Física Teórica 3 — primer cuatrimestre de 2025

Segundo parcial resuelto*

■ **1**. Un recipiente de volumen constante V está dividido en dos compartimientos mediante un tabique móvil y conductor del calor. Los compartimientos tienen volúmenes variables V_1 y V_2. En el primer compartimiento, hay N bosones de espín s_1, mientras que en el segundo, hay N bosones de espín $s_2 > s_1$. Las degeneraciones son g_1 y g_2. Las dos clases de partículas tienen la misma masa m. El sistema está a temperatura T. Los dos gases están en el límite termodinámico. La idea es describir el comportamiento de la fracción V_1/V_2 como función de T.

a) Calcule V_1/V_2 a temperaturas lo suficientemente altas como para que valga el régimen clásico. Dé las condiciones para la validez del resultado.

b) Para una temperatura T lo suficientemente alta como para que no haya condensados, encuentre el sistema de dos ecuaciones que permite calcular V_1/V_2 para un valor dado de alguna de las fugacidades, y diga cómo se relaciona dicha fugacidad con T.

c) Calcule la primera corrección cuántica al resultado del ítem a).

d) Imagine ahora que se parte del régimen clásico y se hace descender la temperatura muy lentamente. Diga qué gas condensa primero y dé un sistema de dos ecuaciones que permita calcular V_1/V_2 en la correspondiente temperatura crítica.

e) Describa cómo evoluciona el sistema si se sigue bajando T a partir de la primera transición de fase. Muestre que, antes de que condense el segundo gas, el tabique llega hasta una de las paredes, cuando T es aún finita, y explique cómo es posible.

f) Explique qué sucede si luego se sigue bajando la temperatura hasta $T = 0$, y, en particular, indique si el sistema atraviesa una segunda transición de fase.

■ **Solución**. En el ítem a) trabajamos en el límite clásico. Aquí ambos gases se comportan exactamente de la misma manera, por más que tengan espines distintos: ambos son gases clásicos ideales. Por lo tanto, como $N_1 = N_2 = N$ y $T_1 = T_2 = T$, tenemos las ecuaciones de estado

$$P_1 V_1 = NkT, \qquad P_2 V_2 = NkT, \tag{1}$$

donde $V_1 + V_2 = V$ es el volumen total. Entonces, la condición de equilibrio mecánico $P_1 = P_2$ implica que $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$. Este resultado es válido a temperaturas muy altas, tales que $N\lambda^3 \ll g_i V_i$. La primera corrección cuántica vendrá de considerar las fórmulas generales

$$N = \frac{g_i V_i}{\lambda^3} g_{3/2}(z_i), \qquad E_i = \frac{3}{2} NkT \, \frac{g_{5/2}(z_i)}{g_{3/2}(z_i)}, \qquad P_i V_i = \frac{2}{3} E_i, \tag{2}$$

*nico.koven@gmail.com, zanellaj@df.uba.ar

donde hemos ignorado por ahora la contribución del fundamental, pues nos interesa simplemente la primera corrección, que entra en juego mucho antes que cualquier tipo de condensación de Bose-Einstein. Entonces, las condiciones $T_1 = T_2 = T$ y $P_1 = P_2$ implican que las fugacidades y los volúmenes tienen que cumplir

$$g_1 V_1 g_{3/2}(z_1) = g_2 V_2 g_{3/2}(z_2), \qquad g_1 g_{5/2}(z_1) = g_2 g_{5/2}(z_2). \tag{3}$$

Cualquiera de las fugacidades está relacionada con T a partir de la definición del correspondiente $N_i = N$.

La idea es utilizar la expansión a z chico como hicimos en clase,

$$g_\nu(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^\nu} = z + \frac{z^2}{2^\nu} + \dots \tag{4}$$

De aquí se obtiene

$$z_i = \frac{N\lambda^3}{g_i V_i} - \frac{1}{2^{3/2}} \left(\frac{N\lambda^3}{g_i V_i} \right)^2 + \dots, \qquad E_i = \frac{3}{2} NkT \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{g_i V_i} + \dots \right). \tag{5}$$

Por ende, igualar las presiones ahora implica (a primer orden)

$$\frac{1}{V_1} NkT \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{g_1 V_1} \right) = \frac{1}{V_2} NkT \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{g_2 V_2} \right). \tag{6}$$

En realidad, en los términos asociados a las correcciones podemos usar el resultado de orden cero, $V_1 = V_2 = \frac{1}{2}V$, y por ende podemos despejar

$$\begin{aligned} \frac{V_1}{V_2} &= \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{g_1 V_1} \right) \left(1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{N\lambda^3}{g_2 V_2} \right)^{-1} \\ &\simeq \left(1 - \frac{1}{2^{3/2}} \frac{N\lambda^3}{g_1 V} \right) \left(1 + \frac{1}{2^{3/2}} \frac{N\lambda^3}{g_2 V} \right) \simeq 1 + \frac{N\lambda^3}{2^{3/2} V} \left(\frac{1}{g_2} - \frac{1}{g_1} \right). \end{aligned} \tag{7}$$

Lo interesante es el signo de la corrección. Sabemos que los gases de bosones disminuyen su presión al incluir las correcciones cuánticas, pero en esa corrección aparece g_i dividiendo. Por lo tanto, el cambio en la presión no es el mismo para ambos gases: el que tiene mayor degeneración se corrige menos, y por lo tanto, a iguales volúmenes, hace mayor presión. Entonces, como $g_2 > g_1$ deberíamos obtener que $V_2 > V_1$. En efecto, $1/g_2 < 1/g_1$, y por lo tanto la corrección a V_1/V_2 que obtuvimos es negativa.

Ahora pensamos en ir disminuyendo la temperatura muy lentamente, de manera tal que el sistema esté siempre en equilibrio. Para saber qué gas condensa primero, lo importante es la segunda condición en (3). Recordemos que la función $g_{5/2}(z)$ es creciente y finita en el rango de interés $0 < z \leqslant 1$. En consecuencia, para $g_2 > g_1$ sólo podremos satisfacer esta condición si $z_1 > z_2$. Intuitivamente, para un gas de bosones el valor de z aumenta a medida que disminuye la temperatura. La discusión anterior muestra que el gas con menor degeneración llegará primero a su temperatura crítica. En otras palabras, en algún momento se alcanzará $z_1 = 1$ con $z_2 < 1$. Por ejemplo, para $g_1 = 1$ y $g_3 = 3$, el resultado numérico es que, cuando z_1 alcanza el valor 1, $z_2 \approx 0.41$. Finalmente, para calcular V_1/V_2 al llegar a la $T_c^{(1)}$, donde todavía no hay un número macroscópico de partículas en el estado fundamental del lado del gas con degeneración g_1, basta con insertar $z_1 = 1$ en el sistema de condiciones anteriores. Obtenemos entonces

$$g_1 V_1 \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right) = g_2 V_2 g_{3/2}(z_2), \qquad g_1 \zeta\left(\tfrac{5}{2}\right) = g_2 g_{5/2}(z_2). \tag{8}$$

Para el mismo ejemplo numérico que antes, $V_1/V_2 \approx 0.56$.

Es interesante ver qué sucede si se sigue bajando la temperatura. En la fase condensada, las únicas partículas que contribuyen a la presión son las de los estados excitados, que son precisamente las que están dadas por la misma fórmula que antes pero con $z = 1$. En otras palabras, para un gas de bosones genérico cuando hay fase condensada tenemos

$$N_{\text{exc}} = \frac{gV}{\lambda^3} g_{3/2}(1), \qquad E = \frac{3}{2}\frac{V}{\lambda^3}\, kT\, g_{5/2}(1), \qquad P = \frac{2E}{3V} = \frac{g}{\lambda^3} kT g_{5/2}(1). \tag{9}$$

Pero entonces, al igualar las presiones al seguir bajando la temperatura perdemos la primera condición de la Ec. (8) (porque no es cierto que $N_{\text{exc}} = N$) pero mantenemos la segunda

$$g_1 \zeta\left(\tfrac{5}{2}\right) = g_2 g_{5/2}(z_2). \tag{10}$$

Esto vale siempre y cuando no condense el otro gas, ¡pero resulta que esto no puede pasar! En efecto, la condición que acabamos de escribir implica que la fugacidad z_2 queda fija *aunque sigamos bajando* T, al menos mientras V_1 no se anule.

Esto permite inferir la evolución del sistema al seguir disminuyendo T. Dado que el segundo gas no condensa, tenemos

$$N = N_2 = \frac{g_2 V_2}{\lambda^3} g_{3/2}(z_2). \tag{11}$$

Lo importante es que acabamos de mostrar que la condición de equilibrio mecánico simplemente implica que z_2 es una constante, por lo que a N fijo obtenemos

$$V_2 \sim \frac{1}{T^{3/2}}. \tag{12}$$

Lo que sucede es que al bajar la temperatura el segundo gas se expande hasta ocupar toda la caja. Pero entonces, necesitamos entender qué pasa con el otro gas. Tenemos

$$N_{\text{exc}}^{(1)} = \frac{g_1 V_1}{\lambda^3} g_{3/2}(1) \sim g_1 V_1 T^{3/2}. \tag{13}$$

Vemos que al disminuir la temperatura y tomar $V_2 \to V$, tenemos $V_1 \to 0$, y por lo tanto $N_{\text{exc}} \to 0$. Entonces, se obliga a todas las partículas del primer gas a acumularse en el fundamental, de manera que su presión tiende a anularse. Esta es una conclusión importante: un gas de cuántico de bosones, a diferencia de uno clásico, es infinitamente compresible gracias a la condensación de Bose-Einstein.

Para estar seguros de nuestra conclusión, basta ver que, mientras $V_1 > 0$, si ambos gases condensaran llegaríamos a una contradicción. En efecto, igualar las presiones con ambos gases en la fase condensada, es decir, con $z_1 = z_2 = 1$, daría

$$g_1 g_{5/2}(1) = g_2 g_{5/2}(1), \tag{14}$$

que obviamente no se cumple.

En resumen, vemos que después de la primera transición, V_2 aumenta como $T^{-3/2}$ al disminuir la temperatura. Esto sucede hasta que llegamos a $V_2 = V$ y $V_1 = 0$. A partir de este punto el problema cambia, porque la presión que mantiene el equilibrio mecánico ya no la ejerce el primer gas: proviene de la pared del recipiente en sí. Las partículas del gas con degeneración g_1 ya están todas en el fundamental, y no se mueven de ahí. Entonces, el problema se vuelve el de un único gas, el que tiene degeneración g_2, en un recipiente de volumen fijo $V_2 = V$. Ahora sí, al seguir bajando la temperatura ya no hay razón para que z_2 permanezca constante. Por lo tanto, al llegar a $T = T_c^{(2)}$ tal que

$$\frac{N {\lambda_c^{(2)}}^3}{g_2 V} = \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right), \tag{15}$$

tendrá lugar la segunda transición de fase. Luego, al disminuir T aún más las partículas del segundo gas se irán acumulando en el estado fundamental, hasta llegar a $N_{\rm exc}^{(2)} = 0$ a $T = 0$. Al final de la evolución, el equilibrio se mantiene trivialmente porque $P_1 = P_2 = 0$ ya que no hay partículas excitadas.

■ **2**. Considere un gas de electrones como un gas ideal de fermiones de espín $\frac{1}{2}$. Existe una reacción $e^- + e^- \rightleftharpoons B$ que permite que los electrones se combinen de a pares, formando partículas bosónicas. Estas partículas tienen espín cero y masa $m_B = 2m_e$, de manera que la masa total $N m_e$ se conserva. Los dos gases se encuentran en equilibrio a temperatura T en un recipiente de volumen V.

a) Utilizando la condición de equilibrio químico $2\mu_e = \mu_B$, muestre que, en el régimen clásico, el número de electrones es mucho mayor que el número de bosones.

b) Muestre que a $T = 0$ sucede lo contrario: el sistema es puramente bosónico.

c) Muestre que hay una transición de fase y determine la temperatura crítica $T^{(c)}$: i) en términos sólo de la energía de Fermi correspondiente a la densidad del sistema, y ii) sólo en términos de la temperatura crítica del gas de Bose a la misma densidad.

■ **Solución**. (Es el Problema 11 de la Guía 6). Las fugacidades están relacionadas por $z_e^2 = z_B$. En régimen clásico, deben ser mucho menores que 1. Eso implica $z_B \ll z_e$. Puesto que, en este régimen, los números de partículas son $N_i \simeq g_i z_i V/\lambda_i^3$, resulta $N_B \ll N_e$.

En general, el número de electrones es

$$N_e = \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(\sqrt{z_B}). \tag{16}$$

La fugacidad z_B debe ser menor que 1. Entonces, N_e está acotado por $N_e < \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(1)$. Cuando $T \to 0$, esto implica $N_e \to 0$.

Si no hay condensado,

$$N = N_e + 2N_B = \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(\sqrt{z_B}) + \frac{2V}{\lambda_B^3} g_{3/2}(z_B). \tag{17}$$

En el límite termodinámico, el máximo valor que puede tomar z_B es 1, de modo que, considerado como función de z_B, si no se incluye la población del fundamental, N está acotado. Entonces, por debajo de cierta temperatura, va a aparecer una fase condensada y, por lo tanto, será $z_B = 1$. Debido a que $z_e^2 = z_B$, la fugacidad de los electrones también será igual a 1. La temperatura crítica está determinada por la condición

$$N = \frac{2V}{\lambda_e^3} f_{3/2}(1) + \frac{2V}{\lambda_B^3} g_{3/2}(1). \tag{18}$$

Luego,

$$\frac{N {\lambda_e^{(c)}}^3}{2V} = f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1). \tag{19}$$

O, más explícitamente,

$$kT^{(c)} = \frac{h^2}{2\pi m_e} \left\{ \left[f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1) \right]^{-1} \frac{N}{2V} \right\}^{2/3}. \tag{20}$$

Para un gas de electrones con densidad $m_e N/V$, la energía de Fermi está dada por

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{2\pi m_e} \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \frac{N}{2V} \right)^{2/3}. \tag{21}$$

Esto significa que

$$kT^{(c)} = \left\{ \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \left[f_{3/2}(1) + 2^{3/2} g_{3/2}(1) \right] \right\}^{-2/3} \epsilon_F. \tag{22}$$

Por otro lado, la temperatura crítica del gas de bosones a la misma densidad es

$$kT_0^{(c)} = \frac{h^2}{2\pi m_e} \left[\frac{1}{2^{3/2} g_{3/2}(1)} \frac{N}{2V} \right]^{2/3}. \tag{23}$$

Entonces,

$$T^{(c)} = \left[1 + \frac{f_{3/2}(1)}{2^{3/2} g_{3/2}(1)} \right]^{-2/3} T_0^{(c)}. \tag{24}$$

■ **3**. Los espines de una cadena de Ising abierta de longitud N tienen momento magnético μ y constante de acoplamiento J. **Sólo** sobre el primer espín actúa un campo externo B. Se definen $K = \beta J$ y $b = \beta\mu B$. Encuentre el valor medio de s_j. *Ayuda*: no es necesario escribir ninguna matriz; si $s = \pm 1$, $\cosh Ks = \cosh K$ y $\sinh Ks = s \sinh K$.

■ **Solución**. El factor de Boltzmann se escribe como

$$e^{-\beta H(\{s\})} = e^{bs_1} q_{s_1,s_2} q_{s_2,s_3} \dots q_{s_{N-1},s_N}, \tag{25}$$

donde $q_{s_i,s_j} = e^{Ks_is_j}$. La función de partición puede calcularse sumando desde el último espín, como en el Problema 3 de la Guía 7:

$$Z_N = \sum_{s_1} e^{bs_1} (2\cosh K)^{N-1} = 2^N (\cosh K)^{N-1} \cosh b. \tag{26}$$

El valor medio del espín s_j está dado por

$$\langle s_j \rangle = \frac{1}{Z_N} \sum_{\{s\}_N} e^{bs_1} q_{s_1,s_2} \dots q_{s_{j-1},s_j}\ s_j\ q_{s_j,s_{j+1}} \dots q_{s_{N-1},s_N} \equiv \frac{A_j}{Z_N}. \tag{27}$$

El subíndice en $\{s\}_\ell$ indica que la suma incluye las variables de espín de 1 a ℓ. Podemos empezar a sumar desde el último espín. La suma que aparece en la expresión anterior avanza sin sobresaltos hasta que llegamos a s_j:

$$A_j = (2\cosh K)^{N-j} \sum_{\{s\}_j} e^{bs_1} q_{s_1,s_2} \dots q_{s_{j-1},s_j}\, s_j. \tag{28}$$

La suma sobre s_j da

$$A_j = (2\cosh K)^{N-j} \sum_{\{s\}_{j-1}} e^{bs_1} q_{s_1,s_2} \dots q_{s_{j-2},s_{j-1}} \left(e^{Ks_{j-1}} - e^{-Ks_{j-1}}\right). \tag{29}$$

Pero $e^{Ks} - e^{-Ks} = 2\sinh Ks = 2s \sinh K$. Entonces, queda

$$A_j = 2\sinh K\, (2\cosh K)^{N-j} \sum_{\{s\}_{j-1}} e^{bs_1} q_{s_1,s_2} \dots q_{s_{j-2},s_{j-1}}\, s_{j-1}. \tag{30}$$

Esto es lo mismo que aparecía en la Ec. (28) pero con un espín menos, de modo que podemos iterar el procedimiento hasta detenernos en s_1. El resultado final será

$$A_j = (2\sinh K)^{j-1} (2\cosh K)^{N-j} \sum_{s_1} e^{bs_1} s_1 = 2^N (\sinh K)^{j-1} (\cosh K)^{N-j} \sinh b. \tag{31}$$

Entonces,

$$\langle s_j \rangle = (\tanh K)^{j-1} \tanh b. \tag{32}$$