Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2025

Guía 4: *Transporte*

1. Considere la distribución de Maxwell-Boltzmann local:

$$f(\mathbf{r},\mathbf{p},t) = \frac{n(\mathbf{r},t)}{\left[2\pi mkT(\mathbf{r},t)\right]^{3/2}}\,\exp\left[-\frac{|\mathbf{p}-m\mathbf{u}(\mathbf{r},t)|^2}{2mkT(\mathbf{r},t)}\right],$$

   Calcule: las densidades de partículas, energía cinética y momento lineal; la velocidad media; las densidades de corriente de partículas, de corriente de energía cinética y de corriente térmica; el tensor de esfuerzos y el tensor de presión.

2. Obtenga la función de distribución de Maxwell-Boltzmann a partir de los ensambles microcanónico y canónico.

3. Obtenga las funciones de distribución de equilibrio de los siguientes sistemas:

   a) Un gas diluido de partículas ultrarrelativistas con velocidad media nula. Determine, además, la ecuación de estado.

   b) Un gas ideal sujeto al potencial gravitatorio sobre la superficie de la tierra. Determine, además, la densidad de partículas a una altura z.

   c) Una columna cilíndrica de gas que rota alrededor de su eje a velocidad angular constante. (*Sugerencia*: piense en el potencial equivalente en el sistema de referencia que rota con el gas).

4. a) Estime la probabilidad de que, en una habitación de $3 \times 3 \times 3$ m^3 a presión atmosférica y temperatura 300 K, y para un dado instante de tiempo, un volumen de 1 cm^3 se quede sin aire. Repita la estimación para un volumen de 1 Å^3

   b) Estime la probabilidad de que una estampilla de masa $m = 0.1$ g apoyada en un escritorio a presión atmosférica y temperatura 300 K salte espontáneamente a una altura de 10^{-8} cm por sobre dicho escritorio. (*Sugerencia*: en vez de pensar en una única estampilla, considere un conjunto infinito de estampillas colocadas una al lado de la otra, e interprételo como un ensamble de partículas para el que puede despreciar la energía cinética).

   c) Estime la fracción de partículas de hidrógeno H_2 al nivel del mar que pueden escapar de la atmósfera de la tierra. Para esto, utilice que la velocidad de escape es aproximadamente $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \approx 10^4$ m/s, y muestre que:

      i. La función error integrada a partir de un cierto valor lo suficientemente grande puede aproximarse por

$$\int_y^\infty dx\, e^{-x^2} = e^{-y^2}\left(\frac{1}{2y} - \frac{1}{4y^3} + \dots\right).$$

      (*Sugerencia*: considere la variable $t = x^2$ e integre varias veces por partes).

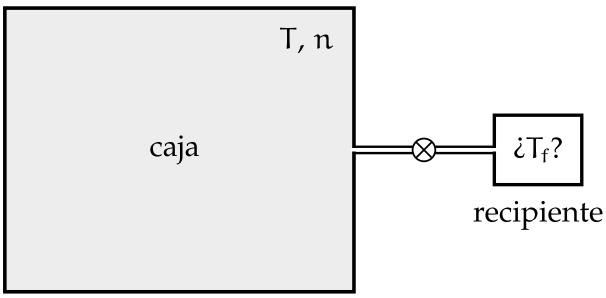
ii. La aproximación del ítem anterior implica que

$$\int_y^\infty dx\, x^2 e^{-x^2} = e^{-y^2}\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{4y} + \dots\right).$$

5. Un gas ideal monoatómico, compuesto por partículas de masa m, está encerrado en un recipiente de volumen V. El gas está en reposo y en equilibrio térmico. El recipiente está aislado térmicamente. En $t = 0$, se abre un pequeño orificio de área $\mathcal{A}$ en la pared del recipiente y empieza un proceso de efusión. La presión exterior es nula. En todo momento se asume que el gas dentro del recipiente está en equilibrio térmico y en reposo, aunque su densidad, energía y temperatura varían lentamente con el tiempo. Recordar que para un gas ideal monoatómico en reposo, la temperatura se define a través de la energía según la relación $E = \frac{3}{2}NkT$.

   a) Si la temperatura es T y el número de partículas dentro del recipiente es N, calcular $\dot{N}/N$. (Cuidado con el signo. Chequear las unidades).
   b) Bajo las mismas condiciones, calcular $\dot{E}/E$, donde E es la energía del gas en el recipiente. Mostrar que $\dot{E}/E = \alpha\dot{N}/N$. Dar el valor de la constante α.
   c) Mostrar que $\dot{T}/T = \gamma\dot{N}/N$. Dar el valor de la constante γ.
   d) La temperatura del gas en el recipiente ¿aumenta o disminuye?
   e) Calcular $T(t)$. Inicialmente $T(0) = T_0$.

6. Una caja contiene un gas ideal monoatómico de partículas de masa m, a temperatura T y densidad n. Durante un breve intervalo de tiempo Δt, un pequeño orificio de área $\mathcal{A}$ comunica la caja con un recipiente térmicamente aislado, inicialmente vacío.



   a) ¿Cuál es el flujo de partículas hacia el recipiente y cuál es el flujo de energía? (Despreciar el flujo de las partículas que regresan desde el recipiente hacia la caja. Despreciar cualquier variación de T y n durante el período en el que está abierta la comunicación).
   b) Una vez cerrada la comunicación entre la caja y el recipiente, el gas en el recipiente alcanza eventualmente el equilibrio. ¿Cuál es su temperatura final?

Algunas integrales útiles

Si f es la distribución de Maxwell–Boltzmann centrada en $\mathbf{p}_0 = m\mathbf{u} = 0$,

$$f(p) = \frac{n}{(2m\pi kT)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right),$$

entonces:

$$\int d^3p\ f(p) = n,$$

$$\int d^3p\ p_i p_j\ f(p) = \delta_{ij} mnkT,$$

$$\int d^3p\ p_i p_j p_k p_l\, f(p) = (\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jl})\ n(mkT)^2,$$

$$\int d^3p\ p^s\ f(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,(2mkT)^{s/2}\, n\, \Gamma\left(\tfrac{s+3}{2}\right).$$

Notar que la integral de un número impar de componentes del impulso siempre es cero, por simetría. Si se trata de hacer integrales con $m\mathbf{u} \neq 0$, es decir, con la gaussiana no centrada, hay que hacer el cambio de variable $\mathbf{p} \to \mathbf{p} + m\mathbf{u}$, que centra la gaussiana pero desplaza las componentes del impulso que se están promediando, lo que da lugar a integrales de órdenes más bajos.