la ecuación de Grad-Shafranov para el flujo ψ

$$D_{GS}[\psi] + \mu_0^2 I \frac{dI}{d\psi} + \mu_0 (2\pi s)^2 \frac{dp}{d\psi} = 0. \quad (6.6)$$

Notamos que la componente z de la ecuación de equilibrio lleva a la misma ecuación (6.6), por lo que la ecuación de Grad-Shafranov contiene la misma información que la ecuación original cuando existe simetría axial. Cada equilibrio con esta simetría está definido entonces por la forma de las funciones $I(\psi)$ y $p(\psi)$ y por las condiciones de contorno.

6.3. Estabilidad

Una configuración de equilibrio puede no realizarse en la práctica si la misma es inestable; esto es, si ante apartamientos pequeños la configuración

evoluciona alejándose del estado de equilibrio. Nos interesan aquí configuraciones de plasma en la descripción de un solo fluido, en las que los detalles de las distribuciones microscópicas de las partículas no son muy importantes. Evoluciones de este estado se traducen en movimientos macroscópicos del plasma, que son justamente unos de los más nocivos para el confinamiento. Existen además evoluciones menos peligrosas en este sentido, que corresponden a cambios de la forma de las funciones de distribución, sin afectar grandemente la variables macroscópicas, y que deben estudiarse con una teoría cinética.

Consideramos entonces las ecuaciones de la MHD ideal

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}), \\ \rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \\ \frac{dp}{dt} &= -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0.\end{aligned}$$

Nos interesa estudiar pequeños apartamientos de un equilibrio estático dado por $\mathbf{u}_0 = 0$, y

$$\nabla p_0 = \mathbf{j}_0 \times \mathbf{B}_0, \quad (6.7)$$

en el que las magnitudes con subíndice 0 indican valores de equilibrio, en general no uniformes espacialmente. Esta no uniformidad nos impide proceder como en el caso de ondas en plasmas homogéneos y estudiar modos simples de Fourier para los apartamientos, lo que hace el tratamiento de la estabilidad complicado.

Procedemos entonces a definir los apartamientos de los elementos de fluido del plasma $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t)$, respecto de sus posiciones de equilibrio, como la posición al tiempo t del elemento que en $t = 0$ se encontraba en $\mathbf{x}$, referida a esta posición inicial. Estudiamos además la evolución en tiempos cortos para que el apartamiento pueda considerarse pequeño. De esta manera, podemos decir que

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\xi}(\mathbf{x}, t), \quad (6.8)$$

en los tiempos de interés (piense porqué esta igualdad es sólo aproximada, válida sólo a tiempos cortos). Si escribimos entonces para las magnitudes en los tiempos considerados

$$a(\mathbf{x}, t) = a_0(\mathbf{x}) + \delta a(\mathbf{x}, t),$$

podemos linealizar las ecuaciones de la MHD ideal, despreciando los términos no lineales en los δa , y obtenemos, usando además (6.8) y las ecuaciones del equilibrio,

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \left(\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial t} \right), \quad (6.9a)$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\nabla \delta p + \delta \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{j}_0 \times \delta \mathbf{B}, \quad (6.9b)$$

$$\frac{\partial \delta p}{\partial t} = -\frac{\partial \xi}{\partial t} \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad (6.9c)$$

$$\frac{\partial \delta \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right), \quad (6.9d)$$

$$\nabla \times \delta \mathbf{B} = \mu_0 \delta \mathbf{j}, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{B} = 0. \quad (6.9e)$$

La ventaja de introducir los apartamientos ξ es que estas ecuaciones (salvo la segunda) se pueden integrar trivialmente en t para obtener los apartamientos δa expresados en términos de ξ

$$\delta \rho = -\nabla \cdot (\rho_0 \xi), \quad (6.10a)$$

$$\delta p = -\xi \cdot \nabla p_0 - \gamma p_0 \nabla \cdot \xi, \quad (6.10b)$$

$$\delta \mathbf{B} = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}_0), \quad (6.10c)$$

$$\delta \mathbf{j} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \delta \mathbf{B}, \quad (6.10d)$$

donde se usó que para $\xi = 0$ es $\delta a = 0$. Si ahora reemplazamos las últimas tres expresiones en la segunda de las (6.9) obtenemos una ecuación lineal de la forma

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathbf{F}(\xi), \quad (6.11)$$

donde $\mathbf{F}(\xi)$ es el operador lineal y homogéneo que resulta del reemplazo mencionado:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\xi) = & \nabla (\xi \cdot \nabla p_0 + \gamma p_0 \nabla \cdot \xi) \\ & + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 + \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

La ecuación (6.11) es la base del estudio de estabilidad de configuraciones de equilibrio en MHD ideal. Conceptualmente, si en alguna zona los apartamientos crecen monótonamente en el tiempo se dice que el equilibrio es (linealmente) inestable, mientras que si en cada punto del plasma los apartamientos se mantienen pequeños en todo tiempo (típicamente oscilando) el equilibrio es estable.

6.4. Modos flute

Consideremos la configuración más sencilla posible, un plasma indefinidamente extenso, con presión de equilibrio uniforme y sin campo magnético, con una interfase plasma-vacío plana, con campo magnético externo que mantiene el plasma en equilibrio. Tomemos el plano (y, z) en la interfase, con normal $\mathbf{e}_x$ hacia afuera del plasma, y el eje z en la dirección del campo magnético de equilibrio $B_0(x) \mathbf{e}_z$. La condición de equilibrio es

$$p_0 = \frac{B_0^2(x=0)}{2\mu_0}, \quad (6.13)$$

donde p_0 es la presión uniforme del plasma, y $B_0(x=0)$ el valor del campo inmediatamente fuera de la interfase. El salto de campo magnético al cruzar la interfase (de cero a $B_0(x=0)$) requiere una densidad de corriente superficial en el plasma.

Por ser p_0 uniforme y $\mathbf{B}_0 = 0$ en el plasma, la (6.11) se reduce a

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{\xi}}{\partial t^2} = \gamma p_0 \boldsymbol{\nabla} (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}). \quad (6.14)$$

Aprovechando que sólo hay variaciones de las magnitudes de equilibrio en la dirección x podemos estudiar $\boldsymbol{\xi}$ en sus modos de Fourier temporales y espaciales en y, z ,

$$\boldsymbol{\xi}(x, y, z, t) = \widehat{\boldsymbol{\xi}}(x) \exp i(k_y y + k_z z - \omega t),$$

que nos permite escribir la ecuación (6.14) en componentes como

$$\begin{aligned} -\rho_0 \omega^2 \widehat{\xi}_x &= \gamma p_0 \frac{d}{dx} \left(\frac{d\widehat{\xi}_x}{dx} + ik_y \widehat{\xi}_y + ik_z \widehat{\xi}_z \right), \\ -\rho_0 \omega^2 \widehat{\xi}_y &= \gamma p_0 ik_y \left(\frac{d\widehat{\xi}_x}{dx} + ik_y \widehat{\xi}_y + ik_z \widehat{\xi}_z \right), \\ -\rho_0 \omega^2 \widehat{\xi}_z &= \gamma p_0 ik_z \left(\frac{d\widehat{\xi}_x}{dx} + ik_y \widehat{\xi}_y + ik_z \widehat{\xi}_z \right). \end{aligned}$$

De las últimas dos se despejan fácilmente

$$\widehat{\xi}_{y,z} = \frac{ik_{y,z} c_0^2}{k^2 c_0^2 - \omega^2} \frac{d\widehat{\xi}_x}{dx}, \quad (6.15)$$

donde hemos introducido la velocidad del sonido en el plasma

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0},$$

y hemos escrito

$$k^2 = k_y^2 + k_z^2.$$

Al reemplazar (6.15) en la ecuación de $\hat{\xi}_x$ obtenemos

$$\frac{k^2 c_0^2 - \omega^2}{c_0^2} \hat{\xi}_x = \frac{d^2 \hat{\xi}_x}{dx^2},$$

cuya solución es inmediata

$$\hat{\xi}_x = \hat{\xi}_{x0} \exp(\kappa x), \quad (6.16)$$

donde κ es la raíz con parte real positiva

$$\kappa = \frac{\sqrt{k^2 c_0^2 - \omega^2}}{c_0}, \quad (6.17)$$

elegida así para quedarnos con la solución que no diverge en $x = -\infty$, como corresponde a un apartamiento físicamente aceptable.

Debemos ahora tener en cuenta la condición de contorno que el apartamiento satisface en la interfase plasma-vacío. La condición es que la suma de presiones termodinámica y magnética debe ser continua. Esto lo vimos en el caso de equilibrio, pero debe ser cierto también cuando hay movimiento para que la interfase (que tiene masa nula) no sufra aceleraciones infinitas. Así, denotando con i y e las regiones interior y exterior al plasma, tenemos en un caso genérico

$$\left[p_0 + \delta p + \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0) \right]_i = \frac{1}{2\mu_0} (B_0^2 + \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0)_e.$$

Debe tenerse cuidado porque esta igualdad se satisface sobre la superficie perturbada S ; si queremos reducirla a una igualdad que se satisfaga sobre la superficie sin perturbar S_0 basta desarrollar los términos de orden cero en el entorno de la superficie original,

$$\left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_S \simeq \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_{S_0} + \frac{\partial}{\partial n} \left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}.$$

Como sobre S_0 se satisface

$$\left(p_0 + \frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_i = \left(\frac{B_0^2}{2\mu_0} \right)_e,$$

tenemos finalmente (ya evaluado todo en S_0)

$$\left[\delta p + \frac{1}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 \right]_i = \frac{1}{\mu_0} (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0)_e + \left[\frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial}{\partial n} (B_{0e}^2 - B_{0i}^2) - \frac{\partial p_{0i}}{\partial n} \right] \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n}.$$

En nuestro caso es $p_{0i} = p_0$ uniforme, $\mathbf{B}_{0i} = 0$ y $\mathbf{B}_{0e} = B_0(x) \mathbf{e}_z$, con lo que la condición de equilibrio en la superficie $x = 0$ es

$$\delta p|_{x=0} = \left[\frac{\delta B_z B_0}{\mu_0} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B_0^2}{\partial x} \xi_x \right]_{x=0},$$

o sea, usando la segunda de las (6.10),

$$-\gamma p_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}|_{x=0} = \left[\frac{\delta B_z B_0}{\mu_0} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B_0^2}{\partial x} \xi_x \right]_{x=0}. \quad (6.18)$$

Como

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} &= \left(\frac{d\hat{\xi}_x}{dx} + ik_y \hat{\xi}_y + ik_z \hat{\xi}_z \right) \exp i(k_y y + k_z z - \omega t) \\ &= -\frac{\omega^2}{k^2 c_0^2 - \omega^2} \frac{d\hat{\xi}_x}{dx} \exp i(k_y y + k_z z - \omega t), \end{aligned}$$

donde hemos usado la (6.15) para escribir la segunda línea, la (6.18) se escribe

$$\gamma p_0 \frac{\omega^2}{k^2 c_0^2 - \omega^2} \frac{d\hat{\xi}_x}{dx} \Big|_{x=0} = \left[\frac{\delta B_z B_0}{\mu_0} + \frac{1}{2\mu_0} \frac{\partial B_0^2}{\partial x} \xi_x \right]_{x=0}. \quad (6.19)$$

El punto molesto es que todavía debemos calcular la variación del campo externo $\delta \mathbf{B}$ debida al campo de apartamientos $\boldsymbol{\xi}$. Para esto debemos tener en cuenta que, en el sistema que se mueve con el plasma, el campo eléctrico es nulo (ley de Ohm con resistividad nula). Por continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico, también será nula esta componente inmediatamente fuera de la interfase (en el mismo sistema de referencia)

$$(\delta \mathbf{E}_{||} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}_0)_{x=0} = 0, \quad (6.20)$$

donde el símbolo $||$ significa paralelo a la interfase.

Como los campos eléctrico y magnético que nos interesa calcular son los del vacío (sin cargas ni corrientes), es útil escribirlos en términos del potencial vector $\mathbf{A}$, con el gauge más sencillo, compatible con la ausencia de fuentes, que es el de potencial electrostático nulo y $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$, con lo que

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \\ \delta \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}. \end{aligned}$$

En términos de $\mathbf{A}$ la (6.20) se escribe (usando que $\mathbf{u} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$)

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{||}}{\partial t} \Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial t} \times \mathbf{B}_0 \right)_{x=0},$$

que integramos inmediatamente para obtener

$$\mathbf{A}_{||}|_{x=0} = (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)_{x=0}, \quad (6.21)$$

que es la condición de contorno satisfecha por $\mathbf{A}$. Las ecuaciones que satisface $\mathbf{A}$ son la de no haber corrientes (se desprecian las de desplazamiento por ser las variaciones temporales “lentas”: $\omega \ll kc$)

$$\nabla^2 \mathbf{A} = 0,$$

y la del gauge elegido

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0.$$

Escribiendo en componentes la (6.21)

$$\begin{aligned} A_y|_{x=0} &= -(\xi_x B_0)_{x=0} = -\hat{\xi}_{x0} \exp i(k_y y + k_z z - \omega t) B_0(x=0) \\ A_z|_{x=0} &= 0, \end{aligned} \quad (6.22)$$

vemos que las condiciones de contorno no introducen ninguna dependencia en x , por lo que podemos escribir que

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \exp i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t),$$

con $\mathbf{A}_0 = cte$, por lo que

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{A}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = 0,$$

de donde $k_x^2 = -(k_y^2 + k_z^2)$, o sea,

$$k_x = i\sqrt{k_y^2 + k_z^2} = ik, \quad (6.23)$$

donde se ha elegido el signo de la raíz para que $\mathbf{A}$ no diverja en $x = +\infty$, como corresponde a un campo físicamente aceptable.

Las mismas condiciones de contorno nos permiten elegir $A_z = 0$, con lo que

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = ik_x A_x + ik_y A_y = 0,$$

de donde

$$A_x = -\frac{k_y}{k_x} A_y.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} \delta B_z &= (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \mathbf{e}_z = ik_x A_y - ik_y A_x \\ &= ik_x A_y + \frac{ik_y^2}{k_x} A_y = i \frac{k_x^2 + k_y^2}{k_x} A_y \\ &= -\frac{k_z^2}{k} A_y, \end{aligned}$$

donde en la última línea se usó (6.23). Así, usando la (6.22),

$$\delta B_z|_{x=0} = -\frac{k_z^2}{k} A_y|_{x=0} = \frac{k_z^2}{k} \widehat{\xi}_{x0} \exp i(k_y y + k_z z - \omega t) B_0(x=0).$$

Esta expresión nos permite escribir la condición (6.19) como

$$\gamma p_0 \frac{\omega^2}{k^2 c_0^2 - \omega^2} \frac{d\widehat{\xi}_x}{dx} \Big|_{x=0} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\partial B_0^2}{\partial x} + \frac{2k_z^2}{k} B_0^2 \right]_{x=0} \widehat{\xi}_{x0},$$

que, usando las (6.16) y (6.17), reescribimos

$$\frac{\gamma p_0 \omega^2}{c_0 \sqrt{k^2 c_0^2 - \omega^2}} \widehat{\xi}_{x0} = \frac{1}{2\mu_0} \left[\frac{\partial B_0^2}{\partial x} + \frac{2k_z^2}{k} B_0^2 \right]_{x=0} \widehat{\xi}_{x0}.$$

Tenemos así la relación de dispersión

$$\frac{\omega^2}{\sqrt{k^2 c_0^2 - \omega^2}} = \frac{c_0}{2\gamma p_0 \mu_0} \left[\frac{\partial B_0^2}{\partial x} + \frac{2k_z^2}{k} B_0^2 \right]_{x=0}.$$

De aquí es fácil deducir si una configuración es estable estudiando los posibles valores de ω . Llamemos

$$g_0 \equiv \frac{c_0}{2\gamma p_0 \mu_0} \left[\frac{\partial B_0^2}{\partial x} + \frac{2k_z^2}{k} B_0^2 \right]_{x=0}, \quad (6.24)$$

con lo que

$$\omega^2 = g_0 \sqrt{k^2 c_0^2 - \omega^2}. \quad (6.25)$$

Recordando que elegimos $\text{Re}(\sqrt{k^2 c_0^2 - \omega^2}) > 0$, por lo que si $g_0 > 0$ resulta $\text{Re}(\omega^2) > 0$. Si despejamos ahora ω^2 , resolviendo la cuadrática en ω^2 que resulta de (6.25), obtenemos, con la condición $\text{Re}(\omega^2) > 0$,

$$2\omega^2 = -g_0^2 + \sqrt{g_0^4 + 4k^2 c_0^2 g_0^2},$$

que nos dice inmediatamente que ω^2 es real y positiva. De esta manera, los apartamientos ξ efectúan oscilaciones puras y la configuración es entonces estable. La condición para esto fue $g_0 > 0$, que vemos se cumple siempre si $\partial B_0^2 / \partial x \geq 0$; esto es, si el campo no decrece hacia afuera del plasma.

Podemos tener inestabilidad entonces sólo $g_0 < 0$, que puede ocurrir si $\partial B_0^2 / \partial x < 0$. En particular, como el segundo término entre corchetes de (6.24) es definido positivo, los modos más inestables serán aquellos con $k_z \rightarrow$

0; esto es, apartamientos que no varían a lo largo de las líneas de campo magnético. La forma particular de estos modos, largos surcos paralelos al campo magnético, recuerdan el decorado de columnas griegas denominado “flute” en inglés, por lo que estos modos son conocidos con ese nombre. Para los modos flute basta que $\partial B_0^2/\partial x < 0$ para que $g_0 < 0$, con lo que (6.25) nos dice que $\text{Re}(\omega^2) < 0$, y la solución de la cuadrática es entonces en este caso ($k = k_y$)

$$2\omega^2 = -g_0^2 - \sqrt{g_0^4 + 4k_y^2 c_0^2 g_0^2},$$

que nos dice además que ω^2 es real, por lo que estos modos crecen sin oscilar (ω no tiene parte real). Si escribimos que $\omega = i\Gamma$, estos modos crecen en el tiempo como $\exp(\Gamma t)$, con lo que Γ^{-1} es el tiempo característico de crecimiento de esta inestabilidad. Tenemos entonces

$$\Gamma^2 = \frac{g_0^2}{2} \left(1 + \sqrt{1 + 4k_y^2 c_0^2 / g_0^2} \right).$$

Vemos que,

$$\frac{4k_y^2 c_0^2}{g_0^2} = 4\gamma^2 k_y^2 \left(\frac{2\mu_0 p_0}{\partial B_0^2 / \partial x|_{x=0}} \right)^2 = (2\gamma k_y L)^2,$$

donde L es la longitud típica de variación del campo, $L \equiv B_0^2 / |\partial B_0^2 / \partial x|_{x=0}$, y se usó la condición de equilibrio (6.13) para la última igualdad. De igual manera, $g_0 = c_0 / (\gamma L)$, por lo que tenemos

$$\Gamma = \frac{c_0}{\gamma L} \sqrt{\frac{1}{2} \left[1 + \sqrt{1 + (2\gamma k_y L)^2} \right]}.$$

Los modos de crecimiento más lento (menor Γ) son claramente aquellos para los que $k_y L \ll 1$, que tienen $\Gamma^{-1} = \gamma L / c_0$, por lo que el tiempo de crecimiento es el necesario para que el sonido (del plasma) recorra una distancia γL . Teniendo en cuenta que c_0 es aproximadamente la velocidad térmica de los iones, vemos entonces que son modos de crecimiento muy rápido.

6.5. Principio de energía de Bernstein

La solución de (6.11) no puede obtenerse en general, pero puede muchas veces demostrarse la estabilidad de una configuración a partir de un principio debido a Bernstein y otros (I. B. Bernstein et al, *Proc. Roy. Soc. Lond.*, **A244**, 17 (1958)).

Si multiplicamos escalarmente (6.11) por $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \partial \boldsymbol{\xi} / \partial t$, e integramos sobre todo el volumen del plasma, se obtiene

$$\int \rho_0 \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \frac{\partial \dot{\boldsymbol{\xi}}}{\partial t} d^3x = \int \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2}{\partial t} d^3x = \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x.$$

El punto importante es que el operador $\mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})$ es hermítico; esto es, para cualesquiera $\boldsymbol{\xi}$ y $\boldsymbol{\eta}$,

$$\int \boldsymbol{\eta} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\eta}) d^3x.$$

Esto nos dice que, en particular,

$$\int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x = \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) d^3x,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x &= \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{\xi}} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x + \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\dot{\boldsymbol{\xi}}) d^3x \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} [\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})] d^3x. \end{aligned}$$

Tenemos así que

$$\int \frac{1}{2} \rho_0 \frac{\partial |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2}{\partial t} d^3x = \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial t} [\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi})] d^3x.$$

Si integramos esta igualdad entre el instante inicial en que $\boldsymbol{\xi} = 0$, y un instante genérico (pequeño) posterior, es

$$\int \frac{1}{2} \rho_0 |\dot{\boldsymbol{\xi}}|^2 d^3x = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x.$$

Así, si definimos el potencial

$$W_B \equiv -\frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{F}(\boldsymbol{\xi}) d^3x,$$

vemos que la energía cinética del plasma puede ser no nula sólo si $W_B < 0$ para el campo de desplazamientos dado. Una dada distribución de equilibrio no puede generar movimiento (aumentar su energía cinética) si en todo desplazamiento pequeño posible es $W_B > 0$. La condición de equilibrio estable es entonces

$$W_B > 0, \tag{6.26}$$

para *cualquier* distribución de apartamientos $\xi(\mathbf{x})$.

Probar la hermiticidad de $\mathbf{F}$ puede hacerse por cálculo directo, pero es muy laborioso (el interesado puede consultar: B. B. Kadomtsev, *Reviews of Plasma Physics*, **Vol. 2**, Consultants Bureau, New York, 1966). Sin embargo, puede mostrarse en forma sencilla considerando que la energía total del plasma (cinética+interna+magnética) se conserva y que se escribe como

$$E = \frac{1}{2} \int \rho \left| \dot{\xi} \right|^2 d^3x + W(\xi),$$

donde $W(\xi)$ es una funcional de ξ que corresponde a las energías interna y magnética. Desarrollando hasta segundo orden es

$$E = \int \frac{1}{2} \rho_0 \left| \dot{\xi} \right|^2 d^3x + W_0 + W_1(\xi) + W_2(\xi, \xi),$$

pero, como el sistema está en equilibrio, debe ser $W_1(\xi) = 0$ para cualquier ξ . Tenemos entonces

$$\frac{dE}{dt} = \int \rho_0 \dot{\xi} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} d^3x + W_2(\dot{\xi}, \xi) + W_2(\xi, \dot{\xi}) = 0.$$

Usando (6.11) podemos entonces escribir

$$\int \dot{\xi} \cdot \mathbf{F}(\xi) d^3x = -W_2(\dot{\xi}, \xi) - W_2(\xi, \dot{\xi}).$$

Como el lado derecho de esta relación es simétrico respecto al intercambio de ξ con $\dot{\xi}$, el lado izquierdo también debe serlo, y tenemos así demostrada la hermiticidad de $\mathbf{F}$.

Una consecuencia importante de la hermiticidad de $\mathbf{F}$ es que si estudiamos modos normales en el tiempo, $\xi = \hat{\xi} \exp(i\omega t)$, la (6.11) se escribe

$$-\rho_0 \omega^2 \hat{\xi} = \mathbf{F}(\hat{\xi}),$$

que si multiplicamos por $\hat{\xi}^*$, el complejo conjugado de $\hat{\xi}$, e integramos en todo el volumen del plasma nos da

$$\omega^2 = - \frac{\int \hat{\xi}^* \mathbf{F}(\hat{\xi}) d^3x}{\int \rho_0 \hat{\xi}^* \hat{\xi} d^3x}.$$

Como, por hermiticidad,

$$\int \hat{\xi}^* \mathbf{F}(\hat{\xi}) d^3x = \int \hat{\xi} \mathbf{F}(\hat{\xi}^*) d^3x,$$

resulta inmediatamente que ω^2 es real, por lo que ω es real o imaginario puro; algo que ya vimos en el caso de modos flute, pero que resulta ser una propiedad general del equilibrio estático MHD ideal (la hermiticidad de $\mathbf{F}$ deja de ser válida si el estado base tiene movimiento; considere la demostración dada de la hermiticidad, y por qué falla en tal caso).

Para evaluar W_B conviene efectuar algunas integraciones por partes; por ejemplo,

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \delta p d^3x &= \int \nabla \cdot (\delta p \boldsymbol{\xi}) d^3x - \int \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} d^3x \\ &= \oint \delta p \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} dS - \int \delta p \nabla \cdot \boldsymbol{\xi} d^3x. \end{aligned}$$

También, usando notación indicial cartesiana y la densidad de Levi-Civita ε_{klm} ,

$$\boldsymbol{\xi} \cdot [(\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0] = \xi_k \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lij} (\partial_i \delta B_j) B_{0m},$$

con lo que

$$\begin{aligned} \int \boldsymbol{\xi} \cdot [(\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0] d^3x &= \int \partial_i (\xi_k \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lij} \delta B_j B_{0m}) d^3x \\ &\quad - \int \varepsilon_{klm} \varepsilon_{lij} \delta B_j \partial_i (\xi_k B_{0m}) d^3x \\ &= \oint [(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} dS \\ &\quad - \int [\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0)] \cdot \delta \mathbf{B} d^3x, \\ &= \oint [(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} dS - \int \delta \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B} d^3x, \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se usó que $\nabla \times (\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) = \delta \mathbf{B}$. Si usamos además la identidad vectorial

$$(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B} = (\delta \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\xi}) \mathbf{B}_0 - (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0) \boldsymbol{\xi},$$

y recordamos que la superficie de equilibrio es una superficie magnética, por lo que $\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{n} = 0$, tenemos que el término de superficie se simplifica a

$$\oint [(\boldsymbol{\xi} \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B}] \cdot \mathbf{n} dS = - \oint (\delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0) \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Para el término restante sólo usamos conmutatividad del producto mixto

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} \cdot [(\nabla \times \mathbf{B}_0) \times \delta \mathbf{B}] &= -(\nabla \times \mathbf{B}_0) \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \delta \mathbf{B}) \\ &= -\mu_0 \mathbf{j}_0 \cdot (\boldsymbol{\xi} \times \delta \mathbf{B}). \end{aligned}$$

Con todo esto, usando además la segunda de las (6.10), obtenemos

$$2W_B = \int \left\{ \gamma p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + (\xi \cdot \nabla p_0) (\nabla \cdot \xi) + \frac{|\delta \mathbf{B}|^2}{\mu_0} + \mathbf{j}_0 \cdot (\xi \times \delta \mathbf{B}) \right\} d^3x \\ + \oint \left(\delta p + \frac{1}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 \right) \xi \cdot \mathbf{n} dS. \quad (6.27)$$

Una expresión muy útil fenomenológicamente de (6.27) puede obtenerse usando identidades vectoriales, la relación de equilibrio (6.7) y las ecuaciones de Maxwell (más bastante álgebra), que resulta ser

$$2W_B = \int \left\{ \gamma p_0 (\nabla \cdot \xi)^2 + \frac{|\delta \mathbf{B}_\perp|^2}{\mu_0} + \mu_0 \left| \frac{\delta \mathbf{B}_\parallel}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_0 (\xi \cdot \nabla p_0)}{B_0^2} \right|^2 \right. \\ \left. + \frac{\mathbf{j}_0 \cdot \mathbf{B}_0}{B_0^2} (\mathbf{B}_0 \times \xi) \cdot \delta \mathbf{B} + 2 (\xi \cdot \nabla p_0) \frac{\xi \cdot \mathbf{R}_c}{R_c^2} \right\} d^3x \\ + \oint \left(\delta p + \frac{1}{\mu_0} \delta \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_0 \right) \xi \cdot \mathbf{n} dS,$$

donde $\delta \mathbf{B}_\parallel$ y $\delta \mathbf{B}_\perp$ se refieren a las componentes paralela y perpendicular a $\mathbf{B}_0$, y el radio de curvatura $\mathbf{R}_c$ de las líneas de campo de equilibrio está dado por la relación

$$\frac{\mathbf{R}_c}{R_c^2} = - \frac{(\mathbf{B}_0 \cdot \nabla) (\mathbf{B}_0 / B_0)}{B_0}.$$

Notemos que los términos del integrando de la primera línea son todos positivos, y por lo tanto estabilizantes. El primero corresponde a ondas de sonido del plasma, el segundo a ondas de Alfvén torsionales, y el tercero a ondas de Alfvén magnetosónicas. Los términos de la segunda línea son los que pueden dar lugar a inestabilidades, el primero a las tipo "kink", y el segundo a las de tipo de "intercambio".

En cuanto a los términos de superficie, pueden ser tratados en forma similar a como se trabajó en el caso de modos normales para una interfase plasma-vacío. Aquí, sin embargo, consideraremos sólo el caso simple de perturbaciones tales que $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$ en la superficie (plasma limitado por paredes rígidas o perturbaciones sólo internas), con lo que los términos de superficie se anulan.

6.5.1. Estabilidad del z-pinch

Como ejemplo importante de aplicación del principio de Bernstein consideremos la estabilidad de un z -pinch difuso (el plasma se extiende indefinidamente), por lo que ignoramos los términos de superficie en (6.27). Tenemos

la configuración de equilibrio dada por $p_0(r)$ y $\mathbf{B}_0 = B_0(r) \mathbf{e}_\theta$, que satisfacen

$$\frac{dp_0}{dr} = -\frac{B_0}{\mu_0 r} \frac{d}{dr} (r B_0). \quad (6.28)$$

Consideremos la estabilidad de esta configuración frente a apartamientos independientes de θ ,

$$\boldsymbol{\xi} = \xi_r(r, z) \mathbf{e}_r + \xi_z(r, z) \mathbf{e}_z.$$

Calculamos entonces fácilmente

$$\begin{aligned} \delta p &= -\xi_r \frac{dp_0}{dr} - \gamma p_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}, \\ \delta \mathbf{B} &= -\left[B_0 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (B_0 \xi_r) \right] \mathbf{e}_\theta, \\ \boldsymbol{\xi} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}_0) &= -\xi_r \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_0) \mathbf{e}_\theta = \frac{\mu_0 \xi_r}{B_0} \frac{dp_0}{dr} \mathbf{e}_\theta, \end{aligned}$$

donde

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z}.$$

Usando esta última para reemplazar $\partial \xi_z / \partial z$ podemos escribir

$$\delta \mathbf{B} = -\left[B_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} + \xi_r \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \right] \mathbf{e}_\theta,$$

con lo que, de (6.27),

$$\begin{aligned} 2W_B &= \int \left\{ \left(\xi_r \frac{dp_0}{dr} + \gamma p_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} \right) \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\mu_0} \left[B_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} + \xi_r \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \right]^2 + \right. \\ &\quad \left. \frac{\xi_r}{B_0} \frac{dp_0}{dr} \left[B_0 \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi} + \xi_r \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \right] \right\} d^3x. \quad (6.29) \end{aligned}$$

Dado que ξ_r y ξ_z son independientes, podemos tomar como nuevas variables a ξ_r y $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{\xi}$, en las que el integrando de (6.29) es claramente una función cuadrática. Sabemos que la expresión cuadrática genérica

$$ax^2 + by^2 + 2cxy$$

es positiva para todo (x, y) sólo si $a > 0$, $b > 0$, y $c^2 < ab$. De esta manera, (6.29) será definida positiva (y por lo tanto el equilibrio estable) si se satisface

$$\gamma p_0 + B_0^2 / \mu_0 > 0,$$

que obviamente vale siempre, y si

$$\left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \left[\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) + \frac{1}{B_0} \frac{dp_0}{dr} \right] > 0,$$

junto con

$$\begin{aligned} \left[\frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) + \frac{dp_0}{dr} \right]^2 &> \left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{\mu_0} \right) \frac{1}{B_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \\ &\times \left[\frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) + \frac{dp_0}{dr} \right]. \end{aligned}$$

Usando la relación de equilibrio (6.28) es

$$\frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) + \frac{dp_0}{dr} = -\frac{2B_0^2}{\mu_0 r},$$

que es definido negativo, con lo que las condiciones de equilibrio son

$$\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} < 0,$$

y

$$\left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{\mu_0} \right) \frac{1}{B_0} \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) < -\frac{2B_0^2}{\mu_0 r}.$$

Usando nuevamente la relación (6.28) se deja como ejercicio mostrar que estas relaciones se escriben

$$\begin{aligned} -\frac{d \ln p_0}{d \ln r} &< \frac{4}{\beta}, \\ -\frac{d \ln p_0}{d \ln r} &< \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta}, \end{aligned} \tag{6.30}$$

donde

$$\beta = \frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2}, \tag{6.31}$$

de las cuales la más restrictiva es claramente la segunda, que es por lo tanto la condición buscada.

Si consideramos ahora perturbaciones con dependencia en θ , podemos descomponer éstas en modos de Fourier de la forma

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\xi} &= \xi_r(r, z) \cos(m\theta) \mathbf{e}_r + \xi_\theta(r, z) \sin(m\theta) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + \xi_z(r, z) \cos(m\theta) \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

de los que $m = 0$ corresponde a las perturbaciones vistas antes. Dejamos como ejercicio calcular que resulta

$$\begin{aligned} |\delta \mathbf{B}|^2 &= \frac{m^2 B_0^2}{r^2} \sin^2(m\theta) (\xi_r^2 + \xi_z^2) \\ &+ \left[B_0 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (B_0 \xi_r) \right]^2 \cos^2(m\theta) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{B} \cdot [\boldsymbol{\xi} \times (\nabla \times \mathbf{B}_0)] &= -\frac{m B_0}{r^2} \frac{d}{dr} (r B_0) \sin^2(m\theta) \xi_r \xi_\theta \\ &+ \frac{\xi_r}{r} \frac{d}{dr} (r B_0) \left[B_0 \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} (B_0 \xi_r) \right] \cos^2(m\theta). \end{aligned}$$

Al integrar estas expresiones en θ , los $\sin^2(m\theta)$ y $\cos^2(m\theta)$ dan simplemente factores $1/2$. Por otro lado, consideraremos modos incompresibles, que tienden a ser los más inestables, ya que para ellos está ausente el término estabilizante $\gamma p_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\xi})^2$ en W_B . De esta manera, como

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\xi} = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} + \frac{m}{r} \xi_\theta \right] \cos(m\theta) = 0,$$

podemos elegir para todo $m \neq 0$

$$\frac{m}{r} \xi_\theta = - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \xi_r) + \frac{\partial \xi_z}{\partial z} \right] \equiv -\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp.$$

Usando esta expresión de ξ_θ , y la definición de $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$ para reemplazar $\partial \xi_z / \partial z$, podemos escribir, como hicimos antes,

$$\begin{aligned} 4\mu_0 W_B &= \int \left\{ \frac{m^2 B_0^2}{r^2} (\xi_r^2 + \xi_z^2) + \left[B_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \xi_r \right]^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_0) \left[2B_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp + \left(\frac{dB_0}{dr} - \frac{B_0}{r} \right) \xi_r \right] \xi_r \right\} r dr dz. \end{aligned}$$

Notando que el término proporcional a ξ_z^2 es definido positivo y, por lo tanto, estabilizante, podemos estudiar los modos más fácilmente inestables como aquellos con $\xi_z \rightarrow 0$, aún con $\partial \xi_z / \partial z$ finito (esto equivale a $k_z \rightarrow \infty$). De esta manera el integrando de W_B resulta nuevamente una función cuadrática en las variables ξ_r y $\nabla \cdot \boldsymbol{\xi}_\perp$. Procediendo como antes, queda como ejercicio demostrar que la condición de estabilidad para modos con $m \neq 0$ está dada por (β es el usual (6.31))

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln r} < \frac{m^2}{\beta}. \quad (6.32)$$

Si comparamos (6.30) y (6.32) y notamos que

$$\frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta} < \frac{m^2}{\beta}$$

para todos los modos $m \geq 2$, vemos que si se satisface la condición de estabilidad para modos $m = 0$, entonces se satisface para los modos $m \geq 2$. Cuando $m = 1$, sin embargo, la desigualdad no se cumple para $\beta > 2/(3\gamma)$, en cuyo caso la condición de estabilidad puede satisfacerse para $m = 0$, pero no para $m = 1$.

Notemos que si la condición de estabilidad no se satisface en alguna región del plasma, siempre podemos elegir una perturbación apropiada que se anule en las demás regiones y sólo contribuya entonces con valores negativos a W_B , con lo que se tiene entonces una fuente de energía para generar movimiento, y la configuración de equilibrio es inestable (en la descripción de modos temporales es $\omega^2 < 0$).

La inestabilidad resultante cuando no se satisface (6.30) es conocida como inestabilidad de salchicha o de garganta (sausage o necking en inglés), ya que corresponde a una perturbación con $m = 0$ y tiene por lo tanto forma de estrangulamiento axisimétrico del plasma. En la zona del estrangulamiento la intensidad del campo magnético se incrementa (la misma corriente axial pasa por una sección de menor radio), y la presión magnética aumentada tiende a estrangular aún más el plasma.

Si el z -pinch es estable para modos $m = 0$ (se satisface (6.30)) vimos que puede ser inestable ante modos $m = 1$ si $\beta > 2/(3\gamma)$. Las perturbaciones en esta inestabilidad son de la forma $\xi_r(r, z) \cos \theta$, que dan a la columna de plasma la forma de comba (kink en inglés). En el lado de la comba cóncavo hacia afuera del plasma las líneas de campo magnético se acercan, mientras que en el lado convexo se separan. Resulta así un aumento de la presión magnética en la zona cóncava y una disminución en la convexa que tienden a aumentar la deformación.

Estos tipos de inestabilidades son denominados electromagnéticos y la fuente de energía para el movimiento es el campo magnético. El plasma tiende a estados de energía magnética menor.

6.6. Inestabilidad de intercambio

Si consideramos un z -pinch de bajo β ($\beta \ll 1$) vemos que los modos con $m \neq 0$ son estables, mientras que la condición de estabilidad de modos $m = 0$ se reduce a

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln r} < 2\gamma$$

que es entonces la única condición de estabilidad del z -pinch. En realidad ésta es la particularización a z -pinchs de una condición más general, aplicable cuando $\beta \ll 1$. Cuando el β es pequeño, el plasma está fuertemente confinado por el campo magnético y su única posibilidad de movimiento es en formas que no afecten este campo (comprimir o curvar líneas de campo requiere entrega de energía por parte del plasma). Por otro lado, la condición del congelamiento de líneas implica limitaciones a este tipo de movimiento.

Consideremos un tubo de sección muy pequeña δs cuyas paredes estén formadas por líneas de campo. El hecho que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, junto a que $\mathbf{B}$ es paralelo a las paredes del tubo nos dice que el flujo magnético $\phi = B\delta s$ a través de cualquier sección del tubo es el mismo. Como este tubo está formado por un plasma de conductividad muy alta sabemos también que el plasma contenido en el tubo se desplaza con él y, más aún, el flujo se conserva en el desplazamiento. La energía magnética contenida en el tubo es (l es la longitud a lo largo del tubo)

$$U_M = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 dV = \frac{1}{2\mu_0} \int B^2 \delta s dl,$$

que, usando que $B = \phi/\delta s$, con $\phi = cte$, podemos escribir como

$$U_M = \frac{\phi^2}{2\mu_0} \int \frac{dl}{\delta s},$$

donde al valor de la integral sólo contribuye la geometría del tubo.

Supongamos ahora que intercambiamos de lugar dos tubos entre sí, que designamos por 1 y 2. Como cada tubo conserva su ϕ , pero el lugar geométrico de los tubos se intercambia, el cambio de energía magnética resultante será

$$2\mu_0 \Delta U_M = \phi_1^2 \int_2 \frac{dl}{\delta s} + \phi_2^2 \int_1 \frac{dl}{\delta s} - \left(\phi_1^2 \int_1 \frac{dl}{\delta s} + \phi_2^2 \int_2 \frac{dl}{\delta s} \right),$$

donde indicamos en la integral sobre qué lugar geométrico se efectúa cada integral. Es claro entonces que el intercambio de dos tubos genéricos no da lugar a variaciones de energía magnética sólo si sus flujos magnéticos son iguales, $\phi_1 = \phi_2$. Con esta condición, veamos entonces en cuánto varía la energía interna del plasma al realizar el intercambio. En la aproximación de gas ideal, la energía interna del tubo es

$$\begin{aligned} U_I &= \frac{1}{\gamma - 1} \int p dV = \frac{p}{\gamma - 1} \int \delta s dl \\ &= \frac{pV}{\gamma - 1}, \end{aligned}$$

donde, como p es la presión de equilibrio, debe ser constante a lo largo de las líneas de campo y, por lo tanto, a lo largo del tubo. Como consideramos procesos barotrópicos $pV^\gamma = cte$, al cambiar el volumen del tubo la presión cambia a

$$p' = p \left(\frac{V}{V'} \right)^\gamma,$$

con lo que el cambio de energía interna debido al intercambio de tubos es

$$(\gamma - 1) \Delta U_I = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma V_2 + p_2 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma V_1 - (p_1 V_1 + p_2 V_2).$$

El punto es que si $\Delta U_I < 0$, el plasma puede acceder, a través del intercambio, a un estado de energía menor (recordemos que la energía magnética no varía), por lo que si el intercambio es posible (no está impedido por condiciones de contorno o alguna ley de conservación adicional), el plasma tenderá a este estado y el equilibrio no es estable. La condición de estabilidad es entonces $\Delta U_I > 0$, análoga al principio de energía de Bernstein para este caso especial de $\Delta U_M = 0$.

Investigamos entonces el efecto de intercambiar dos tubos muy cercanos escribiendo

$$\begin{aligned} p_2 &= p_1 + \delta p \equiv p + \delta p, \\ V_2 &= V_1 + \delta V \equiv V + \delta V. \end{aligned}$$

Tenemos así

$$\begin{aligned} \left(\frac{V + \delta V}{V} \right)^\gamma &\simeq 1 + \gamma \frac{\delta V}{V} + \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) \left(\frac{\delta V}{V} \right)^2, \\ \left(\frac{V}{V + \delta V} \right)^\gamma &\simeq 1 - \gamma \frac{\delta V}{V} + \frac{1}{2} \gamma (\gamma + 1) \left(\frac{\delta V}{V} \right)^2, \end{aligned}$$

con lo que resulta, al orden más bajo no nulo,

$$\Delta U_I = \gamma p \frac{(\delta V)^2}{V} + \delta p \delta V. \quad (6.33)$$

Como $\gamma p (\delta V)^2 / V > 0$, una condición suficiente para la estabilidad es

$$\delta p \delta V > 0.$$

Como sabemos además que intercambiamos tubos con igual flujo magnético ϕ , podemos escribir

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_1 \delta s dl = \phi \int_1 \frac{dl}{B}, \\ V_2 &= \phi \int_2 \frac{dl}{B}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\delta V = \phi \left(\int_2 \frac{dl}{B} - \int_1 \frac{dl}{B} \right) = \phi \delta \int \frac{dl}{B}.$$

La condición de estabilidad es entonces (ϕ fue definido como positivo)

$$\delta p \delta \int \frac{dl}{B} > 0.$$

Como la presión disminuye hacia afuera del plasma en un confinamiento típico, debemos tener que al movernos hacia afuera del plasma $\delta \int dl/B < 0$ para estabilidad, condición que equivale a que las líneas de campo sean convexas hacia el plasma.

Para el caso habitual que las líneas de campo sean cerradas podemos mejorar el criterio considerando también el término $\gamma p (\delta V)^2 / V$ en (6.33). En efecto, como los tubos finos considerados son ahora cerrados y finitos, tenemos el valor finito del volumen de cada uno de ellos

$$V = \phi \oint \frac{dl}{B},$$

donde la integral es ahora sobre la curva cerrada. Por otro lado, los tubos están claramente apoyados sobre superficies magnéticas, que son también superficies de presión constante (estado de equilibrio), por lo que en general podemos escribir a la presión como una función de $\Sigma \equiv \oint dl/B$, variable que será en general distinta sobre cada superficie magnética. De esta manera, el δp entre dos superficies magnéticas cercanas se puede escribir (volvemos a poner los subíndices 0 del equilibrio)

$$\delta p = \frac{dp_0}{d\Sigma} \delta \Sigma.$$

Por otro lado, el δV lo escribimos como $\delta V = \phi \delta \Sigma$, o también

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\delta \Sigma}{\Sigma},$$

con lo que (6.33) resulta

$$\begin{aligned} \Delta U_I &= \gamma p_0 \frac{\delta \Sigma \delta V}{\Sigma} + \frac{dp_0}{d\Sigma} \delta \Sigma \delta V \\ &= \left(\gamma p_0 + \Sigma \frac{dp_0}{d\Sigma} \right) \frac{\delta \Sigma \delta V}{\Sigma}, \end{aligned}$$

como Σ es positiva, también es $\delta \Sigma \delta V > 0$, con lo que tendremos estabilidad para

$$\gamma p_0 + \Sigma \frac{dp_0}{d\Sigma} > 0. \quad (6.34)$$

Por ejemplo, en el caso del z -pinch con corriente concentrada es

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

con lo que

$$\Sigma = \oint \frac{dl}{B_0} = \oint \frac{r d\theta}{B_0} = \frac{4\pi^2 r^2}{\mu_0 I},$$

y

$$\Sigma \frac{dp_0}{d\Sigma} = \Sigma \frac{dp_0/dr}{d\Sigma/dr} = \frac{r}{2} \frac{dp_0}{dr}.$$

La condición de estabilidad es entonces, de (6.34), el ya conocido

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln r} < 2\gamma.$$

Más generalmente, para una distribución de corriente genérica del z -pinch se tiene

$$\Sigma = \oint \frac{dl}{B_0} = \oint \frac{r d\theta}{B_0} = \frac{2\pi r}{B_0(r)},$$

con lo que

$$\Sigma \frac{dp_0}{d\Sigma} = \Sigma \frac{dp_0/dr}{d\Sigma/dr} = \frac{rp'_0}{1 - rB'_0/B_0},$$

donde la prima significa derivada respecto de r . Con esto, usando además la relación de equilibrio del z -pinch (6.28), la condición (6.34) se escribe

$$\frac{4\gamma + (2 + \gamma\beta) rp'_0/p_0}{4 + \beta rp'_0/p_0} > 0,$$

que es inmediato comprobar conduce a la condición (6.30):

$$-\frac{d \ln p_0}{d \ln r} < \frac{4\gamma}{2 + \gamma\beta}.$$

Tengamos sin embargo cuidado con la interpretación de esta desigualdad, que fue deducida con la condición que la corriente no es afectada por el intercambio de modos (el campo magnético permaneció fijo). Las inestabilidades de salchicha y de comba del z -pinch son inestabilidades electromagnéticas, en las que el plasma tiende a un estado de energía *magnética* inferior a la de equilibrio. Los modos que consideramos en el intercambio, largos tubos en la dirección local del campo magnético, no son otros que los modos flute, ya conocidos, cuyas inestabilidades son generadas por la tendencia a expandirse del plasma hacia estados de energía *interna* inferior; la fuente que alimenta la inestabilidad es entonces la energía interna en este caso.

6.7. Inestabilidades tipo “ballooning”

Vimos que los modos flute son estables en las zonas con curvatura de líneas de campo convexas hacia el plasma. En general, una misma línea de campo tendrá regiones con curvatura favorable (para la estabilidad) y con curvatura desfavorable. Es posible entonces que las zonas con curvatura desfavorable evolucionen hacia estados de menor energía interna, lo cual requiere necesariamente que la línea se doble, ya que en la zona favorable no evoluciona. El doblar la línea de campo requiere utilizar energía, por lo que si la energía interna disponible no es suficiente la inestabilidad no se desarrollará. En caso que la energía sea suficiente tendremos una inestabilidad que se denomina ballooning, por la analogía con el inflarse como un globo del sector debilitado de una cámara de neumático.

Para hacer algunas estimaciones comparemos la energía interna disponible (por unidad de volumen), en la zona desfavorable, ante un apartamiento ξ de un modo flute. De (6.33) y (6.10)

$$\frac{\Delta U_I}{V} \simeq \frac{\delta p \delta V}{V} \simeq -\xi \cdot \nabla p_0 (\xi \cdot \nabla \ln V) \sim -\frac{\xi^2 |p'_0|}{D},$$

donde D es la longitud característica de variación del volumen $V = \oint \phi dl / B$ del tubo.

Por otro lado, al desplazar en ξ una longitud L de una línea de campo, en forma perpendicular a ella, generamos una componente de campo adicional $\delta \mathbf{B}$, perpendicular al campo $\mathbf{B}_0$ original, que podemos estimar de la condición $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ como

$$\frac{\delta B}{\xi} \sim \frac{B_0}{L}.$$

La energía (por unidad de volumen) que necesitamos para este desplazamiento es entonces la energía magnética adicional

$$\frac{\Delta U_M}{V} \simeq \frac{(\delta B)^2}{2\mu_0} \sim \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{\xi^2}{L^2}.$$

La condición para el desarrollo de la inestabilidad ballooning, $|\Delta U_I| > \Delta U_M$, es entonces

$$|p'_0| > \frac{B_0^2}{2\mu_0} \frac{D}{L^2}.$$

Un caso de interés práctico es el del tokamak, en el que las líneas de campo tienen forma helicoidal, arrolladas alrededor de superficies toroidales. Las regiones sobre el radio mayor interno del toro tienen curvatura favorable, mientras que para aquellas sobre el radio mayor externo la curvatura es

desfavorable. Cada línea recorre q veces la circunferencia mayor del toro (de radio medio R) por cada recorrido completo a lo largo de la circunferencia menor (de radio a). Tenemos así que la longitud de la zona desfavorable de la línea es del orden de $L \sim qR$. Por otro lado, es claro que podemos estimar $|p'_0| \sim p_0/a$ y $D \sim R$. Con esto, la inestabilidad ballooning requiere

$$\frac{2\mu_0 p_0}{B_0^2} = \beta \gtrsim \frac{a}{q^2 R},$$

que es una estimación del valor crítico de β por encima del cual se tiene inestabilidad ballooning. Por la condición de equilibrio estable frente a modos kink, en un tokamak es siempre $q > 1$ (típicamente cercano a 1 en el centro del plasma y creciente hacia afuera, hasta valores 3 – 4). En la práctica, los tokamaks son estables ante inestabilidades tipo ballooning por debajo de $\beta \simeq 3 - 6 \%$.

6.8. Inestabilidades resistivas (modos “tearing”)

Un equilibrio que es estable desde el punto de vista de la MHD ideal puede ser inestable si se incluye el efecto de la resistividad. La razón es que el congelamiento estricto de las líneas del campo magnético al plasma es un condicionamiento muy fuerte, que impide a la configuración de equilibrio alcanzar ciertas configuraciones de menor energía, que serían accesibles si se permitiese una pequeña difusividad. Esta difusividad permite que las líneas cambien su topología a través del fenómeno de *reconexión magnética*, hacia un estado de energía magnética inferior a la del equilibrio.

Como en la práctica la resistividad del plasma es muy pequeña, los efectos difusivos sólo pueden ser importantes en zonas con fuertes gradientes del campo magnético, que ocurre donde hay alta concentración de la densidad de corriente $\mathbf{j}$. Imaginemos el caso límite de corriente uniforme fluyendo en una capa delgada plana muy extensa. Podemos pensar esta distribución de corriente como compuesta por hilos muy finos paralelos y muy juntos, llevando corriente en el mismo sentido. Sabemos que estos hilos se atraen unos a otros y que pueden estar en equilibrio sólo si la fuerza neta sobre cada uno es nula. Si perturbamos la distribución de equilibrio (por ejemplo apartando algunos hilos y acercando otros) aparecerá una tendencia a juntarse de algunos grupos de hilos de corriente. Esta nueva distribución da lugar a líneas de campo cerradas alrededor de los agrupamientos de corriente, lo que no existía en el equilibrio. En otras palabras, la topología de las líneas cambió; éstas se

“rompieron” y dieron lugar a líneas cerradas separadas de las originales. Esta imagen explica la denominación “tearing” de esta inestabilidad. (También puede pensarse en el desgarramiento en jirones de la hoja de corriente).

Para estudiar los aspectos de la inestabilidad tearing consideremos una distribución bidimensional de campo magnético de equilibrio de la forma $\mathbf{B}_0 = B_0(y) \mathbf{e}_x$, con

$$B_0(y) = B_* \tanh\left(\frac{y}{a}\right). \quad (6.35)$$

Así, a es la longitud característica de variación de $\mathbf{B}_0$, y la distribución de corriente que da lugar a este campo es, por la ley de Ampère, $\mathbf{j}_0 = j_0(y) \mathbf{e}_z$, con

$$j_0(y) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{dB_0}{dy} = -\frac{B_*}{\mu_0 a \cosh^2(y/a)}, \quad (6.36)$$

que muestra una distribución de corriente concentrada mayormente en una capa de semiancho a alrededor del plano (x, z) .

La idea es ahora perturbar esta configuración y estudiar cómo evolucionan las distintas magnitudes. Como nos interesa estudiar la inestabilidad de configuraciones que son muy estables de acuerdo a la MHD ideal, anticipamos movimientos del plasma lentos comparados con la velocidad de Alfvén, que es característica de las evoluciones MHD, con lo que podemos suponer la evolución incompresible. Por otro lado, consideramos perturbaciones en el plano donde está contenido el campo $\mathbf{B}_0$, el plano (x, y) , con todo lo cual podemos usar la ecuaciones de la MHD bidimensional e incompresible (ecuaciones (3.36)-(3.38)). Escribimos así que

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \nabla \xi \times \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 + \nabla \psi \times \mathbf{e}_z, \end{aligned}$$

con ξ y ψ magnitudes pequeñas. Tenemos así que

$$j = j_0 - \frac{1}{\mu_0} \nabla^2 \psi.$$

Linealizando en las perturbaciones las ecuaciones (3.36) y (3.37) obtenemos fácilmente

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \xi = \frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{dj_0}{dy} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6.37)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = B_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \psi. \quad (6.38)$$

Como la resistividad η es muy pequeña, sus efectos estarán restringidos a una capa muy estrecha, de semiancho δ , alrededor del plano $y = 0$, donde

la corriente es máxima. De esta manera, podemos separar el problema en el correspondiente al interior de la capa, donde los efectos resistivos son importantes, y el exterior, donde puede despreciarse el término difusivo.

6.8.1. Problema interno

Como el estado de equilibrio depende sólo de y , estudiamos perturbaciones de la forma $\exp(ikx)$; por otro lado, anticipando una inestabilidad, proponemos una evolución temporal de la forma $\exp(\gamma t)$. Además, con el proviso $k\delta \ll 1$, las variaciones en la dirección y son mucho más importantes que en la dirección x , por lo que los laplacianos pueden aproximarse por sólo derivadas respecto de y . Finalmente, dentro de la capa resistiva el campo magnético de equilibrio puede aproximarse por (la prima indica derivada respecto de y)

$$B_0(y) = B'_0(0)y,$$

y, por lo tanto,

$$j'_0 = 0.$$

Con todo esto escribimos

$$\xi = \xi(y) \exp(\gamma t + ikx),$$

con una expresión análoga para ψ , y las (6.37) y (6.38) se reducen a

$$\gamma \rho \xi'' = ik y \frac{B'_0(0)}{\mu_0} \psi'', \quad (6.39)$$

$$\gamma \psi = ik y B'_0(0) \xi + \frac{\eta}{\mu_0} \psi''. \quad (6.40)$$

Dentro de la capa resistiva ψ difunde eficientemente, por lo que anticipamos un valor prácticamente constante, y podemos escribir así $\psi \simeq \psi(0)$. Sin embargo, su derivada segunda debe ser grande para que el término difusivo sea importante. Notando que por la simetría del problema $\psi(y)$ es una función par, podemos aproximar

$$\psi''(0) \simeq \frac{\psi'(\delta) - \psi'(-\delta)}{2\delta} = \frac{\psi'(\delta)}{\delta}.$$

El valor $\psi'(\delta)$ de la derivada de ψ en el borde de la capa resistiva debe calcularse resolviendo el problema externo. Por ahora conviene expresarlo a través de la magnitud (con unidades de inversa de longitud, y con un factor $1/2$ agregado por convención)

$$\frac{K}{2} \equiv \frac{\psi'(\delta)}{\psi(0)} \simeq \frac{\psi'(\delta)}{\psi(\delta)} = \frac{\psi'_{ext}}{\psi_{ext}} \Big|_{y=0},$$

donde ψ_{ext} es la solución del problema externo (para este problema el espesor de la capa puede tomarse igual a cero), y en términos de la cual es

$$\psi''(0) = \frac{K}{2\delta} \psi(0).$$

Con esto, evaluando (6.40) en $y = 0$ tenemos

$$\gamma \psi(0) = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{K}{2\delta} \psi(0),$$

lo que nos dice que tendremos inestabilidad ($\gamma > 0$) sólo si $K > 0$. Por otro lado, al evaluar (6.40) en $y = \delta$ debemos tener en cuenta que todos los términos son del mismo orden:

$$\gamma \psi(0) \sim ik\delta B'_0(0) \xi(\delta) \sim \frac{\eta}{\mu_0} \psi''(\delta),$$

que nos dice que $\psi''(\delta) \sim \psi''(0)$, y que

$$\xi(\delta) \simeq -\frac{i\gamma \psi(0)}{k\delta B'_0(0)}$$

De estas ecuaciones obtenemos entonces

$$\gamma = \frac{\eta}{\mu_0} \frac{K}{2\delta}, \quad (6.41)$$

$$\xi(\delta) \simeq -\frac{i\eta K}{2\mu_0 k \delta^2 B'_0(0)}. \quad (6.42)$$

Evaluando ahora (6.39) en $y = \delta$ tenemos

$$-\gamma \rho \frac{\xi(\delta)}{\delta^2} \simeq ik\delta \frac{B'_0(0)}{\mu_0} \frac{K}{2\delta} \psi(0),$$

donde hemos aproximado $\psi''(\delta) \simeq \psi''(0)$, y $\xi''(\delta) \simeq -\xi(\delta)/\delta^2$ (el signo menos es impuesto porque debe ser $\delta > 0$). Usando (6.41) y (6.42) en esta ecuación obtenemos finalmente

$$\gamma = \frac{\eta^{3/5} K^{4/5} [kB'_0(0)]^{2/5}}{(2\mu_0)^{4/5} \rho^{1/5}}, \quad (6.43)$$

$$\delta = \frac{\eta^{2/5} K^{1/5} \rho^{1/5}}{(2\mu_0)^{1/5} [kB'_0(0)]^{2/5}}. \quad (6.44)$$

6.8.2. Problema externo

Para evaluar el problema externo conviene cuantificar mejor el tiempo característico de la inestabilidad tearing, γ^{-1} . Notemos para esto que el tiempo característico de difusión es

$$\tau_\eta = \frac{\delta^2}{\eta/\mu_0},$$

mientras que el tiempo característico de evolución MHD es

$$\tau_A = \frac{1}{kv_A} = \frac{1}{k\sqrt{B_*^2/(2\mu_0\rho)}}.$$

De la (6.44) vemos que $\delta^2/\eta \sim \eta^{-1/5}$, por lo que en el límite de muy baja resistividad el τ_η es muy largo, y consideramos entonces $\tau_\eta \gg \tau_A$.

Si escribimos que $B'_0(0) \simeq B_*/a$, podemos expresar (6.43) como

$$\gamma = \tau_\eta^{-3/5} \tau_A^{-2/5} (Ka)^{4/5} (\delta/a)^{6/5}.$$

Análogamente, podemos expresar (6.44) como

$$\delta/a = Ka (\tau_A/\tau_\eta)^2, \quad (6.45)$$

con lo que tenemos finalmente

$$\gamma^{-1} = (Ka)^{-2} (\tau_\eta/\tau_A)^3 \tau_A \gg \tau_A, \quad (6.46)$$

para $Ka \sim 1$. Con estos tiempos largos de evolución, la inercia es despreciable en el problema externo, por lo que podemos escribir (6.37) como

$$\frac{B_0}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi_{ext} + j'_0 \frac{\partial \psi_{ext}}{\partial x} = 0.$$

Haciendo entonces $\psi_{ext}(x, y) = \psi_{ext}(y) \exp(ikx)$, obtenemos la ecuación

$$\psi_{ext}'' - \left(k^2 - \frac{\mu_0 j'_0}{B_0} \right) \psi_{ext} = 0.$$

Con las expresiones (6.35) y (6.36) esta ecuación se escribe

$$\psi_{ext}'' - \left(k^2 - \frac{2}{a^2 \cosh^2(y/a)} \right) \psi_{ext} = 0,$$

que tiene la solución analítica (con la condición $\psi_{ext}(|y| \rightarrow \infty) = 0$)

$$\psi_{ext} = C \exp(-k|y|) \left[1 + \frac{\tanh(y/a)}{ka} \right],$$

con C una constante arbitraria.

Podemos ahora evaluar K

$$K = \frac{2\psi'_{ext}}{\psi_{ext}} \Big|_{y=0} = \frac{2}{a} \left(\frac{1}{ka} - ka \right).$$

Recordemos que la inestabilidad ($\gamma > 0$) requiere $K > 0$, lo que vemos que ocurre para $ka < 1$; esto es, para longitudes de onda mayores que $2\pi a$.

Notemos que el problema interno es general ya que no depende de la forma precisa del equilibrio (que entra en el problema sólo a través de $B'_0(0)$). Aunque la solución obtenida aquí es aproximada, la solución numérica rigurosa proporciona un valor de γ que difiere sólo en un factor 0,55 de la expresión (6.43). Por otro lado, el problema externo depende del equilibrio estudiado, pero el resultado obtenido de $K \sim (ka^2)^{-1}$ para pequeños k es válido en perfiles de corriente bastante genéricos. Notemos finalmente que la solución obtenida deja de ser válida cuando $\tau_A \lesssim \tau_\eta$; esto es, por (6.45), cuando $K \gtrsim \delta/a^2$, o sea, $k \lesssim \delta^{-1}$.

Para los modos de onda largos tenemos entonces que la tasa de crecimiento de la inestabilidad es

$$\gamma \simeq \frac{\eta^{3/5} B'_0(0)^{2/5}}{k^{2/5} (a^2 \mu_0)^{4/5} \rho^{1/5}} \sim \lambda^{2/5}.$$

6.9. Modos tearing en tokamaks

Los modos tearing tienen importancia fundamental en tokamaks. Las complicaciones de la geometría toroidal pueden aliviarse usando la aproximación cilíndrica del toro, que es convertido en un cilindro de radio a (el radio menor del toro, al que le corresponde la variable angular θ) y longitud $L = 2\pi R$, con R el radio mayor del toro (con variable angular ϕ). La tridimensionalidad de los modos se reduce si se analizan modos helicoidales, en los que una magnitud perturbada genérica se escribe como

$$\alpha(r, \theta, \phi) = \alpha(r) \exp[i(m\theta - n\phi)],$$

con n y m enteros, como corresponde por condiciones de periodicidad. La coordenada axial cilíndrica z se corresponde con el ángulo ϕ del toro como $z = R\phi$, de manera que podemos tratar los modos helicoidales en geometría cilíndrica definiendo la variable angular helicoidal

$$\lambda = \theta - \frac{n}{mR} z, \quad (6.47)$$

con lo que las variables perturbadas tiene la dependencia

$$\alpha(r) \exp(im\lambda).$$

El campo magnético base es de la forma

$$\mathbf{B}_0 = B_{0\theta}(r) \mathbf{e}_\theta + B_{0z}(r) \mathbf{e}_z,$$

y las líneas de campo están dadas por

$$\frac{rd\theta}{B_{0\theta}(r)} = \frac{dz}{B_{0z}(r)} = \frac{Rd\phi}{B_{0z}(r)}.$$

Con esto, usando el denominado factor de seguridad correspondiente a la superficie magnética de radio r

$$q(r) = \frac{d\phi}{d\theta},$$

se tiene la relación

$$B_{0\theta}(r) - \frac{r}{Rq(r)} B_{0z}(r) = 0. \quad (6.48)$$

De la definición (6.47) de λ el versor correspondiente a la dirección de variación de esta coordenada es

$$\mathbf{e}_\lambda = \frac{\nabla\lambda}{|\nabla\lambda|} = \frac{\frac{1}{r}\mathbf{e}_\theta - \frac{n}{mR}\mathbf{e}_z}{\sqrt{\frac{1}{r^2} + \left(\frac{n}{mR}\right)^2}} = \mathbf{e}_\theta - \frac{nr}{mR}\mathbf{e}_z, \quad (6.49)$$

donde en la última igualdad se usó el ordenamiento correspondiente a tokamaks: $r \ll R$.

Notemos que la hélice sobre la superficie $r = cte$ está dada por la relación $\lambda = cte$, lo que significa que a lo largo de la hélice es $d\theta = ndz/(mR)$ y el correspondiente elemento de línea es

$$d\mathbf{l} = rd\theta\mathbf{e}_\theta + dz\mathbf{e}_z = \left(\frac{nr}{mR}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z\right) dz, \quad (6.50)$$

con lo que el versor tangente a la hélice es

$$\mathbf{e}_t = \frac{d\mathbf{l}}{|d\mathbf{l}|} = \frac{\frac{nr}{mR}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z}{\sqrt{1 + \left(\frac{nr}{mR}\right)^2}} = \frac{nr}{mR}\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_z,$$

donde se usó nuevamente la condición $r \ll R$ (notemos que se cumple $\mathbf{e}_t \cdot \mathbf{e}_\lambda = 0$).

Con estos preliminares, la componente de campo base helicoidal

$$B_{0\lambda} = \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{e}_\lambda = B_{0\theta}(r) - \frac{nr}{mR} B_{0z}(r)$$

se anula, de acuerdo a (6.48), en las superficies magnéticas "singulares" que cumplen

$$q(r) = \frac{m}{n},$$

con lo que de un lado y otro de estas superficies puede existir componente de campo magnético con orientaciones opuestas y desarrollarse un modo tearing.

De la condición de divergencia nula del campo magnético es

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial \lambda} - \frac{n}{mR} \frac{\partial B_z}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

donde para la última igualdad se usó la definición (6.47), considerando que el campo es función de las variables r y λ solamente. De esta manera, en términos de la componente helicoidal

$$B_\lambda = B_\theta - \frac{nr}{mR} B_z,$$

tenemos

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\lambda}{\partial \lambda} = 0,$$

que nos permite definir una función $\psi(r, \lambda)$ tal que

$$B_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \quad (6.51a)$$

$$B_\lambda = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (6.51b)$$

Por otro lado, notemos que el campo magnético se deriva de un potencial vector: $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, con componentes

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \lambda} + \frac{n}{mR} \frac{\partial A_\theta}{\partial \lambda}, \\ B_\theta &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} = -\frac{n}{mR} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(A_z + \frac{nr}{mR} A_\theta \right), \\ B_\lambda &= -\frac{\partial}{\partial r} \left(A_z + \frac{nr}{mR} A_\theta \right), \end{aligned}$$

y comparando con las (6.51),

$$\psi = A_z + \frac{nr}{mR} A_\theta.$$

Si consideramos ahora el flujo de $\mathbf{B}$ a través de la superficie helicoidal sustentada entre el eje z y la hélice de radio r , y $\lambda = cte$,

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l},$$

notamos que en la hélice $\lambda = cte$ el $d\mathbf{l}$ está dado por (6.50), con lo que sobre el contorno es

$$\mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \left(A_z + \frac{nr}{mR} A_\theta \right) dz = \psi dz,$$

lo que resulta en

$$\int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi R} \psi dz = 2\pi R \psi,$$

ya que $\psi(r, \lambda)$ es constante sobre la hélice (r y λ son constantes en ella).

De igual manera, si se toma la ecuación de evolución del campo magnético, incluyendo resistividad,

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \mathbf{B},$$

y se calcula el flujo a través de la superficie helicoidal considerada, se tiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} - \frac{\eta}{\mu_0} \oint (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l}.$$

Por cálculo directo es inmediato comprobar que sobre la hélice se tiene

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} &= (u_r B_\lambda - u_\lambda B_r) dz \\ &= -u_r \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{u_\lambda}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda}, \end{aligned}$$

mientras que

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} &= \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B_\lambda) + \frac{2n}{mR} B_z \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial \lambda} \left[1 + \left(\frac{nr}{mR} \right)^2 \right] \right\} dz. \end{aligned}$$

Usando las (6.51) y el ordenamiento de tokamak $r \ll R$ y B_{0z} constante, con $B_{0z} \gg B_{0\theta} \gg |\delta \mathbf{B}|$, podemos escribir esta última igualdad como

$$(\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} = \left(-\nabla^2 \psi + \frac{2n}{mR} B_{0z} \right) dz,$$

donde el laplaciano en las variables r, λ es

$$\nabla^2 \psi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2}.$$

Haciendo la integral trivial sobre z (ya que todos los integrandos son constantes) y cancelando el factor común $2\pi R$ se tiene

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + u_r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{u_\lambda}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{\eta}{\mu_0} \left(\nabla^2 \psi - \frac{2n}{mR} B_{0z} \right). \quad (6.52)$$

Notando que para el campo base es

$$B_{0\lambda} = B_{0\theta}(r) - \frac{nr}{mR} B_{0z} = -\frac{\partial \psi_0}{\partial r},$$

se tiene que

$$\psi_0 = - \int B_{0\theta}(r) dr + \frac{nr^2}{2mR} B_{0z}.$$

Así,

$$\nabla^2 \psi_0 - \frac{2n}{mR} B_{0z} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r B_{0\theta}) = -\mu_0 j_{0z},$$

con lo que escribiendo en (6.52) $\psi = \psi_0 + \delta \psi$ obtenemos

$$\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} + u_r \frac{\partial \psi_0}{\partial r} = \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \delta \psi - \eta j_{0z},$$

donde sólo se linealizó el término convectivo del lado izquierdo.

Para el análisis en el entorno de la superficie singular en r_s : $q(r_s) = m/n$, donde $\partial \psi_0 / \partial r = 0$ y el laplaciano de la perturbación es más importante que el del flujo base tenemos que

$$\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} \simeq \frac{\eta}{\mu_0} \nabla^2 \delta \psi, \quad (6.53)$$

y podemos aplicar estimaciones similares al caso plano de la sección anterior.

Considerando una perturbación de la forma

$$\delta \psi = \alpha(r, t) \cos(m\lambda),$$

en el entorno de la superficie singular es

$$\psi = \psi_0(r_s) + \frac{1}{2}\psi_0''(r_s)(r - r_s)^2 + \alpha(r_s, t) \cos(m\lambda),$$

con lo que las superficie magnéticas $\psi = cte$ tienen la expresión

$$r - r_s = \pm \sqrt{\frac{2[cte - \alpha(r_s, t) \cos(m\lambda)]}{\psi_0''(r_s)}},$$

que tienen la forma de islas encerradas en una separatriz (correspondiente a $cte = \alpha(r_s, t)$) de semiancho

$$\Delta = 2\sqrt{\frac{\alpha(r_s, t)}{\psi_0''(r_s)}}. \quad (6.54)$$

Tenemos así que en estas islas es

$$\nabla^2 \delta\psi \simeq \frac{\delta\psi'(r_s + \Delta) - \delta\psi'(r_s - \Delta)}{2\Delta} = \frac{K\delta\psi(r_s)}{2\Delta},$$

donde

$$K = \frac{\delta\psi'(r_s + \Delta) - \delta\psi'(r_s - \Delta)}{\delta\psi(r_s)}. \quad (6.55)$$

Notemos que este parámetro es el que debe determinarse con la solución externa MHD ideal, que en la superficie singular tiene un valor continuo $\delta\psi(r_s)$, pero derivada discontinua, distinta a cada lado de la superficie.

Con esto, la (6.53) se escribe

$$\frac{\partial\alpha}{\partial t} \simeq \frac{\eta}{\mu_0} \frac{K}{2\Delta} \alpha,$$

que usando (6.54) para escribir $\alpha = \psi_0''(r_s) \Delta^2/4$ resulta en

$$\frac{\partial\Delta}{\partial t} \simeq \frac{\eta}{\mu_0} \frac{K}{4},$$

que nos indica que cuando $K > 0$ las islas crecen linealmente en el tiempo, y tenemos así una inestabilidad tearing, que ha roto las superficies magnéticas en el entorno de la superficie singular, y ha generado estas islas crecientes.

Para estudiar el problema externo consideremos, como es apropiado para estos modos lentos, que la inercia puede despreciarse, con lo que las perturbaciones en tal zona satisfacen la ecuación

$$-\nabla\delta p + \mathbf{j}_0 \times \delta\mathbf{B} + \delta\mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = 0, \quad (6.56)$$

con δp la perturbación de la presión.

Escribiendo

$$\delta \mathbf{B} = \delta B_r \mathbf{e}_r + \delta B_\lambda \mathbf{e}_\lambda = \delta B_r \mathbf{e}_r + \delta B_\lambda \left(\mathbf{e}_\theta - \frac{nr}{mR} \mathbf{e}_z \right),$$

un cálculo directo lleva a que

$$\delta \mathbf{j} \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} (\nabla \times \delta \mathbf{B}) \times \mathbf{B}_0 = \frac{1}{\mu_0} B_{0\lambda} \nabla^2 \delta \psi \mathbf{e}_r,$$

donde se usaron las (6.51).

Se tiene también por cálculo directo que

$$\mathbf{j}_0 \times \delta \mathbf{B} = - \left(j_{0z} + \frac{nr}{mR} j_{0\theta} \right) \delta B_\lambda \mathbf{e}_r + (j_{0z} \mathbf{e}_\theta - j_{0\theta} \mathbf{e}_z) \delta B_r,$$

que en el ordenamiento del tokamak, donde B_{0z} se puede considerar constante, puede aproximarse tomando $j_{0\theta} \simeq 0$ para dar

$$\mathbf{j}_0 \times \delta \mathbf{B} = -j_{0z} \delta B_\lambda \mathbf{e}_r + j_{0z} \delta B_r \mathbf{e}_\theta = j_{0z} \left(\frac{\partial \delta \psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \delta \psi}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\theta \right).$$

El sistema de ecuaciones se escribe entonces como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta p}{\partial r} &= j_{0z} \frac{\partial \delta \psi}{\partial r} + \frac{1}{\mu_0} B_{0\lambda} \nabla^2 \delta \psi, \\ \frac{\partial \delta p}{\partial \lambda} &= j_{0z} \frac{\partial \delta \psi}{\partial \lambda}. \end{aligned}$$

Proponiendo que $\delta \psi = \alpha(r) \cos(m\lambda)$ y que $\delta p = \pi(r) \cos(m\lambda)$, de la segunda ecuación resulta inmediatamente que $\pi(r) = j_{0z}(r) \alpha(r)$, con lo que al reemplazar en la primera se obtiene la ecuación para $\alpha(r)$

$$\alpha \frac{dj_{0z}}{dr} = \frac{B_{0\lambda}}{\mu_0} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\alpha}{dr} \right) - \frac{m^2}{r^2} \alpha \right]. \quad (6.57)$$

Nótese que como $B_{0\lambda} = 0$ en la superficie singular $r = r_s$ esta ecuación tiene una singularidad en ese radio. La técnica entonces es obtener las soluciones de (6.57) α_+ para $r > r_s$ y α_- para $r < r_s$, cada una satisfaciendo las condiciones de contorno fuera de r_s en su región y cumpliendo continuidad en r_s . De esta manera, el valor K definido por (6.55) estará dado por

$$K = \frac{\alpha'_+(r_s) - \alpha'_-(r_s)}{\alpha_+(r_s)},$$

y la condición de estabilidad definida por su signo.

Como un ejemplo muy simple consideremos el caso en el que la corriente j_{0z} está muy concentrada alrededor del eje z de manera que para $r > 0$ se pueda aproximar $j_{0z} = 0$. Tal caso corresponde a

$$\begin{aligned} B_{0\theta} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ q(r) &= \frac{r}{R} \frac{B_{0z}}{B_{0\theta}} = \frac{2\pi B_{0z}}{\mu_0 I R} r^2, \end{aligned}$$

de manera que

$$r_s = \sqrt{\frac{m}{n} \frac{\mu_0 I R}{2\pi B_{0z}}}.$$

La ecuación (6.57) se reduce a

$$\alpha'' + \frac{\alpha'}{r} - \frac{m^2}{r^2} \alpha = 0,$$

cuyas soluciones son de la forma $r^{\pm m}$. Claramente, la solución para $r > r_s$ que decae al alejarse de r_s es

$$\alpha_+ = A_+ \left(\frac{r}{r_s} \right)^{-m},$$

mientras que la correspondiente a $r < r_s$ es

$$\alpha_- = A_- \left(\frac{r}{r_s} \right)^m.$$

La condición de continuidad en r_s impone que $A_+ = A_-$ con lo que resulta inmediatamente $K = -2m/r_s$, que muestra entonces que la perturbación decae y la configuración considerada es estable para estos modos (de hecho sobreestable). Notemos finalmente que en (6.57) para m suficientemente grande puede despreciarse el término de la izquierda, con lo que las soluciones obtenidas valen aun en el caso que j_{0z} no esté concentrada en el eje, lo que nos dice que en general los modos con m grande no son peligrosos para el desarrollo de inestabilidades tearing.

Capítulo 7

Teoría cinética de plasmas

La descripción de fluido es suficiente para tratar la mayoría de los procesos macroscópicos en plasma. Sin embargo, algunos fenómenos de interés dependen de la forma detallada de la distribución de velocidades de las partículas. Cuando las colisiones son infrecuentes y por lo tanto inefectivas para maxwellianizar las funciones de distribución en tiempos suficientemente cortos comparados con los de evolución del proceso de interés, es necesario usar la descripción cinética.

7.1. Aproximación de Vlasov

Esta aproximación consiste en despreciar el término de colisiones en la ecuación cinética general (3.2). Esto es razonable cuando se estudian procesos que evolucionan rápidamente en comparación con el tiempo de colisiones. Por ejemplo, en fenómenos oscilatorios de alta frecuencia y en inestabilidades cinéticas, que son precisamente los temas que consideraremos. El sistema completo de ecuaciones de Vlasov es entonces

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_\alpha q_\alpha \int f_\alpha d^3v,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sum_\alpha q_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha d^3v + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

De los posibles procesos descriptos por estas ecuaciones, nos limitaremos a los casos en los que el campo magnético no tiene ningún rol dinámico, como hemos visto es el caso de las oscilaciones de plasma y las oscilaciones iónico-acústicas. En este caso sólo es necesaria la ecuación de Poisson. Consideramos además problemas que dependen de una sola coordenada cartesiana, que llamamos x , y consideramos una sola especie de iones de carga Ze . Así, podemos escribir la ecuación cinética para cada especie como

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + v_x \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_x \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_x} = 0,$$

la que podemos integrar respecto de las velocidades v_y y v_z , y definir las funciones de distribución unidimensionales

$$F_\alpha(x, v_x, t) = \int f_\alpha(x, \mathbf{v}, t) dv_y dv_z.$$

El sistema a estudiar es entonces

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_e}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E_x \frac{\partial F_e}{\partial v_x} &= 0, \\ \frac{\partial F_i}{\partial t} + v_x \frac{\partial F_i}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} E_x \frac{\partial F_i}{\partial v_x} &= 0, \\ \frac{\partial E_x}{\partial x} &= \frac{e}{\varepsilon_0} \left[Z \int F_i dv_x - \int F_e dv_x \right]. \end{aligned}$$

Los fenómenos descriptos por este sistema simplificado son muy complejos, por lo que estudiaremos la evolución de pequeñas perturbaciones a un estado base estacionario y espacialmente homogéneo, definido por las funciones de distribución $F_{0e,i}(v_x)$, que satisfacen la condición de neutralidad

$$Z \int F_{0i} dv_x = \int F_{0e} dv_x,$$

a la vez que el campo eléctrico de orden cero es nulo. Para simplificar la notación no explicitaremos más los subíndices espaciales y escribiremos simplemente E por E_x , y v por v_x .

Si escribimos entonces

$$F_{e,i}(x, v, t) = F_{0e,i}(v) + F_{1e,i}(x, v, t),$$

tenemos en cuenta la condición de neutralidad del estado base, y despreciamos términos de orden dos en las perturbaciones (el campo eléctrico es de

orden uno), obtenemos el sistema linealizado

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_{1e}}{\partial t} + v \frac{\partial F_{1e}}{\partial x} - \frac{e}{m_e} E \frac{dF_{0e}}{dv} &= 0, \\ \frac{\partial F_{1i}}{\partial t} + v \frac{\partial F_{1i}}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} E \frac{dF_{0i}}{dv} &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial x} &= \frac{e}{\varepsilon_0} \left[Z \int F_{1i} dv - \int F_{1e} dv \right].\end{aligned}$$

Como estudiaremos problemas sin contornos, y no existen factores explícitos dependientes de x , conviene estudiar los modos de Fourier espaciales de E y de $F_{1e,i}$. Escribimos así

$$\begin{aligned}\tilde{E}(k, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} E(x, t) \exp(-ikx) dx, \\ \tilde{F}_{1e,i}(k, v, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} F_{1e,i}(x, v, t) \exp(-ikx) dx.\end{aligned}$$

Podríamos en principio estudiar también los modos de Fourier temporales, pero veremos que es más correcto tratar la parte temporal con el método de la transformada de Laplace. Definimos entonces

$$\mathcal{E}(k, s) = \int_0^{+\infty} \tilde{E}(k, t) \exp(-st) dt, \quad (7.1a)$$

$$\mathcal{F}_{e,i}(k, v, s) = \int_0^{+\infty} \tilde{F}_{1e,i}(k, v, t) \exp(-st) dt. \quad (7.1b)$$

Teniendo en cuenta que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{F}_{1e,i}(k, v, t) \exp(-st) dt = -\tilde{F}_{1e,i}(k, v, 0) + s \mathcal{F}_{e,i}(k, v, s),$$

se obtiene fácilmente el sistema transformado Fourier y Laplace

$$\begin{aligned}(s + ikv) \mathcal{F}_e &= \frac{e\mathcal{E}}{m_e} \frac{dF_{0e}}{dv} + \tilde{F}_{1e}(k, v, 0), \\ (s + ikv) \mathcal{F}_i &= -\frac{Ze\mathcal{E}}{m_i} \frac{dF_{0i}}{dv} + \tilde{F}_{1i}(k, v, 0), \\ ik\mathcal{E} &= \frac{e}{\varepsilon_0} \left[Z \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_i dv - \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}_e dv \right].\end{aligned}$$

Las dos primeras nos dan inmediatamente $\mathcal{F}_{e,i}$ en función de $\mathcal{E}$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_e(k, v, s) &= \left[\frac{e\mathcal{E}}{m_e} \frac{dF_{0e}}{dv} + \tilde{F}_{1e}(k, v, 0) \right] \frac{1}{s + ikv}, \\ \mathcal{F}_i(k, v, s) &= \left[-\frac{Ze\mathcal{E}}{m_i} \frac{dF_{0i}}{dv} + \tilde{F}_{1i}(k, v, 0) \right] \frac{1}{s + ikv},\end{aligned}$$

que al reemplazarse en la tercera nos da, tras unas operaciones sencillas,

$$D(k, s) \mathcal{E}(k, s) = N(k, s), \quad (7.2)$$

donde

$$N(k, s) = \frac{ie}{k\varepsilon_0} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{F}_{1e}(k, v, 0)}{s + ikv} dv - Z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{F}_{1i}(k, v, 0)}{s + ikv} dv \right], \quad (7.3)$$

$$D(k, s) = 1 - \frac{ie^2}{k\varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{s + ikv} dv - \frac{iZ^2 e^2}{k\varepsilon_0 m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0i}/dv}{s + ikv} dv. \quad (7.4)$$

Como nos interesa determinar la evolución temporal de un modo espacial de Fourier dado, invertimos sólomente la transformada de Laplace. Así, por ejemplo,

$$\tilde{E}(k, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \mathcal{E}(k, s) \exp(st) ds,$$

donde σ es un número real tal que el camino de integración deja a su izquierda todas las singularidades de $\mathcal{E}(k, s)$. En términos de los puntos singulares s_p de $\mathcal{E}(k, s)$ podemos escribir la fórmula de inversión como

$$\tilde{E}(k, t) = \sum_{s_p} \text{residuo} [\mathcal{E}(k, s), s_p] \exp(s_p t),$$

que nos dice que los puntos singulares con $\text{Re}(s_p) > 0$ corresponden a inestabilidades, y aquellos con $\text{Re}(s_p) < 0$ a modos amortiguados. Notemos que las definiciones (7.1) están bien definidas sólo si $\text{Re}(s) > 0$, por lo que valores con $\text{Re}(s) < 0$ deben entenderse como correspondientes a la continuación analítica de las (7.1) en esa región.

Vemos de (7.2) que, si escribimos $\mathcal{E}(k, s) = N(k, s)/D(k, s)$, los puntos singulares de $\mathcal{E}(k, s)$ corresponden a puntos singulares de $N(k, s)$ y a ceros de $D(k, s)$. Las integrales en la variable v que definen a estas funciones en (7.3) y (7.4) deben considerarse como correspondientes al plano de valores complejos de v , a lo largo de una curva cerrada C que incluye el eje real (recorrido en el sentido indicado), que se cierra a través de un arco al infinito en el semiplano

$\text{Im}(v) > 0$ (que tiene contribución nula para las funciones de distribución aceptables). Es claro entonces que para $\text{Re}(s) > 0$ los puntos singulares de los integrandos en (7.3) y (7.4), correspondientes a $v = is/k$, se encuentran en el semiplano superior (el valor de k puede considerarse positivo porque k negativos corresponden al complejo conjugado de la amplitud del modo de Fourier); esto es, dentro de la curva de integración, y por lo tanto no dan lugar a singularidades de la integral (se entiende que esto vale para funciones de distribución razonables, que son los numeradores de los integrandos). Así, $N(k, s)$ y $D(k, s)$ son funciones enteras (sin singularidades) en $\text{Re}(s) > 0$. De igual manera, son también funciones enteras para $\text{Re}(s) < 0$, en general diferentes de las correspondientes a $\text{Re}(s) > 0$, pero por lo dicho respecto de las definiciones (7.1), las funciones que interesan son las definidas para valores con $\text{Re}(s) > 0$, esto es, por las singularidades en el semiplano $\text{Im}(v) > 0$. Los valores con $\text{Re}(s) < 0$ corresponderán a la continuación analítica hacia el semiplano inferior, que por ser la función entera para $\text{Re}(s) > 0$, siempre puede hacerse, al menos en una banda de valores finitos de $\text{Re}(s) < 0$.

Para $\text{Re}(s) > 0$ las singularidades en los integrandos en $D(k, s)$ están dentro de la curva de integración, y dan por lo tanto lugar a valores finitos que podemos calcular fácilmente por residuos. El comportamiento interesante aparece cuando $\text{Re}(s) = 0$ (que corresponde a un modo puro de Fourier con $\omega = is$) y cuando $\text{Re}(s) < 0$. En estos casos la continuación analítica de $D(k, s)$ requiere deformar las curvas de integración en v para que incluyan en su interior el punto singular $v = is/k$.

En el caso $\text{Re}(s) = 0$ la curva se deforma ligeramente incluyendo la singularidad sobre el eje real de v , al saltarla con una semicircunferencia de radio infinitesimal. Esto permite calcular inmediatamente

$$\int_C \frac{dF_{0e,i}/dv}{s + ikv} dv = \text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e,i}/dv}{s + ikv} dv + \frac{\pi}{k} \frac{dF_{0e,i}}{dv} \Big|_{v=is/k}, \quad (7.5)$$

donde Pr representa el valor principal de la integral.

Notemos que si hubiésemos atacado el problema usando modos de Fourier temporales de entrada, que formalmente se obtienen de lo hecho aquí tomando $\tilde{F}_{1e,i}(k, v, 0) = 0$ y $s = -i\omega$, habríamos obtenido la ecuación para el campo eléctrico (el subíndice V corresponde a Vlasov)

$$D_V(k, \omega) \mathcal{E}(k, \omega) = 0, \quad (7.6)$$

con

$$D_V(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k^2 \varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{v - \omega/k} dv - \frac{Z^2 e^2}{k^2 \varepsilon_0 m_i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0i}/dv}{v - \omega/k} dv. \quad (7.7)$$

La condición de existencia de perturbación; esto es, $\mathcal{E}(k, \omega) \neq 0$, conduce a la relación de dispersión $\omega(k)$ dada en forma implícita por $D_V(k, \omega) = 0$.

El problema es que, siendo ω un número real, no tendríamos una prescripción correcta para tratar las singularidades de los integrandos en $v = \omega/k$. Vlasov trató el problema originalmente usando modos de Fourier y *postuló* que la singularidad se salvaba tomando el valor principal de las integrales, con lo que perdió el segundo término en (7.5). Fue Landau quien luego realizó el tratamiento correcto de Laplace, por lo que los efectos asociados al nuevo término llevan su nombre.

Es importante destacar que, como vimos, para $\text{Re}(s) > 0$ el circuito original de integración C no necesita ser deformado, por lo que el tratamiento de Laplace coincide con el de Fourier más la suposición de una frecuencia compleja $\omega = is$, con parte imaginaria positiva. Tenemos entonces que las inestabilidades pueden estudiarse con el formalismo más simple de Fourier, suponiendo simplemente frecuencias complejas.

7.2. Ondas de plasma y amortiguamiento de Landau

Un problema importante que puede ser abordado con lo visto es el de oscilaciones de plasma. La alta frecuencia asociada a estas oscilaciones permite despreciar completamente el efecto de los iones, considerando que debido a la gran inercia de éstos su función de distribución no es alterada por las perturbaciones del campo eléctrico: $F_{1i} = 0$. Estudiamos además oscilaciones prácticamente puras ($\text{Re}(s) \simeq 0$), con lo que conviene usar la notación más familiar $s = -i\omega$, con lo que la expresión (7.4) se escribe en este caso, usando además (7.5),

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2}{k\epsilon_0 m_e} \left[\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{\omega - kv} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{0e}}{dv} \Big|_{v=\omega/k} \right]. \quad (7.8)$$

Notemos que $\omega_{pe} \simeq v_{Te}/\lambda_D$, con lo que, como esperamos oscilaciones con $\omega \simeq \omega_{pe}$,

$$\frac{\omega}{k} \simeq \frac{v_{Te}}{k\lambda_D} \gg v_{Te},$$

para longitudes de onda mucho mayores que la longitud de Debye. De esta manera, como la contribución principal al numerador del integrando es para $v \sim v_{Te}$, podemos aproximar

$$\frac{1}{\omega - kv} = \frac{1}{\omega} \left[1 + \frac{kv}{\omega} + \left(\frac{kv}{\omega} \right)^2 + \dots \right],$$

y la integral se realiza fácilmente, dando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{\omega - kv} dv = -\frac{n_{0e}}{\omega} \left[\frac{k}{\omega} + 2 \left(\frac{k}{\omega} \right)^2 \langle v \rangle_0 + 3 \left(\frac{k}{\omega} \right)^3 \langle v^2 \rangle_0 + \dots \right],$$

donde $\langle \dots \rangle_0$ simboliza el promedio con la función de distribución imperturbada.

Para el caso de no tener corriente en el equilibrio es $\langle v \rangle_0 = 0$, mientras que $\langle v^2 \rangle_0 = v_{Te}^2$, con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 - \frac{e^2 n_{0e}}{k \varepsilon_0 m_e \omega} \left[\frac{k}{\omega} + 3 \left(\frac{k}{\omega} \right)^3 v_{Te}^2 + \dots + \frac{i\pi\omega}{kn_{0e}} \frac{dF_{0e,i}}{dv} \Big|_{v=\omega/k} \right] \\ &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{3\omega_{pe}^2 k^2 v_{Te}^2}{\omega^4} - \frac{i\pi\omega_{pe}^2}{k^2 n_{0e}} \frac{dF_{0e}}{dv} \Big|_{v=\omega/k}, \end{aligned} \quad (7.9)$$

donde en la segunda línea hemos despreciado los términos de orden superior en $k^2 v_{Te}^2 / \omega^2$.

Podemos resolver en forma aproximada la relación de dispersión $D(k, \omega) = 0$, proponiendo que la frecuencia tiene una pequeña componente imaginaria: $\omega = \omega_R + i\gamma$, con $|\gamma| \ll \omega_R$. Suponiendo también pequeño el último término de (7.9), tenemos al separar parte real e imaginaria

$$\begin{aligned} \omega_R^2 &= \omega_{pe}^2 + 3k^2 v_{Te}^2, \\ \gamma &= \frac{\pi\omega_{pe}^3}{2n_{0e}k^2} \frac{dF_{0e}}{dv} \Big|_{v=\omega_{pe}/k}. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Notemos que hemos obtenido la relación correcta de ondas de plasma, incluyendo efectos térmicos, más un efecto nuevo que, para $dF_{0e}/dv < 0$ (que corresponde a funciones de distribución en equilibrio), es el de un amortiguamiento de la oscilación. El límite de amortiguamiento muy pequeño corresponde a $\text{Re}(s) \rightarrow 0^-$.

Para una distribución maxwelliana ($v_{Te}^2 = T_e/m_e$)

$$F_{0e} = \frac{n_{0e}}{\sqrt{2\pi}v_{Te}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right),$$

es (λ_D es la longitud de Debye)

$$\gamma = -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{(k\lambda_D)^3} \exp\left(-\frac{1}{2(k\lambda_D)^2}\right),$$

por lo que si $k \gtrsim \lambda_D^{-1}$ las ondas son fuertemente amortiguadas ($\gamma \sim \omega_{pe}$ para $k \sim \lambda_D^{-1}$).

Este amortiguamiento es denominado de Landau y constituye un efecto notable, debido a que no hay procesos disipativos incluidos en el formalismo. La razón física es que los electrones que se mueven con velocidad $v \simeq \omega_{pe}/k$ están prácticamente en fase con la oscilación de plasma, por lo que están sometidos a un campo eléctrico que es aproximadamente constante en su sistema de referencia. De esta manera, los electrones ligeramente más lentos que ω_{pe}/k son acelerados, ganando energía a expensas de la oscilación, mientras que los que son ligeramente más rápidos son frenados, entregando energía a la onda (como E puede ser positivo o negativo tenemos tanto aceleración como frenado para ambos tipos de partículas; sin embargo, el frenado de partículas con $v \lesssim \omega_{pe}/k$ las “saca” de resonancia evitando frenado adicional, mientras que la aceleración las “pone” en resonancia, aumentando el efecto de esta aceleración; como lo contrario ocurre para las partículas con $v \gtrsim \omega_{pe}/k$, el efecto neto es el mencionado). Si $dF_{0e}/dv < 0$ hay más electrones que ganan energía que electrones que ceden energía, con lo que la onda se amortigua.

En el sistema de referencia de la onda la velocidad de la partícula es $v - \omega_{pe}/k$, y cambia de signo al reflejarse la partícula en el potencial estacionario en ese sistema, esto es, pasa a ser $\omega_{pe}/k - v$. Así, en el sistema de laboratorio la velocidad pasa de v a $2\omega_{pe}/k - v$, y el cambio de energía de la partícula es por lo tanto

$$\Delta\varepsilon = \frac{m_e}{2} [(2\omega_{pe}/k - v)^2 - v^2] = 2m\omega_{pe}/k (\omega_{pe}/k - v),$$

donde se ve que, efectivamente, partículas con $v > \omega_{pe}/k$ pierden energía, y aquellas con $v < \omega_{pe}/k$ la ganan, la diferencia de energía es ganada o perdida por la onda. Nótese que si la onda no cambia apreciablemente entre dos reflexiones de la partícula la energía que pierde (gana) en la primera reflexión es recuperada (cedida) en la segunda, y no hay un intercambio neto de energía entre onda y partícula. Por esto, para que haya efectivamente amortiguamiento de la onda, el tiempo característico de amortiguamiento, $|\gamma|^{-1}$, debe ser menor que el tiempo entre dos reflexiones τ , que cumple $\lambda/\tau \sim \sqrt{eE_0\lambda/m_e}$, donde λ es la longitud de onda y E_0 la amplitud. Para $\lambda \sim \lambda_D$ vemos que $|\gamma| \sim \omega_{pe}$ por lo que se tendrá efectivamente amortiguación si $eE_0\lambda_D < T_e$, o sea campos suficientemente pequeños.

7.3. Amortiguamiento de Landau en ondas iónico-acústicas

Para estas oscilaciones de baja frecuencia debemos incluir la dinámica iónica, con lo que tenemos, en lugar de (7.8),

$$D(k, \omega) = 1 + \frac{e^2}{k\varepsilon_0 m_e} \left[\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{\omega - kv} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{0e}}{dv} \Big|_{v=\omega/k} \right] + \frac{Z^2 e^2}{k\varepsilon_0 m_i} \left[\text{Pr} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0i}/dv}{\omega - kv} dv - \frac{i\pi}{k} \frac{dF_{0i}}{dv} \Big|_{v=\omega/k} \right].$$

Las frecuencias que esperamos ahora cumplen con el ordenamiento

$$kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te},$$

con lo que la integral del término iónico podemos aproximarla como hicimos arriba para el caso electrónico (nos quedamos con la aproximación más baja)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0i}/dv}{\omega - kv} dv \simeq -n_{0i} \frac{k}{\omega^2}.$$

Para la integral del término electrónico aproximamos

$$\frac{1}{\omega - kv} = -\frac{1}{kv} \left[1 + \frac{\omega}{kv} + \left(\frac{\omega}{kv} \right)^2 + \dots \right],$$

y quedándonos con sólo el primer término tenemos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{\omega - kv} dv \simeq \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F_{0e}}{v^2} dv \simeq \frac{n_{0e}}{kv_{Te}^2},$$

con todo lo cual resulta

$$\begin{aligned} D(k, \omega) &= 1 + \frac{e^2 n_{0e}}{k^2 \varepsilon_0 m_e v_{Te}^2} - \frac{Z^2 e^2 n_{0i}}{\varepsilon_0 m_i \omega^2} \\ &\quad - \frac{i\pi e^2}{k^2 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{m_e} \frac{dF_{0e}}{dv} + \frac{Z^2}{m_i} \frac{dF_{0i}}{dv} \right)_{v=\omega/k} \\ &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{i\pi}{k^2} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{n_{0e}} \frac{dF_{0e}}{dv} + \frac{\omega_{pi}^2}{n_{0i}} \frac{dF_{0i}}{dv} \right)_{v=\omega/k}. \end{aligned}$$

Si despreciamos completamente el término de Landau obtenemos, de $D(k, \omega) = 0$, despreciando además el uno frente al segundo término,

$$\omega^2 = \frac{\omega_{pi}^2}{\omega_{pe}^2} k^2 v_{Te}^2 = k^2 c_s^2,$$

la ya conocida relación de dispersión para ondas iónico acústicas. Si proponemos entonces $\omega = kc_s + i\gamma$, con γ pequeño, obtenemos fácilmente

$$\gamma = \frac{\pi k c_s^3}{2\omega_{pi}^2} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{n_{0e}} \frac{dF_{0e}}{dv} + \frac{\omega_{pi}^2}{n_{0i}} \frac{dF_{0i}}{dv} \right)_{v=c_s}. \quad (7.11)$$

Evaluemos esta expresión para distribuciones maxwellianas ($v_{Te,i} = \sqrt{T_{e,i}/m_{e,i}}$)

$$F_{0e,i} = \frac{n_{0e,i}}{v_{Te,i} \sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{v^2}{2v_{Te,i}^2} \right).$$

El cálculo es sencillo, y conviene expresar el resultado como

$$\gamma = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k c_s \left[\left(\frac{Z m_e}{m_i} \right)^{1/2} + \left(\frac{Z T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{Z T_e}{2 T_i} \right) \right].$$

Vemos que el amortiguamiento debido a los electrones (el primer término entre corchetes) es efectivamente pequeño ($\gamma \ll kc_s$), pero el debido a los iones es pequeño sólo si $T_e \gg T_i$ (a primera vista lo mismo valdría en el límite opuesto, pero recuérdese que se usó que $kv_{Ti} \ll \omega \ll kv_{Te}$). Obtenemos entonces el resultado que las ondas iónico-acústicas sólo pueden existir sin amortiguamiento apreciable en plasmas con $T_e \gg T_i$. Notemos que el amortiguamiento debido a los iones es pequeño en este caso porque hay pocas partículas en fase con el campo eléctrico de la onda. El amortiguamiento debido a los electrones es pequeño en general por una razón muy diferente; hay muchos electrones en fase con el campo eléctrico porque $v_{Te} \gg c_s$, pero, y debido a esto mismo, dF_{0e}/dv es pequeño en $v = c_s$, con lo que la *diferencia* entre el número de electrones que extraen energía y el de los que dan energía a la onda es pequeña.

7.4. Inestabilidad de dos haces

Las inestabilidades MHD que se estudiaron en el capítulo anterior se desarrollan en tiempos relativamente largos respecto del tiempo de colisiones, de manera que las funciones de distribución de las partículas del plasma son aproximadamente maxwellianas. Existe otro tipo de inestabilidades, de rápida evolución, relacionado con el apartamiento de la función de distribución respecto de la maxwelliana. Un ejemplo de interés es la inestabilidad de dos haces, en la que la función de distribución de orden cero corresponde a dos haces fríos de electrones interpenetrantes, que se mueven con velocidades v_0 y

$-v_0$, respectivamente, en la dirección x , con un fondo neutralizador de iones quietos. Estas aproximaciones nos permiten un tratamiento analítico sencillo.

Sabemos que al estudiar una inestabilidad ($\text{Re}(s) > 0$ en el formalismo de Laplace) podemos usar el formalismo más sencillo de Fourier, interpretando a la frecuencia como compleja con $\text{Im}(\omega) > 0$. De esta manera, usamos la relación de Vlasov (7.7), sin contribución de los iones,

$$D_V(k, \omega) = 1 - \frac{e^2}{k^2 \varepsilon_0 m_e} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dF_{0e}/dv}{v - \omega/k} dv,$$

donde la función de distribución de los haces es (usando deltas de Dirac)

$$F_{0e} = \frac{n_{0e}}{2} [\delta(v - v_0) + \delta(v + v_0)].$$

La integración es entonces trivial (hecha por partes) y resulta

$$D_V(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2} \left[\frac{1}{(\omega + kv_0)^2} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^2} \right].$$

La relación de dispersión $D_V(k, \omega) = 0$ es claramente un polinomio en ω de grado cuatro. Notando que para $\omega \rightarrow \pm\infty$ es $D_V(k, \omega) = 1$, mientras que para $\omega \rightarrow \pm kv_0$ es $D_V(k, \omega) \rightarrow -\infty$, nos dice que la curva $D_V(k, \omega)$ (para k fijo), función de ω , cruza el eje $D_V = 0$ al menos dos veces en $|\omega| > kv_0$, con lo que al menos dos raíces son reales. Las otras dos raíces serán entonces reales o complejas conjugadas una de otra. Tendremos entonces inestabilidad si las raíces restantes son complejas. Como

$$\frac{\partial}{\partial \omega} D_V(k, \omega) = \omega_{pe}^2 \left[\frac{1}{(\omega + kv_0)^3} + \frac{1}{(\omega - kv_0)^3} \right]$$

sólo se anula en $\omega = 0$, el máximo de $D_V(k, \omega)$ se encuentra allí. Para que existan raíces complejas este máximo debe ser negativo, de manera que en $|\omega| < kv_0$ es $D_V(k, \omega) < 0$ y la curva sólo cruza el eje en los puntos vistos con $|\omega| > kv_0$. Así, la condición de inestabilidad es $D_V(k, \omega = 0) < 0$, o sea $kv_0 < \omega_{pe}$. Tenemos así inestabilidad para ondas con

$$\lambda > \frac{2\pi v_0}{\omega_{pe}}.$$

Las perturbaciones (del estado base de dos haces interpenetrantes) que satisfacen esta condición generan acumulaciones de carga que aumentan con el tiempo dando lugar a un rápido rompimiento de la configuración.

7.5. Amortiguamiento inverso de Landau

7.5.1. Inestabilidad de ondas de plasma

La razón física del amortiguamiento de Landau nos hace esperar que si en el entorno de la velocidad de fase de una oscilación electrostática existen más partículas rápidas que lentas, la onda crecerá a expensas de la energía cinética de estas partículas. Esto requiere que en $v = \omega/k$ la derivada de la función de distribución sea positiva. En el caso de ondas de plasma podemos ver esto en la expresión (7.10), obtenida en este caso como el límite de $\text{Re}(s) \rightarrow 0^+$,

$$\gamma = \frac{\pi\omega_{pe}^3}{2n_0ek^2} \left. \frac{dF_{0e}}{dv} \right|_{v=\omega_{pe}/k}. \quad (7.12)$$

La condición $dF_{0e}/dv|_{v=\omega_{pe}/k} > 0$ implica que la función de distribución presenta una protuberancia en $v \simeq \omega_{pe}/k$, que se denomina “bump on the tail” (la expresión castellana no es muy feliz). Siempre que exista esta forma de función de distribución se tendrá inestabilidad de las oscilaciones con longitud de onda apropiada para satisfacer la condición $dF_{0e}/dv|_{v=\omega_{pe}/k} > 0$.

La inestabilidad de dos haces es un caso particular (y extremo) de distribución con “bump on the tail” (“tails” en este caso), que fue estudiada sin la restricción $\gamma \rightarrow 0$ (necesaria para deducir la expresión (7.12)). En contraposición, entendemos por amortiguamiento inverso de Landau el efecto asociado a perturbaciones pequeñas de la función de distribución de equilibrio, típicamente maxwelliana.

7.5.2. Inestabilidad iónico-acústica

Como caso importante de amortiguamiento inverso de Landau veamos el de un plasma que transporta corriente. Consideremos entonces un plasma maxwelliano en el que los electrones tienen una velocidad de deriva u , que tomamos en la dirección x , respecto de los iones que tienen velocidad media nula. Así,

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \frac{n_{0i}}{v_{Ti}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Ti}^2}\right), \\ F_{0e} &= \frac{n_{0e}}{v_{Te}\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v-u)^2}{2v_{Te}^2}\right]. \end{aligned}$$

Consideramos además que $u \ll v_{Te}$, con lo que

$$\begin{aligned} F_{0e} &\simeq \frac{n_{0e}}{v_{Te}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2} + \frac{vu}{v_{Te}^2}\right) \\ &\simeq \left(1 + \frac{vu}{v_{Te}^2}\right) \frac{n_{0e}}{v_{Te}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right). \end{aligned}$$

Con esto, la expresión (7.11) nos permite obtener inmediatamente para oscilaciones iónico-acústicas

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} k c_s \left[\left(\frac{Z m_e}{m_i} \right)^{1/2} \left(\frac{u}{c_s} - 1 \right) - \left(\frac{Z T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Z T_e}{2 T_i}\right) \right],$$

con lo que tendremos inestabilidad ($\gamma > 0$) si

$$\frac{u}{c_s} > 1 + \left(\frac{m_i}{Z m_e} \right)^{1/2} \left(\frac{Z T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{Z T_e}{2 T_i}\right),$$

que en el caso de interés $T_e \gg T_i$ se reduce a $u/c_s > 1$. Así, una corriente relativamente intensa en el plasma, de manera que la velocidad de deriva electrónica sea suficientemente alta, da lugar a inestabilidad de ondas iónico-acústicas.