Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2025

Primer recuperatorio resuelto*

■ **1**. Un gas ideal de partículas de masa m está en contacto con una superficie adsorbente. El gas está a temperatura T y presión P, y puede ser considerado como un reservorio. Las partículas adsorbidas se comportan como un gas ideal bidimensional. La energía de una partícula adsorbida es $\epsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m}p^2 + \epsilon_0$. Escriba la densidad superficial de partículas adsorbidas en función de T y P.

■ **Solución**. Hay dos sistemas en equilibrio que intercambian partículas: el gas usual tridimensional y el gas bidimensional confinado en la superficie. La fugacidad de los dos sistemas debe ser la misma. Para las partículas del gas tridimensional vale la relación

$$\log \mathcal{Z}_{3D} = \frac{zV}{\lambda^3}, \tag{1}$$

que implica

$$\frac{N_{3D}}{V} = \frac{z}{\lambda^3}. \tag{2}$$

Pero, por otro lado, $N_{3D}/V = \beta P$, de manera que

$$z = \beta P \lambda^3. \tag{3}$$

Como la fugacidad determina el número medio de partículas en la superficie, debemos encontrar una relación entre z y este número. El camino más sencillo para encontrar esta relación es la función de partición gran canónica. Para las partículas en la superficie, la función de partición canónica es

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}, \qquad Z_1 = \frac{A}{h^2}\int d^2p\ e^{-\beta(p^2/2m+\epsilon_0)} = \frac{A}{\lambda^2}e^{-\beta\epsilon_0}. \tag{4}$$

Por lo tanto, la función de partición gran canónica del gas en la superficie está dada por

$$\log \mathcal{Z}_{2D} = zZ_1 = \frac{zAe^{-\beta\epsilon_0}}{\lambda^2}. \tag{5}$$

Entonces, la densidad superficial de partículas es

$$\frac{N_{2D}}{A} = \frac{z}{A}\frac{\partial \log \mathcal{Z}_{2D}}{\partial z} = \frac{ze^{-\beta\epsilon_0}}{\lambda^2}. \tag{6}$$

Luego, sustituyendo la expresión (3) para la fugacidad,

$$\frac{N_{2D}}{A} = \beta P \lambda e^{-\beta\epsilon_0}. \tag{7}$$

*zanellaj@df.uba.ar

■ **2**. Considere un grafo con k nodos. Los nodos pueden estar activos o inactivos. Un nodo inactivo no puede estar conectado a ningún otro nodo. La energía de un nodo activo es ϵ_0 y la de un nodo inactivo es 0. Puede haber a lo sumo una arista entre cada par de nodos activos. La energía de cada arista es ϵ.

a) Encuentre la función de partición canónica (puede quedar una sumatoria sin evaluar).

b) Calcule el número medio de aristas cuando $k = 4$ (no pueden quedar sumatorias).

■ **Solución**. La suma sobre los estados puede descomponerse en una suma sobre los nodos activos y, una vez fijados estos nodos, en una suma sobre los grafos que pueden formarse sólo con estos nodos. Si hay ℓ nodos activos, existen $\binom{k}{\ell}$ formas de elegirlos. Luego,

$$Z = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{-\beta\epsilon_0\ell} Z_\ell, \tag{8}$$

donde Z_ℓ es la función de partición de un grafo de ℓ nodos. Esta expresión es conocida: es idéntica a la función de partición de un sistema de dos niveles con $\frac{1}{2}\ell(\ell-1)$ elementos:

$$Z_\ell = \left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}\ell(\ell-1)}. \tag{9}$$

Entonces,

$$Z = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{-\beta\epsilon_0\ell} \left(1 + e^{-\beta\epsilon}\right)^{\frac{1}{2}\ell(\ell-1)}. \tag{10}$$

Debemos encontrar una forma de extraer de aquí el número medio de aristas. Como es usual, tenemos que ver cuál es la derivada de $\log Z$ adecuada. Para eso, notemos que la función de partición, escrita por extenso, es

$$Z = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} e^{-\beta\epsilon_0\ell} \sum_{n=0}^{\frac{1}{2}\ell(\ell-1)} \binom{\frac{1}{2}\ell(\ell-1)}{n} e^{-\beta\epsilon n}. \tag{11}$$

En esta expresión, n es el número de aristas. Definamos $x = e^{-\beta\epsilon_0}$ e $y = e^{-\beta\epsilon}$. Entonces,

$$\langle n \rangle = y\frac{\partial \log Z}{\partial y} = \frac{y}{Z}\sum_{\ell=2}^{k} \tfrac{1}{2}\ell(\ell-1)\binom{k}{\ell} x^\ell \left(1+y\right)^{\frac{1}{2}\ell(\ell-1)-1}. \tag{12}$$

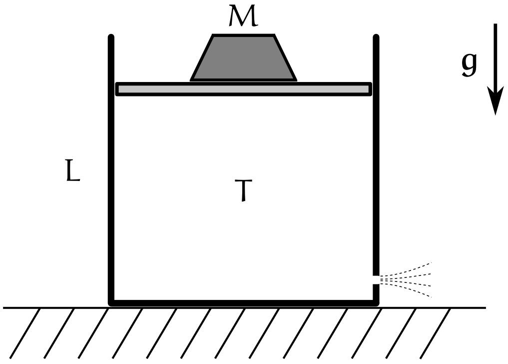
Cuando $k = 4$,

$$Z = 1 + 4x + 6x^2(1+y) + 4x^3(1+y)^3 + x^4(1+y)^6, \tag{13}$$

$$\langle n \rangle = 6yx^2\,\frac{1 + 2x(1+y)^2 + x^2(1+y)^5}{1 + 4x + 6x^2(1+y) + 4x^3(1+y)^3 + x^4(1+y)^6}. \tag{14}$$

Aunque no se tenga la expresión general (12), el número de nodos es lo suficientemente pequeño como para calcular el promedio de manera directa.

■ **3**. Un recipiente cúbico de lado L, fijo sobre una superficie horizontal, tiene un pistón móvil, como muestra la figura. Dentro del recipiente hay un gas ideal de partículas de masa m. En el exterior hay vacío. Muy cerca de la base del recipiente hay una pequeña abertura de área A. Sobre el pistón hay una pesa de masa M. La aceleración de la gravedad es g, y es tal que $\beta m g L \ll 1$, de manera que el efecto de la gravedad en la función de distribución del gas es despreciable. El pistón baja tan lentamente y la abertura es tan pequeña que el gas siempre puede considerarse en equilibrio. La temperatura T del gas se mantiene constante. Encuentre la velocidad a la que baja el pistón como función del tiempo si inicialmente está a una altura L.



■ **Solución**. Como el pistón baja muy lentamente, la presión del gas puede aproximarse por $P = Mg/L^2$. Por otro lado, la variación en el número de partículas es

$$\dot{N} = -A \int_{p_z \geqslant 0} d^3p \, \frac{p_z}{m} \, f(p), \tag{15}$$

donde $f(p)$ es la distribución de Maxwell-Boltzmann,

$$f(p) = \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \, e^{-\beta p^2/2m}, \tag{16}$$

y donde la normal a la abertura se ha tomado en la dirección z. Integrando en esféricas,

$$\dot{N} = -\frac{2\pi A}{m} \frac{n}{(2\pi m k T)^{3/2}} \int_0^1 d(\cos\theta) \, \cos\theta \int_0^\infty dp \, p^3 e^{-\beta p^2/2m} = -An \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Este es el resultado usual para la efusión de un gas. Debido a que la presión y la temperatura son constantes, $n = N/V = P/kT$ es constante. Entonces, puesto que $V = N/n$,

$$\dot{V} = \frac{\dot{N}}{n} = -A \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}. \tag{18}$$

A su vez, $\dot{V} = L^2 \dot{h}$, donde h es la altura del pistón. Así

$$\dot{h} = -\frac{A}{L^2} \left(\frac{kT}{2\pi m} \right)^{1/2}. \tag{19}$$

La velocidad es constante y, mientras estas cantidades no sean nulas, su magnitud no depende de M ni de g.