Sobre algunos problemas de la guía 2

Problema 8.c

La idea es contar la cantidad de maneras de distribuir n libros **indistinguibles** en m cajas **indistinguibles**.

Supongamos, para simplificar un poco el asunto, que $m \geq n$ de manera que cualquier distribución que se nos ocurra es posible; de esta manera no restringimos la posibilidad de, por ejemplo, poner únicamente un libro por caja. En este caso, es bastante sencillo convencerse de que

1. el problema es equivalente a contar las **particiones enteras** del número n; para $n = 4$ y $m = 7$, por ejemplo, podemos escribir

$$n = 4 = 2 + 1 + 1 = 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0\,, \tag{1}$$

   e identificar esta partición con la situación en la que ponemos 2 libros en alguna de las cajas, 1 libro en otras dos cajas, y dejamos las demás vacías, y

2. mientras se satisfaga la condición $m \geq n$, el valor de m, la cantidad de cajas, se vuelve irrelevante.

La cantidad de particiones p_n enteras (es el nombre usual, pero en realidad nos restringimos a los enteros mayores o iguales a cero) de un número n es algo notoriamente difícil de contar: no existe una fórmula cerrada que sea válida para cualquier n. Sin embargo, lo que sí se puede obtener es una fórmula relativamente explícita para la correspondiente función generatriz

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n\,. \tag{2}$$

En lo que sigue, vamos a ver que $F(x)$ puede expresarse en términos de una productoria infinita de la siguiente manera:

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^i)^{-1}\,. \tag{3}$$

Para convencernos de que esto es correcto, necesitamos considerar la expansión en serie de Taylor de $F(x)$. Esta expansión se arma a partir del producto de las expansiones de cada uno de los términos de la productoria. Asumiendo que $0 < x < 1$ (sin pérdida de generalidad dado que se trata de una variable meramente auxiliar) tenemos la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - x^i} = \sum_{n_i=0}^{\infty} (x^i)^{n_i}\,. \tag{4}$$

Por lo tanto, tenemos

$$F(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{n_i=0}^{\infty} x^{i n_i} \right)\,. \tag{5}$$

Volvamos al caso de $n = 4$ y $m = 7$ para ver cómo funciona esta expansión. Las particiones no equivalentes resultan ser

$$\begin{aligned} n = 4 &= 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 \\ &= 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0\,, \end{aligned}$$

o sea que $p_4 = 5$. Esto debería corresponder al coeficiente de la potenica x^4 en la expansión en serie de $F(x)$ alrededor de $x = 0$. Ahora bien, la expansión del factor $(1 - x^5)^{-1}$ sólo contiene potencias no negativas de x^5, con lo cual lo único que puede contribuir a un término de orden x^4 es el término inicial $(x^5)^0 = 1$. Está claro que lo mismo vale para cualquier término con $(1 - x^q)$ con $q \geq 5$. Por lo tanto, podemos concentrarnos en el producto

$$\begin{aligned} F_4(x) &= \prod_{i=1}^{4}(1 - x^i)^{-1} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} \\ &= \big(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\big)\big(1 + x^2 + x^4 + \cdots\big)\big(1 + x^3 + x^6 + \cdots\big)\big(1 + x^4 + x^8 + \cdots\big) \end{aligned}$$

El punto es que, una vez hechas todas las distributivas relevantes, tendremos una contribución a la potencia x^4 *por cada manera de combinar las potencias de cada factor de manera tal que sumen* $n = 4$. Estas combinaciones son

$$x^{4+0+0+0}\,, x^{0+4+0+0}\,, x^{0+0+0+4}\,, x^{1+0+3+0}\,, x^{2+2+0+0}\,. \tag{6}$$

A primera vista, si bien el resultado se corresponde con $p_4 = 5$, no da la impresión de estar contando lo mismo. La identificación es un tanto más abstracta: la idea es identificar a una potencia de la forma x^n proveniente de una combinación de la forma $n = \sum_{i=1}^{4}(n_i\, i)$ con una partición donde el número i aparece n_i veces:

$$\begin{aligned} x^{4\times1+0+0+0} &\quad\leftrightarrow\quad 4 = 1 + 1 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0\,, \\ x^{0+2\times2+0+0} &\quad\leftrightarrow\quad 4 = 2 + 2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0\,, \\ x^{0+0+0+1\times4} &\quad\leftrightarrow\quad 4 = 4 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0\,, \\ x^{1\times1+0+1\times3+0} &\quad\leftrightarrow\quad 4 = 3 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0\,, \\ x^{2\times1+1\times2+0+0} &\quad\leftrightarrow\quad 4 = 2 + 1 + 1 + 0 + 0 + 0 + 0\,. \end{aligned}$$

Esta identificación funciona para cualquier caso. Es por esto que $F_4(x)$ define una función generatriz para las particiones enteras de $n = 4$, mientras que $F(x)$ directamente la define para todos los valores de n a la vez.

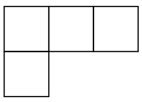
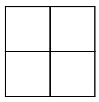
La biyección que hemos establecido también nos permite estudiar qué sucede cuando $m < n$. En el ejemplo anterior podríamos tomar $m = 2$, lo que nos daría un total de 3 particiones pues dos de las que teníamos deben ser descartadas: las que tienen más de dos números no nulos. En general vamos a necesitar calcular

$$p_{n,m} = \#\,\text{maneras de escribir a}\,n\,\text{como suma de exactamente}\,m\,\text{enteros}\ \textbf{positivos} \tag{7}$$

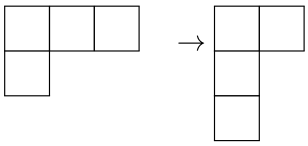
El resultado final a nuestra pregunta original (donde permitimos que haya cajas vacías) tomará entonces la forma

$$\#\,\text{maneras de escribir a}\,n\,\text{como suma de exactamente}\,m\,\text{enteros}\ \textbf{no negativos} = \sum_{k=0}^{m} p_{n,m}\,. \tag{8}$$

A primera vista, encontrar una función generatriz para $p_{n,m}$ puede parecer más complicado que para p_n. Sin embargo podemos usar una simetría diagramática muy simple para reformular la pregunta. Volvamos a nuestro ejemplo de $n = 4$. Lo que vamos a hacer es asignar un diagrama de Young a cada partición. Para esto, alineamos el total de n libros (cuadraditos) en distintas filas según en qué cajas los ponemos. Por ejemplo, tenemos

 $\leftrightarrow \quad 4 = 3 + 1$  $\leftrightarrow \quad 4 = 2 + 2$

Esta identificación es uno a uno en términos de las distintas particiones. Ahora bien, existe una simetría de reflexión, asociada a la operación de trasponer filas y columnas:



Lo interesante es que esta operación asocia una partición en la que hay exactamente $m = 2$ cajas (la cantidad de filas en el diagrama de la izquierda) a otra partición en la que la cantidad máxima de libros por caja es también $m = 2$ (la cantidad de columnas en el diagrama de la derecha). Como la identificación es uno a uno y es válida para cualquier diagrama (partición), concluimos que

$$p_{n,m} = \#\,\text{maneras de escribir a}\,n\,\text{como suma de enteros positivos menores o iguales a}\ m\,. \tag{9}$$

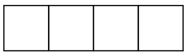
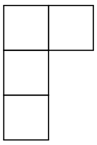
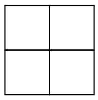
Pero esto es mucho más fácil de contar! Simplemente necesitamos no permitir que en la partición aparezcan factores $(1 - x^i)^{-1}$ con $i > m$. Por lo tanto, siguiendo la lógica del problema anterior, vemos que la función generatriz toma la forma

$$G_m(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,m} x^n = \prod_{i=1}^{m} (1 - x^i)^{-1}\,. \tag{10}$$

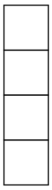
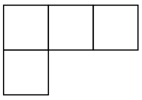
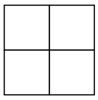
En nuestro ejemplo, teníamos $m = 2$, por lo que basta ver que

$$\begin{aligned} G_2(x) &= \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = \left(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots\right)\left(1 + x^2 + x^4 + \cdots\right) \\ &= \cdots + x^{4\times 1+0} + x^{2\times 1+1\times 2} + x^{0+2\times 2} + \cdots \end{aligned}$$

donde, en el último paso, nos concentramos en potencias de la forma x^4 porque teníamos $n = 4$. Cómo esperábamos, con la restricción de tener a lo sumo 2 cajas quedan quedan 3 de las 5 particiones originales. Para ser precisos, las que quedaron fueron

 $\leftrightarrow \quad 4 = 1 + 1 + 1 + 1$  $\leftrightarrow \quad 4 = 2 + 1 + 1$  $\leftrightarrow \quad 4 = 2 + 2$

que son las armadas con números menores o iguales a 2. Las que corresponden a separar en como mucho 2 cajas serán entonces las reflejadas:

 $\leftrightarrow \quad 4 = 4 + 0$  $\leftrightarrow \quad 4 = 3 + 1$  $\leftrightarrow \quad 4 = 2 + 2$

Problema 9

Cantidad de maneras de distribuir n libros indistinguibles en m cajas distinguibles que, además, pueden contener hasta k libros. Definimos a esta cantidad como $p_{n,m,k}$.

Haciendo uso de la misma lógica del problema anterior, vamos dar la intuición y proponer una función generatriz de manera directa. Si nos concentramos en una caja, las distintas posibilidades de ocupación (cantidad de libros que ponemos en esa caja) son $0, 1, 2, \ldots, k$, lo que puede capturarse con los coeficientes del polinomio

$$\sum_{j=0}^{k} x^j = 1 + x + x^2 \cdots + x^k \,. \tag{11}$$

Podemos hacer lo mismo para cada caja. Además, las ocupaciones de las distintas cajas son todas independientes entre sí, salvo por la restricción de que el total de libros tiene que sumar n. Por lo tanto, la función generatriz toma la forma

$$H_{m,k}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,m,k} x^n = (1 + x + x^2 \cdots + x^k)^m \,. \tag{12}$$

En otras palabras, $p_{n,m,k}$ es el coeficiente de la potencia x^n en la expansión en serie de $H_{m,k}(x)$. Por ejemplo, para $k = 1$ tenemos

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n \quad \Rightarrow \quad p_{n,m,1} = \binom{m}{n} \,. \tag{13}$$

Simplemente estamos eligiendo qué n cajas van a tener un (único) libro de las m totales. Este caso tiene relevancia en modelos de fermiones, donde cada caja representa un estado, y cada libro una partícula, de manera que, por el principio de exclusión de Pauli, cada estado no puede estar ocupado por más de una partícula.

Para el caso general, usamos que

$$1 + x + x^2 \cdots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}\,, \tag{14}$$

de manera que

$$H_{m,k}(x) = \left(\frac{1 - x^{k+1}}{1 - x}\right)^m . \tag{15}$$

Usando que

$$(1 - x^{k+1})^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} x^{j(k+1)} \tag{16}$$

y que

$$(1 + x)^{-m} = 1 - mx + \frac{1}{2}m(m+1)x^2 - \frac{1}{3!}m(m+1)(m+2)x^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \binom{m-1+i}{i} x^i\,, \tag{17}$$

y masajeando un poco el producto de sumatorias, llegamos a nuestra expresión final

$$p_{n,m,k} = \sum_{r=0}^{R}(-1)^r \binom{m-1+n-r(k+1)}{m-1}\binom{m}{r}\,, \tag{18}$$

donde R es la parte entera de $n/(k+1)$.

Les queda convencerse de que esto es cierto, usando por ejemplo el método de inclusión-exclusión, es decir, contando el total de posibilidades sin restricciones y restando las situaciones en donde hay r cajas con más de k libros, como hicimos en clase para otros problemas.

Problema 17

En clase resolvimos el problema 18 calculando de varias maneras el número de *desarreglos* de una secuencia de n números. Dada una permutación al azar, la probabilidad de que se logre desarreglar n números que obtuvimos era de la forma

$$p_n = \frac{1}{n!}d_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\,. \tag{19}$$

Quedó pendiente usar esto para contestar la pregunta del problema 17: ¿dada una serie de permutaciones de N elementos elegidas al azar, **en promedio**, cuántos números quedan fijos en su posición original?

Lo que queremos calcular es, por definición,

$$\langle n\rangle = \sum_{n=0}^{N} n\,P_N(n)\,, \tag{20}$$

donde hemos introducido

$P_N(n) =$ probabilidad de que exactamente n elementos (de N) queden fijos ante una permutación al azar .

Usando los desarreglos, podemos calcular esta probabilidad de la siguiente manera:

$$P_N(n) = \frac{1}{N!}\binom{N}{n} d_{N-n} = \frac{1}{N!}\binom{N}{n}(N-n)! p_{N-n} = \frac{1}{n!} p_{N-n} \,. \tag{21}$$

En pocas palabras, elegimos los elementos que van a quedar fijos y *desarreglamos* los demás. Por lo tanto, tenemos

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} \frac{n}{n!} p_{N-n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{n}{n!} p_{N-n} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(-1)^k}{(n-1)!k!} \,. \tag{22}$$

Un poco sorprendentemente si pensamos el problema de esta manera, el resultado muy simple, y en particular es el mismo para cualquier valor de N:

$$\langle n \rangle = 1 \,. \tag{23}$$

Para ver que lo que habíamos obtenido es sólo una manera horriblemente poco práctica de escribir al número 1, basta seguir los pasos

$$1 = \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{m!}(1-1)^m = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{m!}\binom{m}{k}(-1)^k = \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k!(m-k)!} = \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=0}^{N-n} \frac{(-1)^k}{k!(n-1)!} \,. \tag{24}$$

En el último paso hemos definido $n = m - k + 1$.

Como podría esperarse, hay una manera mucho más directa de obtener este resultado. Para esto haremos uso de la propiedad de linealidad del valor medio. Podemos definir variables booleanas $x_i(\sigma)$ de manera tal que, para cada permutación σ de la secuencia $123\ldots N$, tomen los valores

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si el número } i \text{ queda fijo} \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \,. \tag{25}$$

Así, podemos escribir la probabilidad que calculamos arriba como

$$P_N(n) = P(x_1 + \cdots + x_N = n) \,. \tag{26}$$

A partir de esta expresión, el valor medio toma la forma

$$\langle n \rangle = \sum_{n=0}^{N} n P(x_1 + \cdots + x_N = n) \,, \tag{27}$$

por lo que podemos cambiar la suma en n por la suma sobre los distintos valores de los x_i (sin dejar de pesar correctamente cada caso):

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_N=0,1} (i_1 + \cdots + i_N) P(x_1 = i_1 \cap x_2 = i_2 \cap \cdots \cap x_N = i_N) \\ &= \sum_{j=1}^{N} \sum_{i_j=0,1} \left[i_j \sum_{i_{k\neq j}=0,1} P(x_1 = i_1 \cap x_2 = i_2 \cap \cdots \cap x_N = i_N) \right] . \end{aligned}$$

Pero en la última línea estamos sumando sobre todo lo que puede pasar con las variables $x_{j\neq i}$, que es equivalente a preguntarse solo por lo que pasa con x_i. En otras palabras,

$$\sum_{i_{k\neq j}=0,1} P(x_1 = i_1 \cap x_2 = i_2 \cap \cdots \cap x_N = i_N) = P(x_j = i_j)\,. \tag{28}$$

Para un único elemento (cualquiera), es fácil ver que

$$P(x_j = 1) = \frac{(N-1)!}{N!} = \frac{1}{N} = 1 - P(x_j = 0)\,, \tag{29}$$

de donde finalmente obtenemos

$$\langle n \rangle = \sum_{j=1}^{N} \left[1 \times \frac{1}{N} + 0 \times \left(1 - \frac{1}{N} \right) \right] = 1\,, \tag{30}$$

o simplemente

$$\langle n \rangle = \langle x_1 + \cdots x_N \rangle = \sum_{i=1}^{N} \langle x_i \rangle = N \times \frac{1}{N} = 1\,. \tag{31}$$

No hacía falta, entonces, calcular los desarreglos para responder esta pregunta!