Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2025

Guía 7 bis: *El modelo de Ising por otros medios.*

1. Considere una cadena de Ising lineal, cerrada, con $N = 2^k$ espines. El conjunto de todos los espines, $\{s_i\}_N = \{s_1, s_2, \ldots, s_N\}$, puede separarse en los espines que ocupan posiciones pares y los espines que ocupan posiciones impares: $\{s_i\}_N = \{s_{2i}\}_{\frac{1}{2}N} \cup \{s_{2i+1}\}_{\frac{1}{2}N}$. El hamiltoniano es una función del conjunto de todos los espines,

$$\mathcal{H}\big(\{s_i\}_N, b, K\big) = -\beta H\big(\{s_i\}_N, b, K\big) = K \sum_{i=1}^{N} s_i s_{i+1} + b \sum_{i=1}^{N} s_i, \tag{1}$$

con $s_{N+1} = s_1$. Asumir $b, K \geqslant 0$. La distribución de probabilidad canónica es

$$P\big(\{s_i\}_N, b, K\big) = \frac{e^{\mathcal{H}(\{s_i\}_N, b, K)}}{Z(N, b, K)}, \tag{2}$$

donde la función de partición está dada por

$$Z(N, b, K) = \sum_{\{s_i\}_N} e^{\mathcal{H}(\{s_i\}_N, b, K)}. \tag{3}$$

El primer objetivo del problema es eliminar de la descripción a los espines impares, calculando la probabilidad marginal de los espines pares.

a) Sumando la probabilidad sobre los espines impares, muestre que la probabilidad de los espines pares tiene la misma forma que la probabilidad original,

$$\sum_{\{s_{2i+1}\}_N} P\big(\{s_i\}_N, b, K\big) = P\big(\{s_{2i}\}_{\bar{N}}, \bar{b}, \bar{K}\big) = \frac{e^{\mathcal{H}\left(\{s_{2i}\}_{\bar{N}}, \bar{b}, \bar{K}\right)}}{Z(\bar{N}, \bar{b}, \bar{K})}, \tag{4}$$

con $\bar{N} = \frac{1}{2}N$ y acoplamientos $\bar{b} = \bar{b}(b, K)$ y $\bar{K} = \bar{K}(b, K)$. Estas son las ecuaciones de transformación del grupo de renormalización. Resulta más cómodo expresar estas ecuaciones en términos de $\eta = e^{-2b}$ y $\tau = e^{-4K}$. Escriba las ecuaciones de transformación para estos parámetros.

Si $N = 2^k$, con k tan grande como se quiera, la transformación puede iterarse indefinidamente, dando lugar a una secuencia de parámetros renormalizados, $\eta^{(n)}$ y $\tau^{(n)}$. Un punto fijo de la transformación es un par de valores (η^*, τ^*) tales que $\bar{\eta}(\eta^*, \tau^*) = \eta^*$ y $\bar{\tau}(\eta^*, \tau^*) = \tau^*$. Suponga que los parámetros iniciales difieren poco de los de un punto fijo, $\eta = \eta^* + \delta\eta$ y $\tau = \tau^* + \delta\tau$, y que la transformación se linealiza alrededor de este punto. Se dice que el punto fijo es linealmente estable con respecto a las perturbaciones en η si $\delta\eta^{(n)} \to 0$ cuando $n \to \infty$, e inestable si $|\delta\eta^{(n)}| \to \infty$. Análogamente, para τ.

b) Encuentre todos los puntos fijos en la región $[0, 1] \times [0, 1]$ y estudie su estabilidad lineal. En particular, muestre que $(\eta^*, \tau^*) = (1, 0)$ es un punto fijo linealmente inestable respecto de los dos parámetros.

El valor medio de la magnetización por espín tiene que ser el mismo tanto si se lo calcula con la probabilidad detallada como si se lo calcula con la probabilidad del sistema decimado. Eso significa que

$$\frac{1}{N}\frac{\partial \log Z(N,b,K)}{\partial b} = \frac{1}{\bar{N}}\frac{\partial \log Z(\bar{N},\bar{b},\bar{K})}{\partial \bar{b}}. \tag{5}$$

En los dos miembros de la ecuación aparece, en realidad, la misma función

$$m(N,b,K) = \frac{1}{N}\frac{\partial \log Z(N,b,K)}{\partial b}. \tag{6}$$

De forma que lo que en verdad se está afirmando es que

$$m(N,b,K) = m(\bar{N},\bar{b},\bar{K}). \tag{7}$$

Además, cuando $N \to \infty$, uno espera que el sistema sea extensivo y, por lo tanto, la función $m(N,b,K)$ debe tender a una función independiente de N.

c) Use la transformación de grupo de renormalización para mostrar que, en el límite $N \to \infty$, cerca de $T = 0$ y $B = 0$, la función m satisface la siguiente ley de escala

$$m(b,\tau) \simeq \mathcal{M}\big(b\tau^{-\Delta}\big)\,. \tag{8}$$

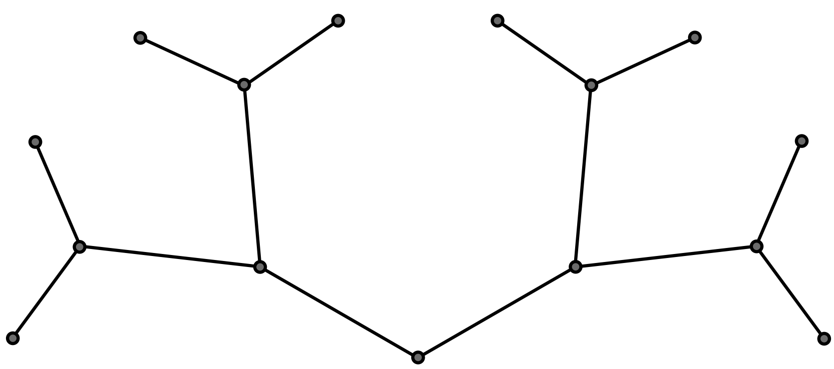
Encuentre el exponente Δ y compare con la solución exacta en el mismo límite.

d) Mediante los mismos argumentos y las mismas condiciones, demuestre que la longitud de correlación se comporta como

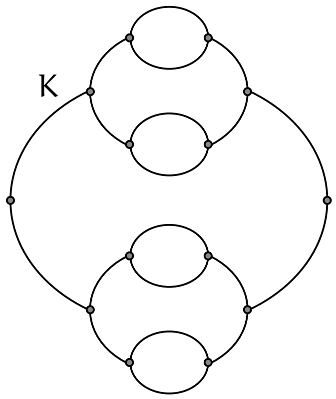
$$\xi(b,\tau) \simeq \tau^{-\nu}\mathcal{X}\big(b\tau^{-\Delta}\big)\,. \tag{9}$$

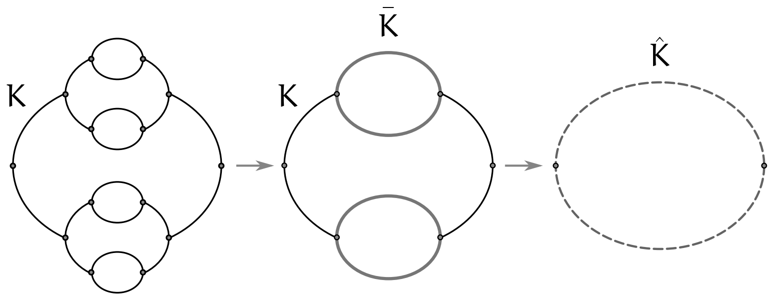
Encuentre el exponente ν y compare con la solución exacta (Problema 5 de la Guía 7).

2. Calcule la función de partición del sistema de la figura. Es un modelo de Ising con un espín en cada nodo. La energía de interacción entre espines vecinos es $\epsilon(s,s') = -Jss'$ y hay un campo externo B. Se definen $K = \beta J$ y $b = \beta\mu B$. La expresión de Z tiene que conducir manifiestamente a una expansión en potencias de $x = e^K$ e $y = e^b$. *Ayuda*: elimine espines desde las ramas exteriores; el campo se renormaliza mientras que la constante de acoplamiento no.

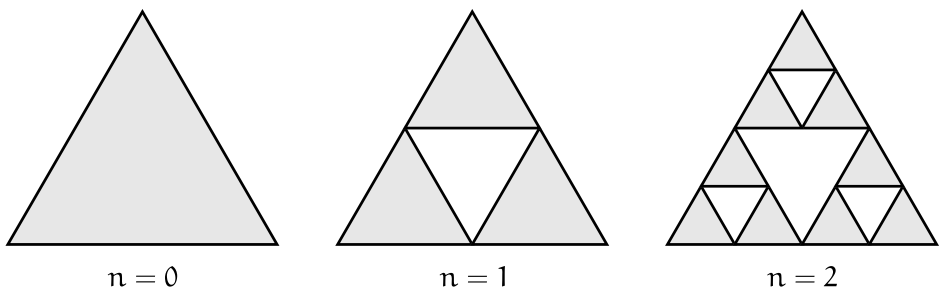


3. Calcule la función de partición del sistema de la figura de la izquierda. Es un modelo de Ising con un espín en cada nodo. La energía de interacción entre espines vecinos es $\epsilon(s, s') = -Jss'$ por cada enlace. Se define $K = \beta J$. El campo externo es nulo. La expresión de Z tiene que conducir manifiestamente a una expansión en potencias de $x = e^K$. *Ayuda*: elimine espines paso a paso, como en la figura de la derecha.

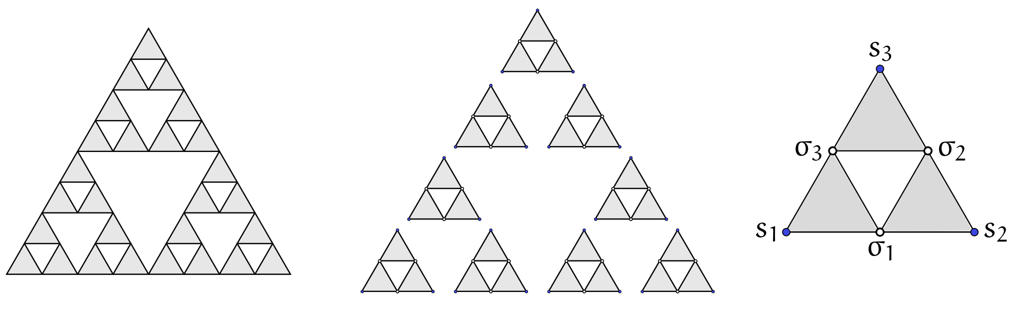




4. Una red de Ising se construye iterativamente de acuerdo al siguiente algoritmo: la red de nivel $n = 0$ es un triángulo equilátero, como en la figura de la izquierda. En la primera iteración, para formar la red de nivel $n = 1$, se toma el punto medio de cada lado del triángulo original y se construyen tres nuevos triángulos, como en la figura central. En la segunda iteración, para formar la red de nivel $n = 2$, se toma cada uno de los tres triángulos sombreados y se les aplica el procedimiento del paso anterior, como en la figura de la derecha; y así sucesivamente. En cada vértice hay un espín.



La red de nivel $n > 0$ es un agregado de 3^{n-1} bloques elementales,



donde los espines σ_i son los últimos en haber sido incorporados a la red. La energía de interacción entre espines vecinos es $\epsilon(s, s') = -Jss'$. Se define $K = \beta J$.

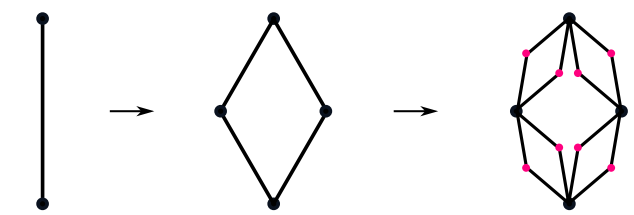
Considere la red de nivel n, con acoplamiento K_n. El objetivo del problema es encontrar una relación de recurrencia para la función de partición,

$$Z_n(K_n) = \alpha_n(K_n)\ Z_{n-1}(K_{n-1})\,, \quad K_{n-1} = \bar{K}\,(K_n)\,. \tag{10}$$

En particular, escriba la función de partición para la red de nivel dos. *Ayuda*: exprese $\bar{K}$ y α_n de manera compacta en términos de dos funciones de K, tales que

$$\bar{K}(K) = \log \frac{A(K)}{B(K)}.$$

5. Una red de Ising se construye iterativamente. El nivel cero de la iteración, $n = 0$, consiste en dos espines, como muestra la primera figura. El nivel uno de la iteración, $n = 1$, se obtiene reemplazando el enlace original por cuatro nuevos enlaces y, al mismo tiempo, introduciendo dos nuevos espines, como muestra la figura central. El nivel dos de la iteración, $n = 2$, se consigue reemplazando cada uno de los cuatro enlaces del nivel previo por cuatro nuevos enlaces, e introduciendo dos espines adicionales por cada enlace del nivel anterior, como muestra la figura de la derecha.



$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$

En general, el nivel n se construye a partir del nivel $n-1$ reemplazando cada uno de los enlaces de este nivel con cuatro nuevos enlaces e introduciendo un par de nuevos espines por cada enlace de la red original. Al pasar del nivel n al nivel $n+1$, se agregan dos espines por cada enlace del nivel n y el número de enlaces se multiplica por cuatro. El número de rombos elementales en el nivel n es igual al número de enlaces en el nivel $n-1$. El nivel cero tiene un enlace; el nivel uno, cuatro; el nivel dos, 16; y el nivel n tiene 4^n enlaces. Cada par de espines vecinos interactúa a través de un término de la forma

$$\epsilon(s_1, s_2) = -Js_1s_2 - \tfrac{1}{2}\mu B(s_1 + s_2). \tag{11}$$

El hamiltoniano es la suma de todos estos términos. Se definen $K = \beta J$ y $b = \beta\mu B$.

Considere la red de nivel n, con acoplamientos K_n y b_n. Encuentre una relación de recurrencia para la función de partición de la forma

$$Z_n(K_n, b_n) = c_n(K_n, b_n)\ Z_{n-1}(K_{n-1}, b_{n-1})\,, \tag{12}$$

donde $K_{n-1} = f(K_n, b_n)\,, b_{n-1} = g(K_n, b_n)\,.$ En particular, escriba la función de partición para la red de nivel dos.