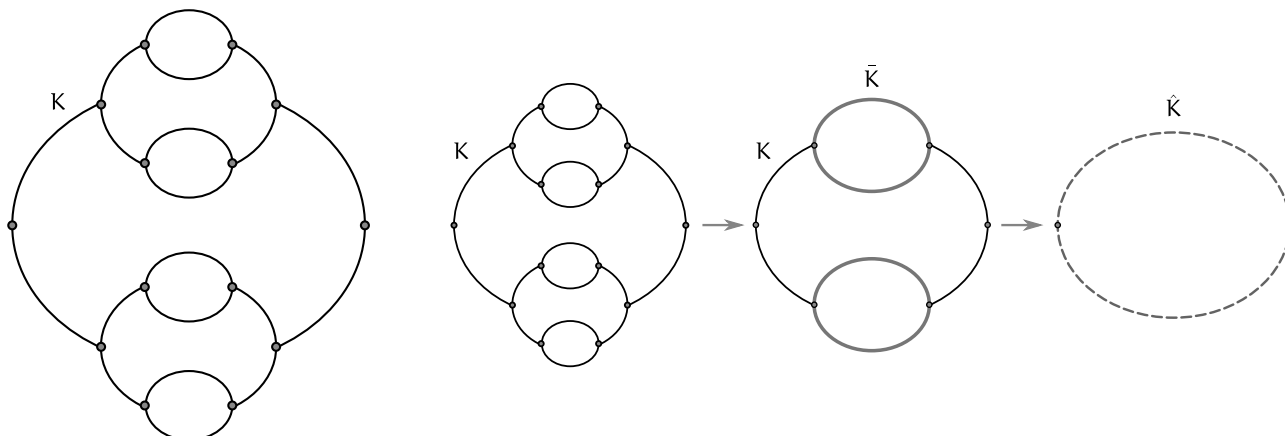
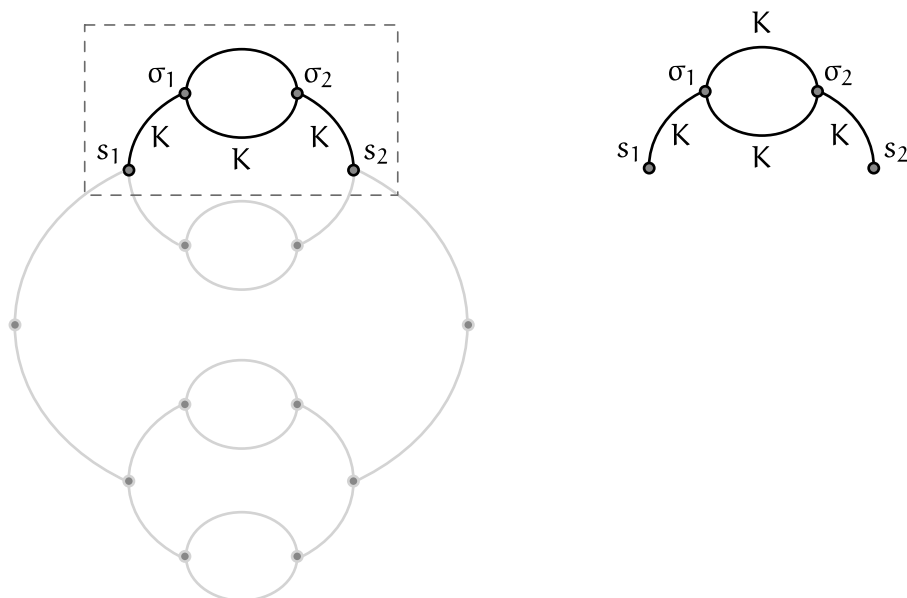


■ **Problema 3.** Calcule la función de partición del sistema de la figura de la izquierda. Es un modelo de Ising con un espín en cada nodo. La energía de interacción entre espines vecinos es $\epsilon(s, s') = -Jss'$ por cada enlace. Se define $K = \beta J$. El campo externo es nulo. La expresión de Z tiene que conducir manifiestamente a una expansión en potencias de $x = e^K$. *Ayuda:* elimine espines paso a paso, como en la figura de la derecha.



■ **Solución.** La idea del problema es ir eliminando espines sistemáticamente. Consideremos el siguiente conjunto de espines.



En la función de partición, los espines σ de este gráfico aparecen en un factor de la forma

$$e^{K(s_1\sigma_1 + s_2\sigma_2 + 2\sigma_1\sigma_2)}. \quad (1)$$

*zanellaj@df.uba.ar

Este es el único lugar en donde aparecen estos dos espines σ . La suma sobre los espines σ genera un acoplamiento efectivo entre los espines s . En principio, buscamos que ese acoplamiento tenga la misma forma que los acoplamientos originales. De modo que la siguiente ecuación tiene carácter tentativo:

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} e^{K(s_1 \sigma_1 + s_2 \sigma_2 + 2\sigma_1 \sigma_2)} = 2 \left[e^{2K} \cosh K(s_1 + s_2) + e^{-2K} \cosh K(s_1 - s_2) \right] = c e^{\bar{K} s_1 s_2}. \quad (2)$$

Las ecuaciones que determinan a c y $\bar{K}$ son

$$\begin{aligned} 2(e^{2K} \cosh 2K + e^{-2K}) &= c e^{\bar{K}}, \\ 2(e^{2K} + 2e^{-2K} \cosh 2K) &= c e^{-\bar{K}}. \end{aligned} \quad (3)$$

De aquí obtenemos

$$2\bar{K} = \log \frac{A}{B}, \quad c^2 = AB, \quad (4)$$

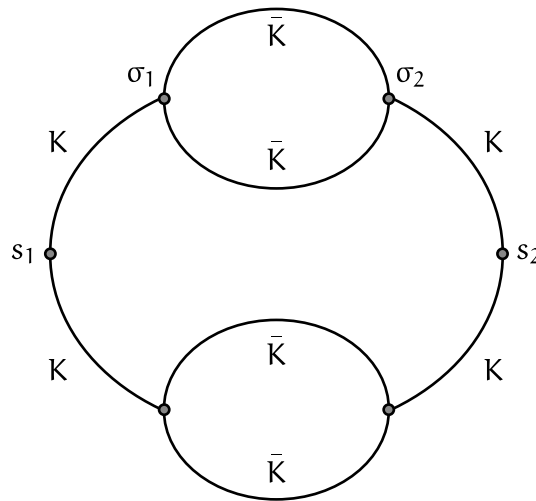
donde

$$A = 2(e^{2K} \cosh 2K + e^{-2K}), \quad B = 2(e^{2K} + e^{-2K} \cosh 2K). \quad (5)$$

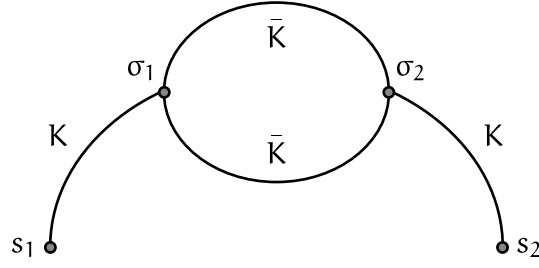
Por cada loop eliminado, se genera un factor c . De esta forma, la función de partición original puede escribirse como

$$Z = c^4 \bar{Z}, \quad (6)$$

donde $\bar{Z}$ es la función de partición del sistema de la figura.



(Hemos renombrado los espines). Para calcular $\bar{Z}$, podemos repetir el proceso de eliminación, considerando ahora el subconjunto de espines de la siguiente figura.



Los espines σ aparecen en la función de partición $\bar{Z}$ a través de un factor de la forma

$$e^{K(s_1\sigma_1+s_2\sigma_2)+2\bar{K}\sigma_1\sigma_2}. \quad (7)$$

La suma sobre los espines σ genera un acoplamiento efectivo entre los espines s :

$$\sum_{\sigma_1, \sigma_2} e^{K(s_1\sigma_1+s_2\sigma_2)+2\bar{K}\sigma_1\sigma_2} = 2 \left[e^{2\bar{K}} \cosh K(s_1 + s_2) + e^{-2\bar{K}} \cosh K(s_1 - s_2) \right] = \hat{c} e^{\hat{K}s_1s_2}. \quad (8)$$

De aquí se obtiene

$$2\hat{K} = \log \frac{C}{D}, \quad \hat{c}^2 = CD, \quad (9)$$

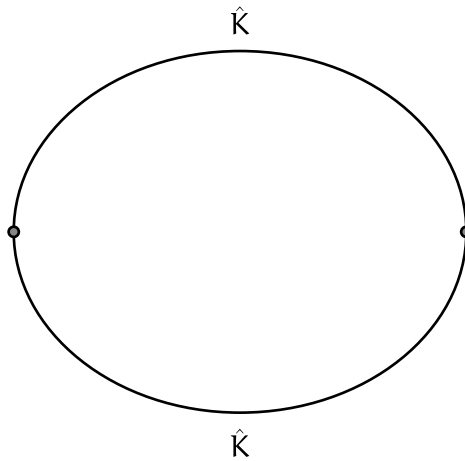
donde

$$C = 2 \left(e^{2\bar{K}} \cosh 2K + e^{-2\bar{K}} \right), \quad D = 2 \left(e^{2\bar{K}} + e^{-2\bar{K}} \cosh 2K \right). \quad (10)$$

Luego, debido a que se eliminan dos de estos loops,

$$\bar{Z} = \hat{c}^2 \hat{Z}, \quad (11)$$

donde $\hat{Z}$ es la función de partición del sistema de la figura.



Este último cálculo es trivial,

$$\hat{Z} = 4 \cosh 2\hat{K}. \quad (12)$$

Finalmente,

$$Z = 4c^4 \hat{c}^2 \cosh 2\hat{K}. \quad (13)$$

Esto se puede escribir de manera más explícita:

$$2 \cosh 2\hat{K} = 2 \cosh \log \frac{C}{D} = \frac{C}{D} + \frac{D}{C}, \quad (14)$$

$$2\hat{c}^2 \cosh 2\hat{K} = C^2 + D^2, \quad (15)$$

$$\begin{aligned} C^2 + D^2 &= 4 \left[4 \cosh 2K + (1 + \cosh^2 2K) \left(e^{4\bar{K}} + e^{-4\bar{K}} \right) \right] \\ &= 4 \left\{ 4 \cosh 2K + (1 + \cosh^2 2K) \left[\left(\frac{A}{B} \right)^2 + \left(\frac{B}{A} \right)^2 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (16)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} Z &= 8 \left\{ 4A^2B^2 \cosh 2K + (1 + \cosh^2 2K) [A^4 + B^4] \right\} \\ &= (A^2 + B^2 \cosh 2K)^2 + (A^2 \cosh 2K + B^2)^2 \\ &= 16 \left[(e^{2K} \cosh 2K + e^{-2K})^2 + (e^{-2K} \cosh 2K + e^{2K})^2 \cosh 2K \right]^2 \\ &\quad + 16 \left[(e^{2K} \cosh 2K + e^{-2K})^2 \cosh 2K + (e^{-2K} \cosh 2K + e^{2K})^2 \right]^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Expandir todos los términos de esta expresión para dejar escrita una serie de potencias en la variable $x = e^K$ sería bastante tedioso. Lo importante es notar a simple vista que el resultado es en verdad una serie de potencias: no quedan logaritmos, ni divisiones por funciones de K . El resultado final, obtenido mediante un programa de cálculo simbólico, es

$$\begin{aligned} Z &= 2x^{20} + \frac{2}{x^{20}} + 20x^{16} + \frac{20}{x^{16}} + 80x^{14} + \frac{80}{x^{14}} + 158x^{12} + \frac{158}{x^{12}} + 416x^{10} \\ &\quad + \frac{416}{x^{10}} + 888x^8 + \frac{888}{x^8} + 1344x^6 + \frac{1344}{x^6} + 1824x^4 + \frac{1824}{x^4} + 2256x^2 + \frac{2256}{x^2} + 2408. \end{aligned} \quad (18)$$

En este problema hay 14 espines. La suma sobre 2^{14} estados es trivial para una computadora. En la siguiente iteración hay 30 espines. Aplicar en ese caso la relación de recurrencia no es mucho más complicado que lo que hicimos antes. Hacer la suma explícita sobre los $2^{30} \approx 10^9$ estados no es inalcanzable para una computadora, pero puede llevar algunas horas. La siguiente iteración tiene 62 espines. La suma exhaustiva es inviable para una computadora, pero la solución por recurrencia es sólo apenas más complicada.