FÍSICA TEÓRICA 1 – 1er Cuatrimestre de 2025

TEOREMA DE HELMHOLTZ (CAMPOS DE GRADIENTES Y ROTORES)

(Repaso de divergencia y rotor, link: Operadores diferenciales.)

Teorema de Helmholtz (campos de gradientes y rotores):

Dado el campo vectorial suave $\mathbf{W}(\mathbf{r})$, tal que $\mathbf{W}(\mathbf{r}) \xrightarrow{r\to\infty} 0$, y con

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= D(\mathbf{r}) \quad &&: \text{fuente en divergencia} \\ \nabla \times \mathbf{W}(\mathbf{r}) &= \mathbf{C}(\mathbf{r}) \quad &&: \text{fuente en rotor} \end{aligned}$$

se puede descomponer unívocamente, como:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \underbrace{\mathbf{I}(\mathbf{r})}_{\textbf{irrotaiconal}} + \underbrace{\mathbf{S}(\mathbf{r})}_{\textbf{solenoidal}} \quad / \quad \begin{aligned} \nabla \times \mathbf{I} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{S} &= 0 \end{aligned}$$

donde

$$\mathbf{I}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) \quad / \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{D(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

y

$$\mathbf{S}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad / \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \frac{\mathbf{C}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

<u>Observaciones</u>:

(i) Por consistencia debe ser $\nabla \cdot \mathbf{C} = \mathbf{0}$.

(ii) Las hipótesis generales exigen que las fuentes decaigan a cero como: $(D, \mathbf{C}) \xrightarrow{r\to\infty} 1/r^{\epsilon}$, con $\epsilon > 2$.

(iii) *No existe una función no trivial con divergencia y rotor nulos y que tienda a cero en infinito (la única solución es la nula).*