FÍSICA TEÓRICA 1 – 2do. Cuatrimestre de 2025

GUÍA 3: MEDIOS MATERIALES Y DESARROLLO MULTIPOLAR

Medios magnéticos: imanes permanentes, permeables y corrientes magnéticas

1. *Imán permanente cilíndrico.* Un cilindro de radio a y longitud L está orientado según la dirección z, con sus tapas en $z = \pm L/2$, y está caracterizado por una densidad de magnetización uniforme $\mathbf{M} = M\,\hat{z}$.

   (a) Calcular las fuentes del campo $\mathbf{B}$. Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector $\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas desarrollado según las funciones de Bessel $J_\nu(k\rho)$, y a partir de ahí calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. (*Ayuda:* en la integral de Poisson, escribir $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1}$ según el tipo de desarrollo buscado.)

   (b) Mediante la integral de Poisson, calcular el potencial vector $\mathbf{A}$ en coordenadas cilíndricas desarrollado como una integral de Fourier en z, y a partir de ahí calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

   (c) Calcular las fuentes de $\mathbf{H}$ e identificar el problema eléctrico equivalente. Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ a partir de un potencial pseudo-escalar magnético $\Phi_\mathbf{H}$, continuo en todo el espacio y tal que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_\mathbf{H}$. Escribir $\Phi_\mathbf{H}$ como un desarrollo en las funciones de Bessel $J_\nu(k\rho)$ o como una integral de Fourier en z. Comparar, según el caso, con los ítems (a) y (b).

   (d) ¿A qué distribución de corriente es equivalente este imán? A partir del campo del imán, calcular el campo $\mathbf{B}$ producido por un solenoide cilíndrico, de radio a y longitud L, por el que circula una corriente I y que tiene n espiras por unidad de longitud.

   (e) Calcular explícitamente los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ del imán cuando $L \to \infty$.

   (f) Demuestre, por analogía, que el campo magnético de un solenoide infinito de sección arbitraria es cero en su exterior y constante en su interior.

2. *Imán dipolar puro.* Una esfera de radio a está uniformemente magnetizada con una magnetización permanente $\mathbf{M} = M_0\hat{z}$.

   (a) Calcular las fuentes del campo $\mathbf{B}$ y el momento dipolar magnético $\mathbf{m}_0$ del imán.

   (b) Calcular el potencial vector $\mathbf{A}$ mediante la integral de Poisson y, a partir de ahí, $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. Comparar el potencial vector $\mathbf{A}$ en el exterior de la esfera con el que produciría un dipolo magnético puntual igual al momento dipolar total del imán.

   (c) Calcular las fuentes de $\mathbf{H}$ e identificar el problema eléctrico equivalente. Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ usando la integral de Poisson para un potencial pseudo-escalar magnético $\Phi_\mathbf{H}$, continuo en todo el espacio y tal que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_\mathbf{H}$.

   (d) Calcular $\Phi_\mathbf{H}$ usando separación de variables en esféricas.

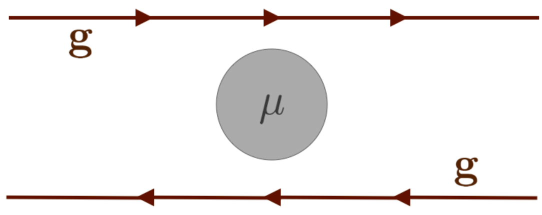
   (e) La misma esfera magnetizada está ahora situada en un medio lineal, isótropo y homogéneo de permeabilidad μ, que se extiende entre $r = a$ y $r = b > a$, concéntrico con la esfera.

      i. Calcular los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$ y encontrar el momento magnético total $\mathbf{m}_\mu$ inducido en el medio. Verificar que para $\mu = 1$ se obtienen los resultados de los ítems anteriores.

      ii. Obtener las corrientes (fuentes de $\mathbf{B}$) y las pseudo-cargas magnéticas (fuentes de $\mathbf{H}$).

      iii. Examinar los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$, sus fuentes y el momento dipolar en los casos límites de paramagnético perfecto $\mu \to \infty$, y de diamagnético perfecto $\mu \to 0$ (superconductor).

3. *Corrientes libres y magnéticas.* Una bola permeable de radio a se ubica entre dos placas infinitas paralelas por las que circulan corrientes superficiales uniformes de dirección opuesta y magnitud g.



Problema 3.

(a) Analizar las fuentes de cada uno de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$. ¿Por qué no es cierto que $\mathbf{H} = -\nabla\Phi_{\mathbf{H}}$? (con $\Phi_{\mathbf{H}}$ el potencial pseudo-escalar magnético continuo en todo el espacio).

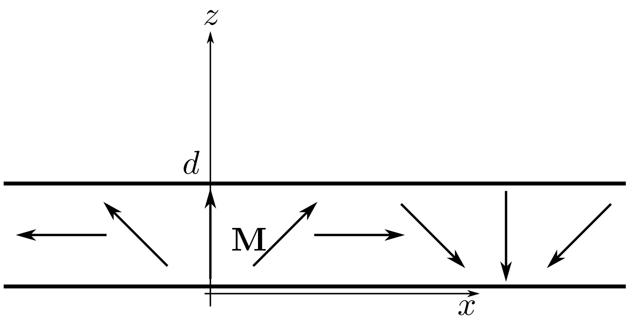
(b) Calcular el campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$, con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia para obtener el campo magnético $\mathbf{B}$ en todo el espacio.

(c) Examinar los límites $\mu \to \infty$ y $\mu \to 0$, y dibujar las líneas de campo de $\mathbf{B}$.

4. *Matriz de Halbach (o Imán Borgeano, según el poeta).* Para que no se acostumbren a pensar que todos los imanes tienen una magnetización uniforme, aquí se les propone el caso de un imán limitado por los planos $z = 0$ y $z = d$. En las direcciones x e y se extiende entre $-\infty$ y $+\infty$. La densidad de magnetización dentro del imán está dada por

$$\mathbf{M}(x) = m_0 \left(\sin qx\, \hat{x} + \cos qx\, \hat{z}\right),$$

con $q > 0$. Es decir, según un corte en el plano xz, la magnetización va rotando como en la figura de abajo.



Problema 4.

Puesto que la magnetización es permanente y conocida en todo el espacio, el paso a un problema electrostático equivalente es el camino más sencillo. Pero como $\mathbf{M}$ no es uniforme, puede haber cargas superficiales y de volumen,

$$\sigma = (\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2) \cdot \mathbf{n}, \qquad \rho = -\nabla \cdot \mathbf{M}.$$

(a) Calcular el potencial escalar para el campo $\mathbf{H}$ y el campo magnético en todo el espacio, pero especialmente en las regiones por encima y por debajo del imán. *Ayuda*: Integrar la función de Green para cada contribución.

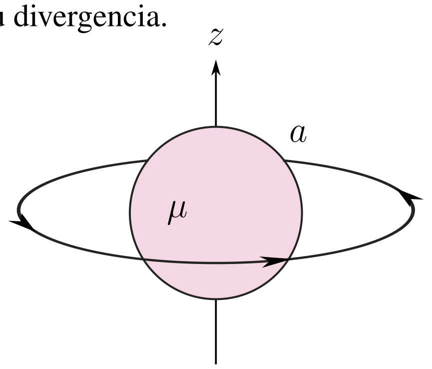
(b) La solución es una expresión cerrada que no incluye sumatorias ni integrales. Cuando la obtengan, hagan un poco de ingeniería inversa: analicen a posteriori qué tipo de cosas podrían haber deducido a priori. Esto, en algunos ámbitos, recibe el nombre de *mixtificación*, o también *trampa*, pero en física suele ser el camino normal cuando uno se enfrenta a problemas nuevos. Con la solución a la vista, súbitamente se vuelven triviales varias cosas, y entonces pueden dar una solución más compacta y razonada.

(c) Si el resultado no les parece desconcertante, es que hicieron algo mal o que no tienen corazón. Por fin, ¿dónde está lo borgeano de este imán? Descubran ustedes en qué línea del poema *La cierva blanca* se esconde una referencia borgeana al imán que acabamos de describir.

5. *El imán Saturno Saturnito.* Una bola magnetizable lineal isótropa y homogénea, de radio a y con permeabilidad μ, está centrada con una espira de radio $b > a$ por donde circula una corriente I, como muestra la figura.

   (a) Indicar todas las fuentes de cada uno de los campos $\mathbf{B}$ y $\mathbf{H}$.

   (b) Calcular el campo magnético en todo el espacio en términos del campo $\mathbf{H} = \mathbf{H}_r + \mathbf{H}_d$, con fuentes en su rotor y fuentes en su divergencia.



Problema 5.

Dieléctricos, electretes y conductores.

6. Una cáscara esférica de radio b con densidad superficial de carga eléctrica $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$, produce un campo uniforme $\mathbf{E}_0 = E_0\,\hat{z}$ en el interior, con $E_0 = -4\pi\sigma_0/3$, y θ el ángulo cenital medido desde el eje z. Dentro de la cáscara se ubica una esfera concéntrica de radio $a < b$ con un material dieléctrico L.I.H. de permitividad ϵ en su interior.

   (a) Calcular el potencial y el campo eléctrico en todo el espacio. Hallar la distribución de cargas de polarización en el medio y el momento dipolar del dieléctrico.

   (b) Asumir que la susceptibilidad eléctrica $\chi_e = \frac{\epsilon-1}{4\pi}$ es muy baja y obtener el campo dentro del dieléctrico utilizando el siguiente método de *aproximaciones sucesivas*: Como punto de partida asumir que dentro del dieléctrico se tiene sólo $\mathbf{E}_0$ y que el medio se polariza, como primer aproximación, con el campo $\mathbf{P}_1 = \chi_e\,\mathbf{E}_0$. Las cargas de polarización asociadas a $\mathbf{P}_1$ producen un campo eléctrico $\mathbf{E}_1$. Luego, la polarización se modifica en una cantidad $\mathbf{P}_2 = \chi_e\,\mathbf{E}_1$ que, a su vez, genera un campo $\mathbf{E}_2$, y así sucesivamente. Repetir el procedimiento para obtener la corrección $\mathbf{E}_i$ y corroborar que la suma $\mathbf{E} = \sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{E}_i$ coincide con el campo interior ($r < a$) del ítem (a).

   (c) Analizar por qué el campo $\mathbf{P}$ en el interior preserva la dirección de las líneas del campo externo $\mathbf{E}_0$. ¿Es esta una característica general de la polarización en un M.L.I.H.? ¿Qué pasa en el caso límite $\epsilon \to \infty$?

7. Una esfera conductora de radio a está a potencial cero. Entre $r = a$ y $r = b$ hay un dieléctrico de permitividad ε, y ubicada a una distancia r' del origen hay una carga q. Considerar separadamente los dos casos $a < b < r'$ y $a < r' < b$.

   (a) Identificar dónde se encuentran las cargas y hallar el potencial electrostático en todo punto del espacio.

   (b) Calcular las densidades de carga de polarización en volumen y superficie, y las densidades de carga libre en todo el espacio.

   (c) Analizar los casos $\varepsilon = 1$ y $\varepsilon \to \infty$. ¿Cuál es la interpretación física de los resultados?

   Ayuda: usar la forma genérica del potencial de una cáscara cargada frente a una esfera (que puede deducirse en una línea), y bastará plantear una sola ecuación con una sola incógnita. En otro caso tendrá que plantear 5 ecuaciones con 5 incógnitas.

8. (a) En un medio de constante dieléctrica ε se sumerge una esfera conductora de radio a cargada con una carga total Q. Hallar los campos $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ en todo punto del espacio y las distribuciones de carga libre en el conductor y de polarización en el dieléctrico.

   (b) Calcular $\mathbf{E}$ y $\mathbf{D}$ si en lugar de fijar Q, la esfera conductora se conecta ahora a un potencial V.

   (c) Si bien existe una analogía formal entre ambos casos, hay una diferencia esencial entre ellos: la dependencia de los campos con ε. Explicar las causas de esta diferencia.

9. Un medio dieléctrico de permitividad ε ocupa el semiespacio con $z < 0$. A una altura $d > 0$ sobre el dieléctrico hay una carga q.

   (a) Encuentre el potencial electrostático en todo el espacio: (i) usando separación de variables en coordenadas cartesianas, y (ii) usando separación de variables en coordenadas cilíndricas.

   (b) Para cada una de las expresiones obtenidas en (a), identifique la contribución al potencial asociada exclusivamente a la carga q. Es decir, escriba $\phi = \phi_q + \phi_r$, donde ϕ_q es el potencial de la carga original. ¿A qué simple distribución de cargas puntuales puede atribuirse, en cada región, la parte restante del potencial, ϕ_r?

   (c) ¿A qué se reduce la solución cuando $\varepsilon \to \infty$? ¿Cuál es la interpretación física de este resultado?

   (d) Generalice los resultados anteriores al caso en que el semiespacio superior está ocupado por un medio con permitividad ε_1 y el inferior por un medio con permitividad ε_2. En términos de las permitividades, ¿cuál es la magnitud que caracteriza al problema?

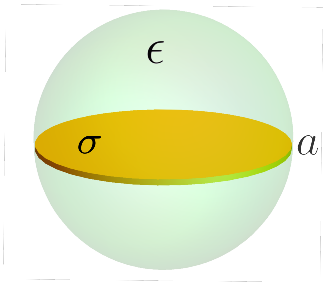
10. Hallar el potencial electrostático en todo el espacio producido por la configuración de la figura: un disco de radio a y densidad superficial uniforme σ ubicado dentro de una esfera dieléctrica del mismo radio y permitividad ϵ.

11. Una carga puntual q se ubica en el centro de un cilindro conductor cuyo interior está relleno con un material dieléctrico de constante uniforme ϵ. El cilindro tiene sección circular de radio R y altura L, se encuentra centrado en el origen y conectado a tierra (sus 2 tapas y su cara lateral).

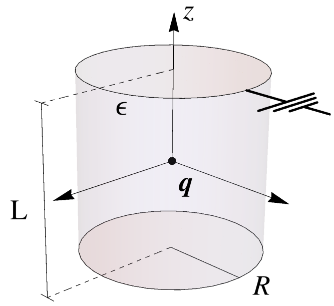
    (a) Encontrar el potencial electrostático Φ en todo el espacio.

    (b) Calcular todas las distribuciones de carga libres y de polarización e indicar dónde se ubican. ¿Cuánta carga se induce en el conductor?

(c) El dispositivo se enfría de forma tal que el dieléctrico se vuelve un material de polarización permanente, un *electrete*. Posteriormente se remueve el caparazón conductor sin alterar al electrete, quedando la carga q en el centro del cilindro macizo de polarización permanente: ¿Cómo es el campo eléctrico en la región exterior del conjunto electrete y carga q?



Problema 10.



Problema 11.

Momentos multipolares.

12. (a) Probar que los momentos multipolares de una distribución de carga con simetría esférica son nulos salvo el monopolar.
    (b) Probar que el momento dipolar de una distribución de carga neutra no depende del origen. En general, probar que el primer momento multipolar no nulo es independiente del origen.
    (c) Encontrar las expresiones para los momentos multipolares (en esféricas) de una distribución con simetría azimutal y escribir la expansión correspondiente.

13. Analizar los momentos multipolares, hasta el cuadrupolar, de las siguientes distribuciones de carga, y en el caso de tener momento cuadrupolar determinar sus ejes principales:
    (a) Un anillo de radio a cargado uniformemente con carga total Q.
    (b) Un disco cargado con una distribución cilíndricamente simétrica respecto de su eje.
    (c) Un cubo uniformemente cargado en volumen. Estimar el error en el *campo eléctrico* si a un cubo de 10 cm de lado se lo considera como una carga puntual a distancias del orden de 1 m de su centro. ¿A qué distancia el error es del orden del $1\,\%$?

14. Calcule todos los momentos multipolares del problema del anillo de la Guía 2 (anillo de radio b, cargado uniformemente, concéntrico con una esfera a tierra de radio $a < b$.), y del problema del disco uniformemente cargado, de radio a, de la misma Guía.

15. *¿Es lo mismo tener una gran distribución de carga lejos que una pequeña distribución cerca?* Calcular la densidad ρ_α de una distribución de carga ρ que se ha expandido o contraído uniformemente un factor α. Expansión significa $\alpha > 1$, y contracción, $0 < \alpha < 1$. Geométricamente, la transformación lleva el punto $\mathbf{r}$ al punto $\alpha\mathbf{r}$, y la carga contenida en el elemento de volumen $d^3\mathbf{r}$ al elemento de volumen $d^3(\alpha\mathbf{r})$. ¿Cuál es el potencial Φ_α de la distribución transformada en términos del potencial original Φ? ¿Cómo se relacionan entre sí los momentos multipolares de orden l, $Q_\alpha^{(lm)}$, de la distribución transformada y los momentos $Q^{(lm)}$ de la original? Volviendo a la pregunta inicial: ¿en qué sentido es equivalente ver una distribución desde una distancia $L = \alpha d$, con $\alpha > 1$, a verla desde una distancia d pero contraída un factor $1/\alpha$?

Respuestas: $\rho_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha^{-3}\rho\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right)$, $\Phi_\alpha(\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\Phi\left(\frac{\mathbf{r}}{\alpha}\right)$, $Q_\alpha^{(lm)} = \alpha^l Q^{(lm)}$.