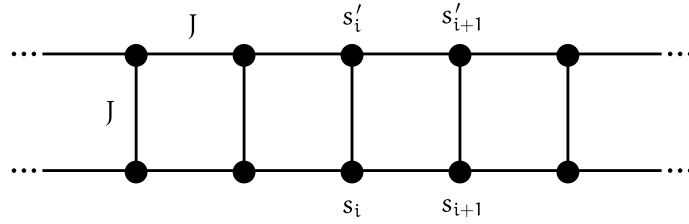


Física Teórica 3 – primer cuatrimestre de 2025

Guía 7: escalera de Ising*

■ **Problema 10.** Use el método de la matriz de transferencia para calcular la función de partición de la doble cadena cerrada que muestra la figura. La cadena tiene N eslabones y el campo externo es nulo. Si $K = \beta J$, muestre que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log Z_N = \frac{1}{2} \log \left[2 \cosh K \left(\cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right) \right]. \quad (1)$$



Ayuda: la matriz de transferencia puede elegirse de forma que sea centrosimétrica, lo que garantiza que pueda llevarse a una forma diagonal por bloques.

■ El estado de la cadena puede ser especificado a través de los pares de valores $\mathbf{S}_i = (s_i, s'_i)$, con $i = 1, \dots, N$. Si $K = \beta J$, el hamiltoniano es

$$-\beta H(\{\mathbf{S}\}) = K \sum_{i=1}^N (s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1} + s_i s'_i), \quad (2)$$

con la convención de que $\mathbf{S}_{N+1} = \mathbf{S}_1$. Aunque no es esencial, para que la matriz de transferencia sea simétrica, escribamos la expresión anterior como

$$-\beta H(\{\mathbf{S}\}) = K \sum_{i=1}^N \left[s_i s_{i+1} + s'_i s'_{i+1} + \frac{1}{2} (s_i s'_i + s_{i+1} s'_{i+1}) \right]. \quad (3)$$

Entonces,

$$e^{-\beta H(\{\mathbf{S}\})} = q_{i(\mathbf{S}_1)i(\mathbf{S}_2)} q_{i(\mathbf{S}_2)i(\mathbf{S}_3)} \dots q_{i(\mathbf{S}_N)i(\mathbf{S}_1)}, \quad (4)$$

con las asignaciones $i(1, 1) = 1$, $i(1, -1) = 2$, $i(-1, 1) = 3$, and $i(-1, -1) = 4$, y donde

$$q_{i(\mathbf{S}_j)i(\mathbf{S}_k)} = e^{K[s_j s_k + s'_j s'_k + \frac{1}{2}(s_j s'_j + s_k s'_k)]}. \quad (5)$$

Si definimos $x = e^K$, tendremos

$$q = \begin{pmatrix} x^3 & 1 & 1 & x^{-1} \\ 1 & x & x^{-3} & 1 \\ 1 & x^{-3} & x & 1 \\ x^{-1} & 1 & 1 & x^3 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

*zanellaj@df.uba.ar

En términos de $\mathbf{q}$, la función de partición está dada por $Z_N = \text{Tr } \mathbf{q}^N$. Llamemos λ_i a los autovalores de $\mathbf{q}$. Luego,

$$\text{Tr } \mathbf{q}^N = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^N. \quad (7)$$

Todo lo que resta es calcular los autovalores. La cuestión es hacerlo de una manera práctica.

La matriz de transferencia $\mathbf{q}$ pertenece a la clase de matrices centrosimétricas, es decir, son simétricas respecto a su centro. Entonces, como mostraremos a continuación, mediante un cambio de base ortonormal, es posible reducir $\mathbf{q}$ a una forma diagonal por bloques. Esto simplifica enormemente el cálculo de los autovalores, porque pasamos de una matriz de 4×4 a dos matrices de 2×2 .

Las matrices centrosimétricas conmutan con la llamada matriz de intercambio $\mathbf{J}$. En cuatro dimensiones,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

La matriz $\mathbf{J}$ es real y simétrica, de modo que estamos seguros de que puede diagonalizarse. Por otro lado, $\mathbf{J}^2 = \mathbf{I}$, de manera que sus autovalores son ± 1 y, además, $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$. Para dimensión 4, la matriz $\mathbf{J}$ tiene dos autovalores iguales a -1 y dos autovalores iguales a 1 . Si $\mathbf{U}$ es la matriz de cambio de base, la forma diagonal de $\mathbf{J}$ es

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{U}^T \mathbf{J} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

De la condición de conmutabilidad $\mathbf{J}\mathbf{q} = \mathbf{q}\mathbf{J}$ y del hecho de que $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{J}$, se deduce que

$$\mathbf{U}^T \mathbf{q} \mathbf{U} = \tilde{\mathbf{J}} \mathbf{U}^T \mathbf{q} \mathbf{U} \tilde{\mathbf{J}}. \quad (10)$$

Es fácil ver que, si

$$\mathbf{U}^T \mathbf{q} \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right), \quad (11)$$

la condición (10) se traduce en lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \hline -\mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right). \quad (12)$$

Por lo tanto,

$$\mathbf{U}^T \mathbf{q} \mathbf{U} = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{D} \end{array} \right), \quad (13)$$

que es lo que queríamos demostrar.

Los autovectores de $\mathbf{J}$, y con ellos la matriz de cambio de base, son muy fáciles de obtener. Correspondientes al autovalor -1 , tenemos

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1, 0)^T; \quad (14)$$

y correspondientes al autovalor 1 ,

$$\mathbf{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{v}_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0)^T. \quad (15)$$

Entonces,

$$\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Así se obtiene

$$\mathbf{U}^T \mathbf{q} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{q}^- & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{q}^+ \end{pmatrix}, \quad (17)$$

donde

$$\mathbf{q}^- = \begin{pmatrix} 2e^K \sinh 2K & 0 \\ 0 & 2e^{-K} \sinh 2K \end{pmatrix}, \quad \mathbf{q}^+ = \begin{pmatrix} 2e^K \cosh 2K & 2 \\ 2 & 2e^{-K} \cosh 2K \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Los autovalores de $\mathbf{q}^-$ y $\mathbf{q}^+$ dan los cuatro autovalores de $\mathbf{q}$. Los autovalores de $\mathbf{q}^-$ se leen directamente:

$$\lambda_+^- = 2e^K \sinh 2K, \quad \lambda_-^- = 2e^{-K} \sinh 2K. \quad (19)$$

Los autovalores de $\mathbf{q}^+$ están determinados por la siguiente ecuación:

$$\lambda^2 - 4 \cosh K \cosh 2K \lambda + 4 \sinh^2 2K = 0. \quad (20)$$

Después de algunas simplificaciones, resulta

$$\lambda_{\pm}^+ = 2 \cosh K \left(\cosh 2K \pm \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K} \right). \quad (21)$$

Con esto, tenemos todo lo necesario para evaluar Z_N .

Respecto al límite $N \rightarrow \infty$, lo que debemos hacer es determinar el autovalor más grande en valor absoluto. Debido a que q tiene elementos positivos, el teorema de Perron-Frobenius garantiza que este autovalor es único, real y positivo. Sin embargo, cuál de los cuatro autovalores es este autovalor puede depender del valor de K . Es claro que todos los autovalores son reales, que λ_+^+ es positivo y que $\lambda_+^+ > \lambda_-^+$. Debido a que los autovalores $\lambda_{\pm}^-$ son negativos si $K < 0$, y, si $K > 0$, $\lambda_+^- > \lambda_-^- > 0$, sólo necesitamos comparar λ_+^+ y λ_+^- para $K > 0$. Por un lado,

$$\lambda_+^+ > 2 \cosh K (\cosh 2K + 2 \sinh^2 K) = 2 \cosh K (2 \cosh 2K - 1). \quad (22)$$

Mientras que

$$\lambda_+^- = 2e^K \sinh 2K = 4e^K \cosh K \sinh K. \quad (23)$$

Entonces, escribiendo $e^K = x$,

$$\frac{\lambda_+^+}{\lambda_+^-} > \frac{2 \cosh 2K - 1}{2e^K \sinh K} = \frac{x^2 + x^{-2} - 1}{x^2 - 1} > 1. \quad (24)$$

Por lo tanto, λ_+^+ es el autovalor más grande en valor absoluto para todo K . Esto implica que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} \log Z_N = \frac{1}{2} \log \lambda_+^+ = \frac{1}{2} \log \left[2 \cosh K (\cosh 2K + \sqrt{1 + 4 \sinh^4 K}) \right]. \quad (25)$$

Cuando el campo externo no es cero, la matriz de transferencia ya no es centrosimétrica. Uno de sus autovalores puede encontrarse por simple inspección, pero los otros tres son las raíces de una cúbica. Aunque la ecuación puede ser resuelta algebraicamente, las expresiones finales para los autovalores son muy complicadas.