

Física Teórica 3 – primer cuatrimestre de 2025

Guía 7: cadena de Ising abierta*

■ **Problema 2.** Considere una cadena abierta de N espines.

- a) Muestre que la función de partición está dada por $Z_N = \text{Tr}(\mathbf{q}^{N-1} \mathbf{Q})$, donde $\mathbf{q}$ es la matriz definida en el Problema 1 y $\mathbf{Q}$ es la matriz con elementos $Q_{ss'} = e^{\frac{1}{2}b(s+s')} = y^{\frac{1}{2}(s+s')}$.
- b) Para calcular Z_N , es necesario conocer los elementos de $\mathbf{q}^{N-1}$. Usando notación de Dirac, $\mathbf{q}^k = \lambda_+^k (|+\rangle \langle +|) + \lambda_-^k (|-\rangle \langle -|)$, donde $\mathbf{q}|\pm\rangle = \lambda_\pm |\pm\rangle$. Como la matriz $\mathbf{q}$ es simétrica, es suficiente introducir un sólo conjunto de autovectores. Puesto que son vectores ortonormales en el plano, $|+\rangle$ y $|-\rangle$ tienen componentes $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ y $(\sin \varphi, -\cos \varphi)$, respectivamente. Demuestre que

$$\cot 2\varphi = e^{2K} \sinh b. \quad (1)$$

- c) Con estos resultados, calcule explícitamente Z_N .
- d) Muestre que $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z_N = \log \lambda_+$, de modo que, en ese límite, se recuperan los mismos resultados que para la cadena cerrada.

■ Definamos $K = \beta J$ y $b = \beta \mu B$, como en el Problema 1. La función de partición es

$$Z_N = \sum_{\{s\}} e^{K s_1 s_2} e^{b s_1} e^{K s_2 s_3} e^{b s_2} \dots e^{K s_{N-2} s_{N-1}} e^{b s_{N-2}} e^{K s_{N-1} s_N} e^{b s_{N-1}} e^{b s_N}. \quad (2)$$

Podemos escribir el término general en esta suma como

$$e^{\frac{1}{2} b s_1} e^{K s_1 s_2} e^{\frac{1}{2} b (s_1 + s_2)} e^{K s_2 s_3} e^{\frac{1}{2} b (s_2 + s_3)} \times \dots \times e^{K s_{N-2} s_{N-1}} e^{\frac{1}{2} b (s_{N-2} + s_{N-1})} e^{K s_{N-1} s_N} e^{\frac{1}{2} b (s_{N-1} + s_N)} e^{\frac{1}{2} b s_N}. \quad (3)$$

Introduciendo la matriz de transferencia $\mathbf{q}$, queda

$$e^{\frac{1}{2} b s_1} q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \dots q_{s_{N-2} s_{N-1}} q_{s_{N-1} s_N} e^{\frac{1}{2} b s_N} = q_{s_1 s_2} q_{s_2 s_3} \dots q_{s_{N-2} s_{N-1}} q_{s_{N-1} s_N} Q_{s_N s_1}, \quad (4)$$

donde $Q_{ss'} = y^{\frac{1}{2}(s+s')}$, con $y = e^b$. Luego,

$$Z_N = \text{Tr}(\mathbf{q}^{N-1} \mathbf{Q}). \quad (5)$$

Cuando calculamos la función de partición para la cadena cerrada, sólo fue necesario conocer los autovalores de $\mathbf{q}$,

$$\lambda_\pm = e^K \left(\cosh b \pm \sqrt{\sinh^2 b + e^{-4K}} \right). \quad (6)$$

*zanellaj@df.uba.ar

Ahora necesitamos conocer todas las componentes de $\mathbf{q}^{N-1}$. La matriz $\mathbf{q}$ es simétrica. Usando la notación de Dirac, sean $|+\rangle$ y $|-\rangle$ sus autovectores normalizados, correspondientes, respectivamente, a λ_+ y λ_- . Entonces, la matriz $\mathbf{q}$ puede escribirse como

$$\mathbf{q} = \lambda_+ (|+\rangle \langle +|) + \lambda_- (|-\rangle \langle -|). \quad (7)$$

Esta notación nos evita tener que diagonalizar explícitamente la matriz $\mathbf{q}$. Como los autovectores son ortonormales, es fácil ver que

$$\mathbf{q}^k = \lambda_+^k (|+\rangle \langle +|) + \lambda_-^k (|-\rangle \langle -|). \quad (8)$$

Para poder avanzar, necesitamos calcular los autovectores $|\pm\rangle$. Empezaremos por escribir las ecuaciones que determinan los autovectores sin normalizar $|V_\pm\rangle$. Arbitrariamente, podemos elegir sus primeras componentes iguales a 1:

$$|V_\pm\rangle = (1, \alpha_\pm)^T. \quad (9)$$

Entonces,

$$xy - \lambda_\pm + \alpha_\pm x^{-1}. \quad (10)$$

Esto implica

$$\alpha_\pm = -e^{2K} \sinh b \pm \sqrt{1 + (e^{2K} \sinh b)^2}. \quad (11)$$

Así,

$$|V_\pm\rangle = \left(1, -z \pm \sqrt{1 + z^2}\right)^T, \quad (12)$$

donde $z = e^{2K} \sinh b$. Puesto que los autovectores $|\pm\rangle$ son vectores ortonormales en el plano, debe ser posible encontrar un ángulo φ tal que

$$|+\rangle = (\cos \varphi, \sin \varphi)^T, \quad |-\rangle = (\sin \varphi, -\cos \varphi)^T. \quad (13)$$

Para calcular φ es suficiente con los autovectores sin normalizar:

$$\tan \varphi = \alpha_+ = -\frac{1}{\alpha_-}. \quad (14)$$

Es decir,

$$\tan \varphi = -z + \sqrt{1 + z^2}. \quad (15)$$

No es especialmente difícil escribir esta relación en términos más simples: $\cot 2\varphi = z$. Por construcción, $0 \leq \varphi \leq \frac{1}{2}\pi$. Así,

$$\cos 2\varphi = \frac{z}{\sqrt{1 + z^2}}, \quad \sin 2\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}. \quad (16)$$

Volviendo a la Ec. (5), luego de unos cálculos que no ofrecen mayor dificultad, obtenemos

$$Z_N = \lambda_+^{N-1} \left[\cosh b + \frac{e^{-2K} + \sinh^2 b}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b}} \right] + \lambda_-^{N-1} \left[\cosh b - \frac{e^{-2K} + \sinh^2 b}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b}} \right]. \quad (17)$$

En el límite termodinámico, lo que nos interesa es la energía libre por espín:

$$-\frac{\beta F}{N} = \frac{1}{N} \log Z_N. \quad (18)$$

Para analizar esta expresión cuando $N \rightarrow \infty$, reescribamos la Ec. (17) como

$$Z_N = \lambda_+^{N-1} \left[\cosh b + \frac{e^{-2K} + \sinh^2 b}{\sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b}} \right] \times \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+} \right)^{N-1} \left(\frac{\cosh b \sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b} - e^{-2K} - \sinh^2 b}{\cosh b \sqrt{e^{-4K} + \sinh^2 b} + e^{-2K} + \sinh^2 b} \right) \right\}. \quad (19)$$

Debido a que $\lambda_+ > |\lambda_-|$, cuando $N \rightarrow \infty$,

$$-\frac{\beta F}{N} \rightarrow \log \lambda_+, \quad (20)$$

que es el mismo resultado que obtuvimos en el Problema 1 para la cadena abierta.