Física Teórica 3 − primer cuatrimestre de 2025

Guía 2: *Combinatoria y probabilidades*

1. ¿De cuántas maneras se pueden ordenar cinco personas en hilera? ¿De cuántas maneras si A y B deben estar una al lado de la otra? ¿De cuántas maneras si forman un círculo?

2. ¿Cuántas palabras de tres letras se pueden formar con las letras *a*, *b*, *c*, *d*, *e* y *f*? Considerar los dos casos: i) sin repetir letras, ii) no importa si se repiten letras.

3. ¿Cuántos anagramas diferentes tiene la palabra *manzana*?

4. ¿Cuántos pares de personas pueden elegirse entre n personas?

5. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir $2n$ personas en n parejas?

6. ¿Cuántos grupos de m personas pueden elegirse entre n personas?

7. ¿De cuántas maneras se pueden distribuir mN personas en grupos de m personas?

8. Hay N libros y M cajas. Cada caja puede contener hasta N libros. Cuántas maneras hay de distribuir los libros en las cajas si:

   a) Los libros son indistinguibles y las cajas distinguibles.
   b) Los libros y las cajas son distinguibles.
   c) Los libros y las cajas son indistinguibles.
   d) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles y no puede haber cajas vacías.
   e) Los libros son distinguibles y las cajas indistinguibles y sí puede haber cajas vacías.

   Los casos complicados en este problema corresponden a las cajas indistinguibles. Las palabras clave son "particiones" y "números de Stirling de segunda especie".

9. Hay N libros indistinguibles y M cajas distinguibles. Cada caja puede contener hasta k libros. Cuántas maneras hay de distribuir los libros en las cajas.

10. Una moneda se arroja N veces:

    a) ¿Cuántas secuencias existen en donde aparezcan n caras?
    b) ¿Cuántas secuencias existen en las que no hay dos caras seguidas?
    c) ¿Cuántas secuencias existen en las que dos caras seguidas recién aparecen en los dos últimos tiros?
    d) ¿Cuántas secuencias existen en donde inicialmente salen n caras seguidas y, o bien $n = N$, o bien en el lanzamiento $n + 1$ sale cruz?
    e) ¿Cuántas secuencias existen en donde el número de caras es par?

11. Considerar una fila de N monedas que muestran cara o cruz. No hay una dirección privilegiada desde la cual leer la secuencia de monedas: dos secuencias relacionadas por una reflexión se consideran iguales. Así, para cuatro monedas, las secuencias

$$\times\circ\circ\circ \quad \text{y} \quad \circ\circ\circ\times$$

se consideran iguales. ¿Cuántas secuencias distintas existen? ¿Cuántas secuencias simétricas existen? Por ejemplo, la siguiente la secuencia de siete monedas es simétrica:

$$\times\circ\circ\times\circ\circ\times$$

12. Calcule la longitud media de la secuencia inicial de caras para el problema 10d.

13. **El problema del cumpleaños**. En un aula hay n personas. Considerando que todos los años tienen 365 días, que la probabilidad de que una persona cumpla años un determinado día es 1/365, y que las fechas de los cumpleaños de las n personas son estadísticamente independientes, calcular la probabilidad p_n de que al menos dos personas cumplan años el mismo día. ¿Cuántas personas debe haber en el aula para que la probabilidad p_n supere el 50%? Tome por asalto una computadora y grafique p_n.

14. **Falso positivo**. Aparece una nueva enfermedad, 100% fatal y asintomática, hasta que la cabeza explota. Es una enfermedad extremadamente rara, estimándose que se da en 1 de cada 100 millones de personas. Por suerte, se inventa un test de diagnóstico. Teniendo en cuenta la gravedad de la enfermedad, EL LABORATORIO que vende el test recomienda aplicar el test a toda la población. "Además", argumenta EL LABORATORIO desinteresadamente, "el test es 99,9999% *infalible*" (las itálicas son nuestras): la probabilidad de que el test falle y dé positivo al ser ensayado en una persona sana es de 1 en un millón (*falso positivo*), y existe la misma probabilidad de que el test falle y dé negativo al ser aplicado a una persona que sí tiene la enfermedad (*falso negativo*). O sea, ¡una chance en un millón de que el test falle! ¿No es como decir que el test es perfecto? ¿Quién no apostaría a que el resultado del test está en lo cierto?

    a) Pues bien. Usted se hace el test y le da positivo. Teniendo en cuenta la baja probabilidad de que el test falle, ¿hay alguna esperanza razonable de que no tenga la enfermedad, o debe ya mismo dejar todos sus asuntos en orden y cubrirse la cabeza con una BOLSA®, que también comercializa EL LABORATORIO? Concretamente, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga la enfermedad?
    b) Si el test le da negativo, ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga la enfermedad?
    c) Generalice sus resultados para valores arbitrarios de las probabilidades que aparecen como dato en el enunciado.
    d) En un asunto tan serio, tal vez sería preferible repetir el test si este da positivo. ¿Cuál es la probabilidad de estar sano si los dos tests dan positivo? ¿Resulta equivalente hacerse los dos tests simultáneamente a hacerse el segundo test luego de conocer el resultado del primero?

15. **El problema de Monty Hall**. Este es un problema clásico de probabilidades. Tiene varias versiones, de las cuales la más conocida se enuncia más o menos así: todo ocurre en un programa de televisión. Hay un presentador y un participante, y hay tres puertas cerradas. Detrás de una de las puertas hay un auto; detrás de cada una de las otras dos puertas se esconde una cabra. Sólo el presentador sabe lo que hay detrás de cada puerta. El participante elige una de las puertas. Obviamente, si el juego terminase aquí y el presentador abriese la puerta elegida por el participante, la probabilidad de que este haya acertado con el auto es un tercio. En lugar de eso, el presentador abre una de las otras dos puertas, detrás de la cual hay una cabra, y ofrece al participante la posibilidad de modificar su primera elección. Con seguridad detrás de una de las dos puertas sin abrir está el auto y en la otra hay una cabra. A primera vista, tanto si cambia como si no cambia su elección, la probabilidad de acertar el auto parece ser del 50%. ¿Es esto cierto? ¿Conviene cambiar de elección o resulta indiferente?

16. **El problema de Jacob Bernoulli**. En *Ars cojectandi*, Bernoulli plantea el siguiente problema. Una urna contiene fichas blancas y negras en proporción de 3 a 2. Así, la probabilidad de extraer una ficha blanca es $p = \frac{3}{5}$. En cada paso se extrae una ficha, se anota su color y se la devuelve a la urna. Qué número N de veces debe repetirse este proceso para que, con una probabilidad de $\frac{1000}{1001}$, la fracción de fichas blancas extraídas esté entre $\frac{29}{50}$ y $\frac{31}{50}$. El problema está relacionado con la Ley de los grandes números. Qué tan grande tiene que ser una muestra para que la frecuencia de los resultados aproxime a la probabilidad con un dado error. Bernoulli sólo dio un valor de N máximo, igual a 25 550, que resulta en realidad muy conservativo. Para dar con el valor preciso de N, usted necesitará hacer el cálculo en una computadora: puede usar la distribución binomial y hacer las sumas necesarias numéricamente, o aproximar la distribución por una normal y usar la inversa de la función error.

17. Considerar el conjunto de todas las permutaciones de la secuencia $(1, 2, \ldots, N)$. Asumiendo que todas las permutaciones tienen la misma probabilidad, ¿cuál es el valor medio del número de elementos que se mantienen en su posición original?

18. **Problème des rencontres.** Hay n objetos, dispuestos en n sitios según un orden inicial. Tiene lugar una permutación al azar de estos objetos. Se pide encontrar la probabilidad p_n de que ningún objeto vuelva a su posición inicial, asumiendo que todas las permutaciones tienen igual probabilidad. Se trata, en definitiva, de contar el número de permutaciones que no dejan ningún elemento en su posición original. Los ordenamientos que tienen esta propiedad se llaman *desarreglos*. El número de desarreglos de n elementos suele llamarse subfactorial y notarse con los símbolos $!n$ o d_n. Resulta complicado contar directamente el número de desarreglos. Sin embargo, al igual que en muchos problemas de combinatoria, es más sencillo encontrar una relación de recurrencia y trabajar a partir de ahí. En particular, en este problema se usa el método de la función generatriz.

    a) Considere los casos $n = 1, 2, 3$ y 4. Encuentre los valores correspondientes de d_n.

b) Demuestre que, en general, d_n satisface la siguiente relación de recurrencia

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}).$$

c) Muestre que, en términos de las probabilidades, la ecuación anterior implica

$$np_n = (n-1)p_{n-1} + p_{n-2}.$$

d) A partir de esta relación de recurrencia, extienda la definición de p_n para todo n entero. ¿Cuánto vale p_0? ¿Cuánto vale p_n con $n < 0$?

e) Defina la función generatriz $F(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} p_n x^n$ y transforme la relación de recurrencia para p_n en una ecuación diferencial para $F(x)$.

f) Resuelva la ecuación diferencial para $F(x)$. La condición inicial puede determinarse calculando explícitamente $F(0)$.

g) Desarrollando $F(x)$ en potencias de x, encuentre p_n.

h) Muestre que $\lim_{n\to\infty} p_n \to e^{-1}$. Para ver qué tan rápida es la convergencia, grafique p_n.

19. **El modelo de Ehrenfest**. Para ilustrar la tendencia al equilibrio, Tatiana y Paul Ehrenfest propusieron el siguiente modelo: N fichas, numeradas de 1 a N, se distribuyen en dos urnas. En cada paso, una ficha se elige al azar y se la cambia de urna. La variable aleatoria es el número n de fichas en la primera urna. Llamaremos $p_m(n)$ a la probabilidad de que luego de m pasos esta urna contenga n fichas.

    a) Escriba la ecuación de evolución para la probabilidad, es decir, una ecuación que dé $p_{m+1}(n)$ en términos de las probabilidades en el paso anterior.

    b) Mostrar que la solución estacionaria, $p(n)$, es una binomial. *Sugerencia:* la condición de distribución estacionaria quedará en la forma de una ecuación de recurrencia para $p(n)$. Esto puede resolverse con el método de la **función generatriz**, definiendo la función auxiliar $F(x) = \sum x^n p(n)$ y transformando la ecuación de recurrencia para p en una ecuación diferencial para F, sujeta a la condición $F(1) = 1$. Los coeficientes del desarrollo de $F(x)$ en potencias de x son las probabilidades $p(n)$.

20. Arnulfo y Burgundófora juegan a lanzar alternativamente una moneda; gana el primero que obtiene cara. Si Arnulfo hace el primer lanzamiento, calcule las probabilidades que tiene cada uno de ganar. *Sugerencia:* hay infinitos caminos independientes que llevan a uno u otro ganador; la probabilidad correspondiente puede obtenerse sumando la probabilidad de cada camino. Existe una manera casi instantánea de resolver este problema. Sabiendo que esa manera existe, trate de encontrarla.

21. Acerca de cierta moneda, inicialmente sólo se puede afirmar que la densidad de probabilidad de que al arrojarla salga cara es uniforme en $[0, 1]$. Se arroja la moneda n veces y las n veces sale cara. ¿Cuál es la probabilidad de que salga cara en el siguiente tiro?

22. a) En el problema del decaimiento radiactivo, un núcleo activo a tiempo $t = 0$ tiene una probabilidad $w(t) = e^{-\lambda t}$ de continuar activo a tiempo $t \geqslant 0$, donde λ es una constante positiva. ¿Cuál es la densidad de probabilidad de que decaiga a tiempo t? Suponiendo que está activo en $t = 0$, ¿cuál es el valor medio del tiempo hasta el decaimiento? La densidad de probabilidad $f(t)$ se define del siguiente modo: la probabilidad de que el núcleo activo a tiempo $t = 0$ decaiga entre t y $t + dt$, con $dt \geqslant 0$, es igual a $f(t)dt$.

    b) Si hay N núcleos activos a tiempo $t = 0$, ¿cuál es la densidad de probabilidad de que el sistema decaiga a tiempo t a un estado con $N - 1$ núcleos activos? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta el primer decaimiento? ¿Cuál es el valor medio del tiempo hasta que decaen los N núcleos iniciales? ¿Cómo se compara el tiempo de vida medio con el valor medio del tiempo hasta que decaen $N/2$ núcleos? Recordar que el tiempo de vida medio es igual al tiempo en el que el valor medio del número de núcleos activos decae a la mitad de su valor inicial.